¿POR QUÉ LA SUMA DE LOS ÁNGULOS INTERIORES DE LOS TRIÁNGULOS ES CONSTANTE? UNA POSIBILIDAD PARA ARGUMENTAR, DEMOSTRAR Y SISTEMATIZAR

Mario Dalcín
mdalcin00@gmail.com
Departamento de Matemática del Consejo de Formación en Educación. Uruguay.

Tema: Formación de profesores y maestros
Modalidad: CB
Nivel educativo: Formación y actualización docente
Palabras clave: Geometría - argumentar - axiomatizar

Resumen

Buscamos comunicar algunas respuestas que se han dado a la pregunta del título a través de la historia. También algunas respuestas que figuran en libros de texto de geometría de nuestro país. Luego reseñamos las respuestas dadas por un grupo de estudiantes a las dos semanas de haber iniciado sus estudios en el Profesorado de Matemática del Instituto de Profesores 'Artigas'. Finalmente relatamos cómo se trabajó en clase buscando tener en cuenta todas las respuestas de los estudiantes. Por un lado distinguiendo los argumentos no deductivos de los deductivos y ambos de la ausencia de argumento. Dentro de los argumentos deductivos se distinguieron aquellos basados en propiedades acordadas previamente en el curso de los que no. Se buscó poner de relieve así una sistematización posible que admite la geometría.

Introducción

Se preguntó a 75 estudiantes del grupo 1ºA (turno matutino) que iniciaron sus estudios en el Profesorado de Matemática en el Instituto de Profesores 'Artigas' (Montevideo) y al comienzo de los cursos del 2017: ¿qué saben acerca de la suma de los ángulos interiores de un triángulo? En su totalidad respondieron que dicha suma es 180º. A continuación se les preguntó por qué y se les pidió que escribieran sus respuestas individuales en papel. Ante esta segunda interrogante las respuestas fueron variadas. Las exponemos a continuación en el tercer apartado.

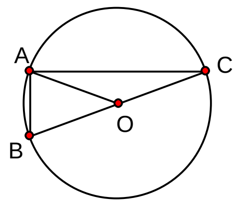
Algunas respuestas acerca de cómo se respondieron las preguntas anteriores en el pasado, se expondrán en el primer apartado.

En el segundo apartado veremos cómo son respondidas dichas preguntas en algunos libros de texto de geometría que han tenido cierta difusión en nuestro país.

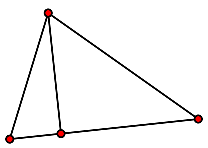
En el cuarto apartado se relata cómo se procedió con este grupo en el curso de Geometría I (curso anual de 8 horas semanales del 1er año del Profesorado de Matemática) y se busca fundamentar dicha propuesta de trabajo.

Algunas respuestas dadas en el pasado

Es posible que Tales de Mileto (siglo VI a. C.) haya dado una demostración de que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a dos rectos. Según Filloy (1998, p. 15) se atribuyen a Tales las siguientes proposiciones: i) un diámetro biseca a un círculo; ii) los ángulos en la base de un triángulo isósceles son iguales; iii) los ángulos opuestos por el vértice son iguales; iv) dos triángulos son congruentes si tienen un lado y dos ángulos iguales; v) el ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto. Heath (1981, p. 134) sostiene que Tales podría haber procedido así:



Por la proposición ii) OAC = OCA y OAB = OBA; por la proposición v) OAC + OAB = CAB es recto, y en base a lo anterior la suma de los ángulos OCA y OBA también es recto, por lo que la suma de los ángulos del triángulo ABC es igual a dos rectos.

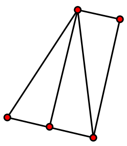


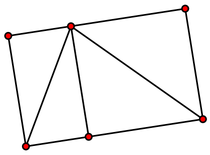
Como todo triángulo puede dividirse en dos triángulos rectángulos, Tales puede haber inferido que la suma de los ángulos de cualquier triángulo es igual a dos rectos.

Según Gémino, matemático y astrónomo griego del siglo I a. C.:

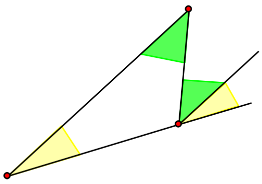
“los antiguos investigaron el teorema de los dos ángulos rectos en cada especie individual de triángulos, primero en los equiláteros, luego en los isósceles y después en los triángulos escalenos, pero los geómetras posteriores demostraron el teorema general de que en cualquier triángulo los tres ángulos interiores son iguales a dos ángulos rectos.” (Heath, 1981, p. 135)

Gémino, al decir ‘antiguos’ hace referencia a Tales y sus contemporáneos, y al decir los ‘geómetras posteriores’ se refiere a Pitágoras y sus contemporáneos. A partir de la observación de que seis triángulos equiláteros dispuestos alrededor de un vértice común llenan el espacio –son iguales a cuatro ángulos rectos- se puede inferir que tres de estos ángulos sumen dos ángulos rectos. En los triángulos isósceles –también válido para los equiláteros- a partir de dividir el triángulo en dos partes iguales mediante una altura y rearmar un rectángulo donde los ángulos suman cuatro rectos, se puede concluir que la suma de los ángulos del triángulo es dos rectos. En los triángulos escalenos se puede adaptar el argumento usado para los triángulos isósceles.



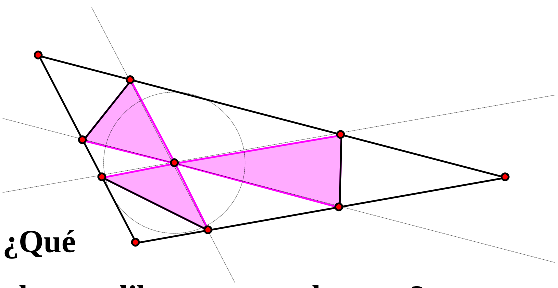


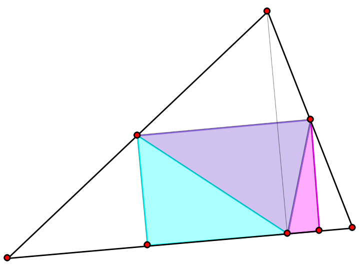
La proposición 32 del Libro I de los *Elementos de Geometría* de Euclides (siglo III a. C.) dice "En todo triángulo, si se prolonga uno de los lados el ángulo externo es igual a los dos internos y opuestos, y los tres ángulos internos del triángulo son igual a dos rectos." (Euclides, 1992, p. 79)



Para demostrar dicha proposición se recurre al V postulado: "si una recta incidente sobre dos rectas, hace ángulos internos y de la misma parte menores que dos rectos, prolongadas esas dos rectas al infinito coincidirán por la parte en que estén los ángulos menores que dos rectos" (Euclides, 192, p. 11) y a la proposición 29: "una recta que cae sobre dos rectas paralelas hace ángulos alternos internos iguales entre sí…". En la demostración de la proposición 29 es la primera vez que se recurre al postulado V en los *Elementos*.

Blaise Pascal (1623-1662), siendo adolescente, ideó mediante el doblado de papel, dos formas de fundamentar que la suma de los ángulos de un triángulo es igual a un ángulo llano (Eves, 1995, pp. 361-362):





¿Qué dicen algunos libros de texto?

En *Curso de Geometría Métrica -tomo I-Fundamentos*- de Pedro Puig Adam (1976) se introducen i) axiomas de existencia y enlace; ii) axiomas de orden; iii) axiomas de movimiento en el plano; iv) se define traslación; v) se incorpora un axioma de paralelismo: "por un punto exterior a una recta pasa una sola paralela a ella" (p. 42); vi) en el apartado 'forma euclídea del postulado de paralelismo' aparecen los ángulos alternos internos y las propiedades 'si dos rectas son paralelas, entonces los ángulos alternos internos son iguales' y su recíproca. Luego de todos los previos mencionados, se demuestra que "la suma de los ángulos de todo triángulo es un ángulo llano" (p. 59) de la misma forma que en la proposición 32 del libro I de los *Elementos*. Como consecuencia de la propiedad demostrada el texto menciona que "un ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de los internos no adyacentes a él."

En *Geometría Métrica -Plano y espacio*- de Walter Fernández Val (2000) se sigue un recorrido similar al que sigue Puig Adam y como corolario en el apartado 'segundo teorema del ángulo externo' que dice "cualquier ángulo externo es igual a la suma de los otros dos ángulos interiores no adyacentes a él", se demuestra que "la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a un ángulo llano" (p. 77). El 'teorema del ángulo externo' que se demuestra previamente (p. 58) dice que "cualquier ángulo externo es mayor que los ángulos interiores no adyacentes a él." El orden en que figura esta última proposición en el texto remite a la forma como se estructuraba la geometría a ser enseñada en Bachillerato Diversificado hace dos décadas en Uruguay. También nos remite a su lejano origen en la proposición 16 (libro I) de los *Elementos* en la que Euclides hace la demostración sin recurrir al postulado V y que es más débil que la proposición 32 (libro I).

En *Geometría Euclidiana en la formación de profesores* (Dalcín y Molfino, 2014), luego de platear las interrogantes "i) ¿cómo deben ser las rectas a y b para que los ángulos alternos internos sean de igual medida? ii) ¿cómo deben ser las medidas de los ángulos alternos internos para que las rectas a y b sean paralelas?" (p. 76) se aceptan como axiomas: 1) si dos rectas a y b son paralelas, entonces los ángulos alternos internos son iguales y 2) si los ángulos alternos internos son iguales, entonces las rectas a y b son paralelas (p. 77). A continuación se pregunta si los enunciados de los axiomas siguen siendo válidos para ángulos alternos externos y para ángulos correspondientes. En una actividad posterior (p. 79) se propone: "i) ¿Es constante la suma de dos ángulos interiores de un triángulo? ¿Cómo fundamentarías tu respuesta? ii) ¿Qué se puede afirmar acerca de la suma de los ángulos interiores de un triángulo? ¿Cómo lo justificarías?" Ambos axiomas tienen una referencia en los *Elementos* de Euclides: el axioma 1 es la proposición 29 (libro I) y el axioma 2 es la proposición 27 (libro I).

Las respuestas de los estudiantes

Considero que el aspecto más relevante de las respuestas de los estudiantes es que nos permite enterarnos que 31 de ellos –es decir un 40% del grupo- no es capaz de dar una explicación para una afirmación que consideran cierta desde la enseñanza primaria, o la explicación que da carece de sentido. Esto no es un resultado deseable luego de por lo menos doce años de escolarización que incluyó algo de enseñanza de la matemática en cada año.

Otro aspecto que llama la atención es que 22 respuestas -30% del grupo- recurre a trazar por un vértice del triángulo una paralela al lado opuesto a dicho vértice y usar la igualdad de ángulos alternos internos y/o alternos externos, y/o correspondientes. Posiblemente esto se deba a que es la fundamentación que suele hallarse en los libros de texto de Ciclo Básico, que es la más frecuente de hallar en Internet y que hayan visto hacer a sus profesores en Enseñanza Media.

Un tercer aspecto es que también surgen en el grupo otros seis argumentos distintos al más frecuente. Las distintos tipos de respuestas pueden verse en el Anexo 1.

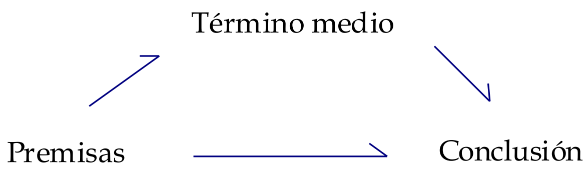
Referencias teóricas

Duval (1999, p. 5) entiende la *argumentación* como la producción de razones que den sustento a una afirmación. Balacheff (1998, 2000) entiende *explicación* como las razones dadas para los "por qué" y dice que en las explicaciones es la propia racionalidad del sujeto lo que establece y garantiza la validez de una proposición. Entendemos que la noción de explicación de Balacheff y la de argumentación de Duval son equivalentes.

Balacheff (1998, 2000) entiende *demostración* como una sucesión de enunciados cada uno de los cuales es, o bien una definición, axioma o teorema, o bien es derivado deductivamente de enunciados previos. Duval (1999, p. 16) propone un esquema ternario para un pasaje de deducción que haga uso del *modus ponens*, consistente en premisas, término medio y conclusión. El *modus ponens* tiene la siguiente estructura:

$$
\begin{array}{l}
P \Rightarrow Q \\
P \\
\text{-------} \\
Q
\end{array}
$$

En el esquema de Duval la premisa es P, el término medio es P $\Rightarrow$ Q y la conclusión Q y Duval lo presenta de la siguiente manera:



Si buscamos promover en los estudiantes la creación de argumentos y a su vez la elaboración de demostraciones, debemos tener en cuenta el salto cognitivo -ruptura cognitiva según Duval (1999)- existente entre la producción de argumentos y la producción de demostraciones. “El desarrollo de la argumentación incluso en sus formas más elaboradas no abre una vía de acceso a la demostración. Un aprendizaje específico e independiente se hace necesario en lo que respecta al razonamiento deductivo.” (Duval, 1999, p. 45)

De Villiers (1986) distingue entre axiomatización constructiva y axiomatización descriptiva. La *axiomatización constructiva* “se da cuando un conjunto de axiomas es cambiado a través de exclusión, generalización, reemplazo o adición de axiomas a dicho conjunto, a partir del cual se construye un contenido totalmente nuevo de una manera deductiva.” (p. 5) Menciona como ejemplo el caso de las geometrías no euclidianas, donde el V postulado es sustituido por postulados distintos. Por *axiomatización descriptiva* “se entiende la selección de un conjunto de axiomas a partir de un conjunto de enunciados ya existente.” (p. 7)

“Esta selección de axiomas puede, por un lado, hacerse con el criterio de la aceptabilidad intuitiva o ‘autoevidencia’ de los enunciados (axiomatización ‘clásica’), o con el criterio de la relativa facilidad con que pueden derivarse otras afirmaciones de los axiomas (axiomatización ‘moderna’).” (p. 9)

La sistematización implica una organización de las distintas proposiciones. La sistematización está ligada directamente a la elección de los axiomas en el caso de la axiomatización descriptiva.

Lo trabajado en clase

En *Geometría Euclidiana en la formación de profesores* (Dalcín y Molfino, 2014) se eligieron como axiomas 1 y 2 a los mencionados antes debido a su aceptabilidad intuitiva. En clase, estos axiomas fueron acordados luego de explicitarse las tres posibilidades que se presentan ante la justificación de una propiedad según el trilema de Münchhausen (Wikipedia):

i) Una regresión infinita de justificaciones: A se justifica por B, B se justifica por C, C se justifica por D, etc.

ii) Una justificación circular: A se justifica por B, B se justifica por C, y C se justifica por A. De Villiers (1998, pp. 20-21) propone una forma de poner en evidencia la circularidad pidiendo justificar que ante dos rectas paralelas se justifique que los ángulos alternos internos son iguales, luego que se justifique la propiedad que se usó y finalmente se justifique la propiedad en que se justificó la segunda justificación.

iii) Un corte arbitrario en el razonamiento: A se justifica por B, B se justifica por C, y C no se justifica. La elección de los axiomas 1 y 2 condiciona una sistematización posible de ciertas propiedades.

Lo que se hizo con los estudiantes del grupo 1ºA (generación 2017) fue distinguir en las distintas respuestas las que ofrecían argumentos de las que no, ya sea por estar la respuesta en blanco o por ser la respuesta no concluyente.

Dentro de las hojas entregadas por los estudiantes que argumentaban la respuesta a la interrogante, se buscó aclarar en qué se basaban, en qué se apoyaban. Una vez hecho esto se buscó explicitar si las respuestas se basaban en mediciones, en acciones, en la apreciación visual, la intuición u otros; o si se basaban en propiedades matemáticas. A los argumentos que se basaban en propiedades matemáticas les llamamos argumentos deductivos.

Luego distinguimos si las propiedades matemáticas en las que se basaban los argumentos las conocían de años anteriores o habían sido acordadas en clase en este año 2017. En el caso de las últimas acordamos que en el curso 2017 les llamaríamos demostraciones.

Los axiomas 1 y 2 acordados en el curso limitaron las demostraciones para la pregunta del título. Pero también posibilitaron una organización de algunas propiedades que se mencionaron, por ejemplo, que para demostrar que la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero es constante se necesitaba saber que la suma de los ángulos interiores del triángulo es constante.

Por último, se analizaron otros argumentos que no habían surgido en el grupo para fundamentar la pregunta del título. (Ver anexo 2)

Referencias bibliográficas

Balacheff, N. (1998). *Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics*. En D. Pimm (Ed.), Mathematics, Teachers and Children, pp. 216-235. London, U. K.: Hodder & Stoughton.

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. Bogotá, Colombia: Una empresa docente.

Dalcín, M. y Molfino, V. (2014). *Geometría Euclidiana en la formación de profesores. Exploración inicial del plano*. Montevideo: Ediciones Palíndromo.

de Villiers, M. (1986). *The role of axiomatization in mathematics and mathematics teaching.* Research Unit for Mathematics Education, University of Stellenbosch, South Africa.

de Villiers, M. (1998). *El futuro de la geometría en la escuela secundaria*. http://www.cabri.net/Preuve/Resumes/deVilliers/deVilliers98/deVilliers98.html

Euclides (1992). *Elementos de geometría* I-II. México: UNAM.

Duval, R. (1999). *Argumentar, demostrar, explicar: ¿continuidad o ruptura cognitiva?* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Eves, H. (1995). *Introducao á história da matemática*. Campinas: Editora da UNICAMP.

Filloy Yagüe, E. (1998). *Didáctica e historia de la Geometría Euclidiana*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

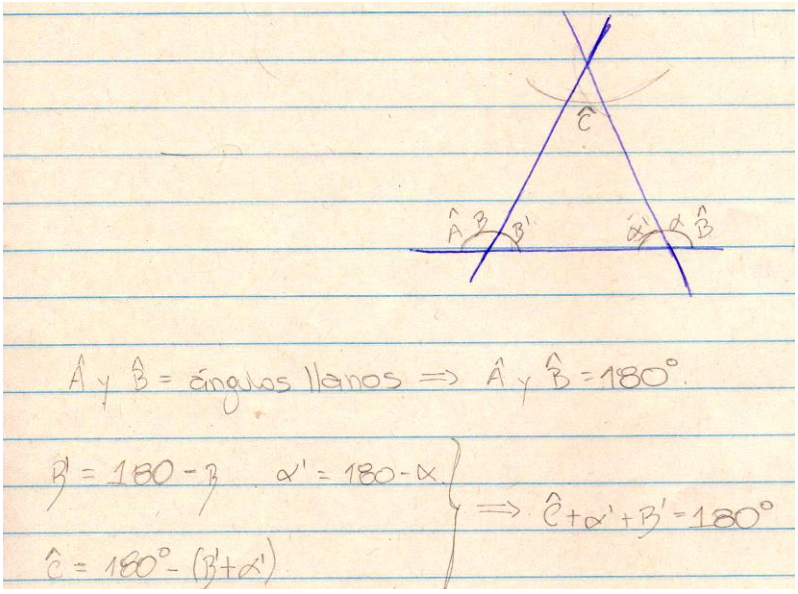
Heath, T. L. (1981). *A history of greek mathematics*, I. New York: Dover.

Wikipedia. *Trilema de Münchhausen*. Disponible en:
https://es.wikipedia.org/wiki/Trilema_de_M%C3%BCnchhausen

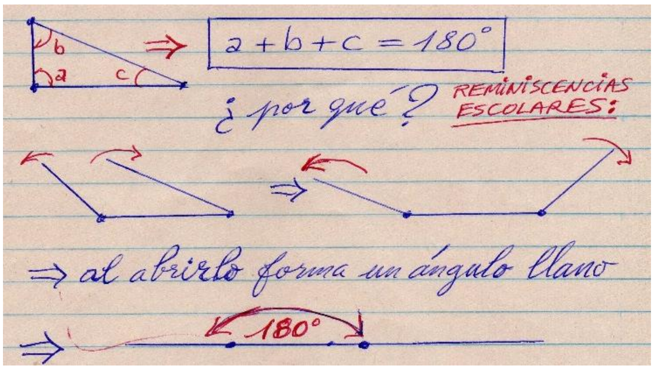
Anexo 1: Respuestas de los estudiantes

- Nueve estudiantes entregaron la hoja en blanco.

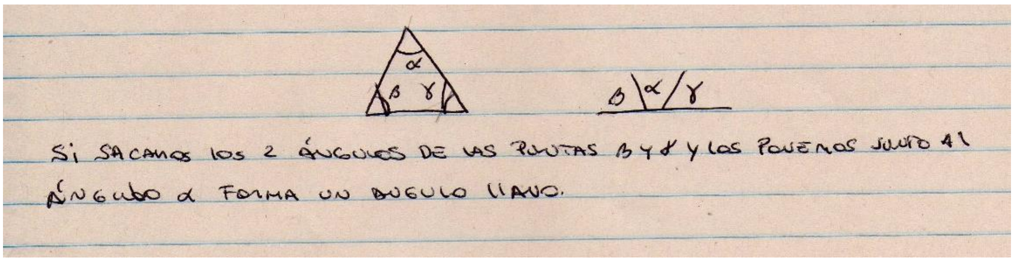
- Once estudiantes al dar su respuesta hicieron trazados y/o cálculos con ángulos que incluyen errores o que no permiten concluir. Por ejemplo:



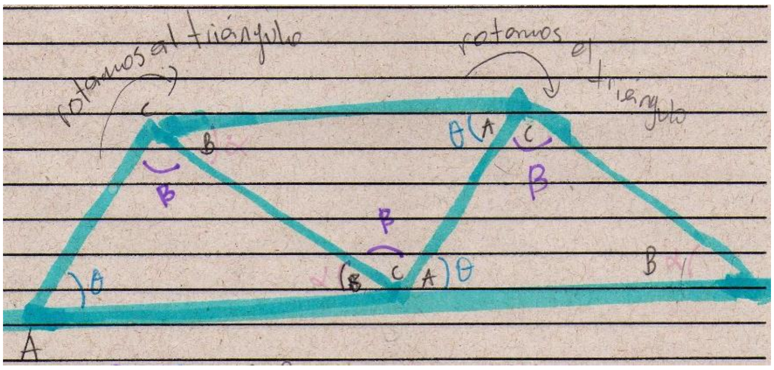
- Cuatro respuestas recurren a razonamientos circulares. Veamos un ejemplo: “la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180º porque los ángulos internos más los externos suman 360º y si igualo me queda AI + AE = 360º y al pasar para el otro lado los ángulos internos me queda AE = 360º - AI, y para que se cumpla esta igualdad los AI deben ser 180º.”
- Cuatro respuestas hacen referencia al círculo. Por ejemplo: “Un círculo mide 360º y un triángulo es la mitad de un círculo entonces mide 180º porque un semicírculo mide 180º que sería la mitad de un círculo entero que mide en total 360º.”
- Tres estudiantes dicen que al ‘abrir’ el triángulo de forma que los tres segmentos queden alineados se forma un ángulo llano. Por ejemplo: “Al poner los 3 lados en una misma línea imaginaria formo un ángulo llano.” Por ejemplo:



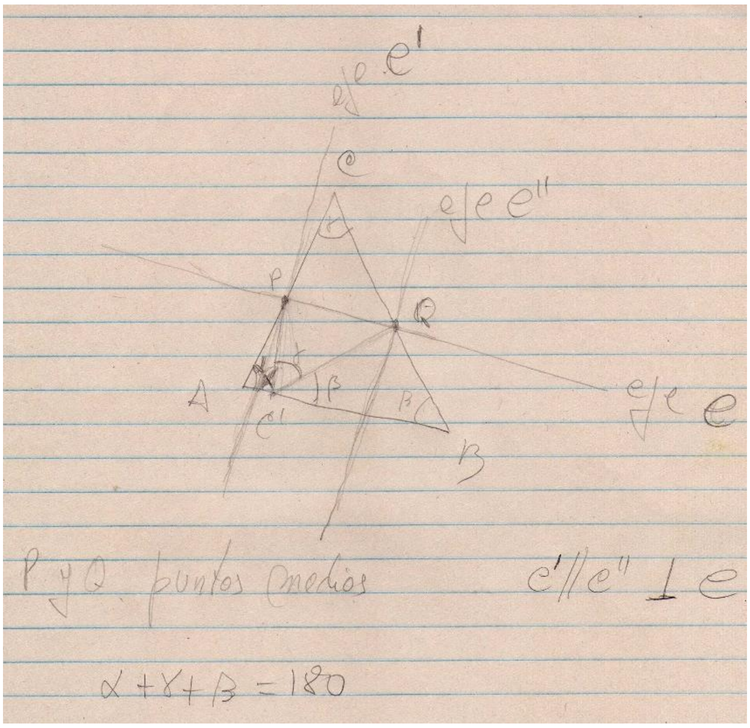
- Un estudiante dice que ‘si la suma de esos ángulos diera mayor [que 180º], dos de los lados nunca se unirían’.
- Tres respuestas apelan a cortar las ‘puntas’ de los triángulos, ponerlas juntas y ver que forman un ángulo llano. Por ejemplo:



- Dos estudiantes recurren a ubicar tres triángulos iguales de forma que ángulos distintos compartan un mismo vértice. Por ejemplo:

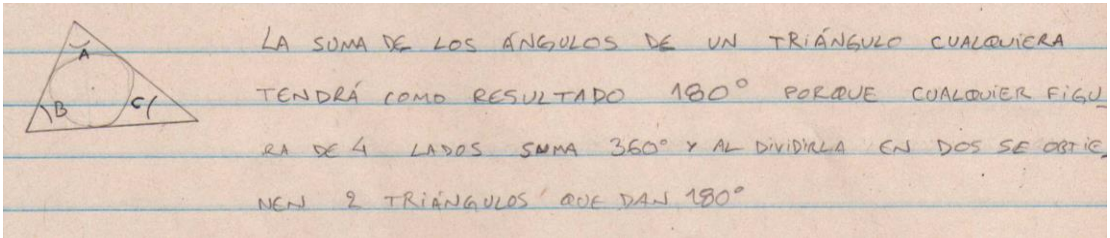


- Veintidós estudiantes trazan una paralela a un lado por el vértice opuesto a ese lado y considerando la igualdad de ángulos alternos internos, correspondientes u opuestos por el vértice, concluyen que la suma de los ángulos interiores del triángulo es 180º.
- Un estudiante usa la idea anterior en un triángulo rectángulo.
- Un estudiante recurre al teorema del ángulo externo.
- Un estudiante usa la misma idea de Pascal de llevar los tres vértices del triángulo a coincidir en el pie de una perpendicular. Por ejemplo:



- Un estudiante dice "por propiedad la suma de los ángulos interiores de los polígonos es (n-2).180º, siendo n el número de lados. (3-2).180º = 180º."
- Nueve respuestas recurren a dividir un cuadrado mediante una diagonal. Por ejemplo: "Los ángulos interiores de un cuadrado suman 360º por lo que se me ocurre que al dividir con una diagonal al cuadrado obtengo 2 triángulos, donde ambos van a sumar cada uno 180º sus ángulos interiores."
- Dos estudiantes asumen que la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero es 360º y trazando una diagonal obtienen dos triángulos cuyos ángulos interiores suman

180º: “Cualquier figura de cuatro lados suma 360º y al dividirla en dos se obtienen dos triángulos que dan 180º.” Por ejemplo:



Anexo 2: Argumentos puestos a consideración