VIAJE POR (TODOS) LOS POLIEDROS CONVEXOS

Mario Dalcín – Verónica Molfino
mdalcin00@gmail.com – veromolfino@gmail.com
Instituto de Profesores 'Artigas' – Departamento de Matemática CFE - Uruguay

Tema: Pensamiento geométrico
Modalidad: Taller
Nivel educativo: Formación y actualización docente
Palabras clave: Poliedros, relación caras-vértices

Resumen

Es conocido que la suma de la cantidad de caras y vértices de un poliedro convexo es dos unidades mayor que la cantidad de aristas. Ahora, dados un número cualquiera de caras y de vértices, ¿existe un poliedro con esas características? ¿Existe más de uno? ¿Qué otras condiciones podemos establecer entre sus elementos? En este taller abordamos una indagación sistemática de los poliedros con la utopía de identificarlos a todos.

Introducción

Los poliedros son, sin dudas, uno de los contenidos que viven en el discurso matemático escolar actual que ha sido desarrollado con mayor anterioridad. Basta considerar que ya los griegos tenían un dominio amplio de ellos y sus propiedades, lo que se cristaliza en la obra "Los Elementos" de Euclides. Sin embargo, lo que se desarrolla en los cursos de secundaria parece haberse quedado precisamente en ese momento, sin considerar el desarrollo sobre la temática en los subsiguientes 23 siglos.

Teniendo en cuenta los niveles de razonamiento geométrico propuestos por Van Hiele (Gutiérrez y Jaime, 1991, 1996), podríamos decir que en el discurso matemático escolar uruguayo sobre los poliedros se abordan actividades que permiten a los estudiantes poner en juego los niveles 1 (reconocimiento) y 2 (análisis). En algunos casos, se realizan actividades de clasificación lo que podría conducir a una transición al nivel 3 (deducción informal), pero en la mayoría de los casos más que clasificaciones de la familia de los poliedros, de lo que se trata es del análisis de familias muy particulares de ellos: los regulares, los prismas o las pirámides.

En este taller proponemos una actividad que puede promover un trabajo en niveles superiores de razonamiento geométrico, como la deducción formal. Formulamos una pregunta que ha sido estudiada más recientemente en el devenir del desarrollo del conocimiento sobre poliedros, y, si bien ya fue respondida, tal respuesta no está desarrollada en los textos o referencias usualmente utilizadas por profesores de Matemática, lo que puede resultar motivador para quienes participen del taller.

Cuando se transita el nivel 2 de razonamiento geométrico en relación a los poliedros, el del análisis de sus elementos, es usual que se conjeture la relación conocida como "relación de Euler" entre caras, vértices y aristas de los poliedros convexos:

$$C + V = A + 2.$$

Ahora, ¿dados un número cualquiera de caras y de vértices, ¿existe un poliedro convexo con esas características? ¿Existe más de uno? ¿Qué otras condiciones podemos establecer entre sus elementos?

Esta pregunta es abordada en profundidad en Dalcín y Molfino (2015, 2016), trabajo a partir del cual proponemos este taller.

Desarrollo del taller

Articulamos el taller en torno a las siguientes preguntas.

Pregunta 1: ¿Cuál es el poliedro convexo más simple?

Buscamos con esta pregunta que los participantes del taller hagan presentes en su mente y/o en dibujos algunos poliedros y que se pregunten acerca de cuál podría ser un criterio para definir 'más simple'. Como no fue explicitado qué se entiende por 'más simple' es posible que surja más de una respuesta, cada una teniendo en cuenta un criterio distinto.

Las respuestas esperadas son: tetraedro regular (por tener caras de un mismo tipo y que son triángulos equiláteros, es decir el polígono regular 'más simple'); tetraedro (por tener el menor número de caras, vértices y aristas); cubo (por tener caras de un mismo tipo y que son cuadrados, es decir el polígono regular más usado); prisma de base triangular (por tener menor cantidad de vértices, caras y aristas que el cubo). Las razones para apoyar el 'más simple' pueden ser consuetudinarias (el cubo es el poliedro más usado y reconocido) o referidas a la cantidad de caras, vértices y aristas.

En la puesta en común se puede incorporar una pregunta complementaria: ¿Por qué no considerar poliedros convexos de tres caras?, ¿de tres vértices?, ¿de cuatro aristas?

Conclusión: Para que exista un poliedro convexo es necesario que tenga como mínimo cuatro vértices, cuatro caras y seis aristas.

$$V \geq 4; C \geq 4; A \geq 6$$

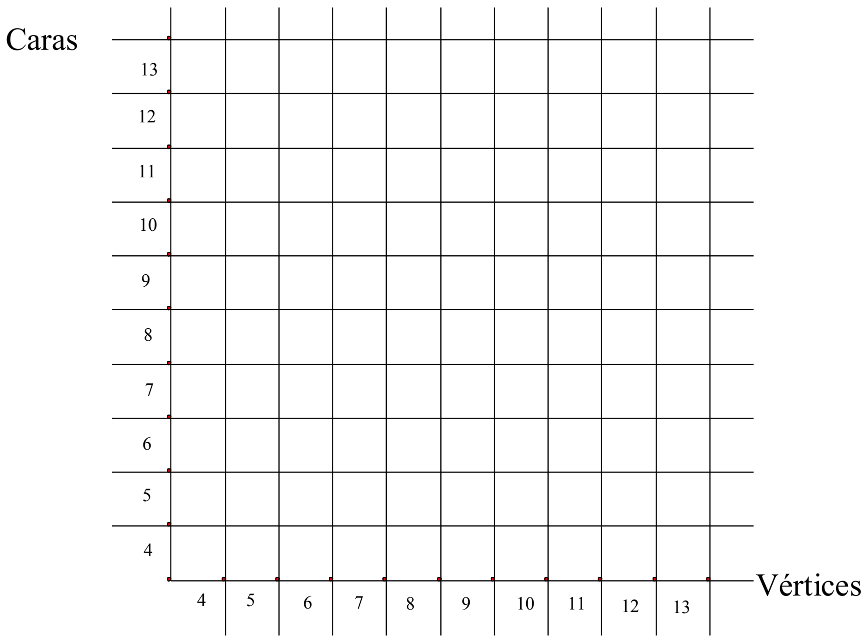
Pregunta 2: ¿Cuál es (o cuáles son) el siguiente (o los siguientes) poliedro(s) convexo(s) más simple(s)? ¿Existen poliedros con 4V y 5C? ¿Existen poliedros con 5V y 4C?

Es de esperar que surja el poliedro con 5V y 5C.

Conclusión: Existe un único poliedro con 4V. Existe un único poliedro con 4C.

Existe un único poliedro con 5V y 5C.

Para organizar y sintetizar los acuerdos que se vayan alcanzando usaremos ejes cartesianos. En el eje de abscisas marcaremos el número de vértices (V) y en el eje de ordenadas el número de caras (C). De esta manera podemos reformular la pregunta inicial del taller: indagar si para cada punto (V,C) existe un poliedro convexo, y en caso que exista, si es posible construirlo.



Es posible que ya hayan surgido las pirámides (4,4) y (5,5).

Pregunta 3: ¿Dónde se ubican las pirámides en el cuadro V-C?

Conclusión: Las pirámides están ubicadas en la bisectriz del cuadro V-C. Esto es debido a que las pirámides cumplen que V = C. Es posible que considerar a las pirámides en su conjunto y observar que quedan alineadas en la bisectriz del cuadro V-C sea una novedad en el discurso matemático escolar de nuestro país.

Es muy probable que junto a la observación anterior quede implícita la idea de que las pirámides son los únicos poliedros que existen en los puntos donde C = V, reforzado además por el hecho que en los puntos (4,4) y (5,5) esto efectivamente es así. Dejémoslo así hasta más adelante.

Es posible que en la búsqueda del poliedro más simple sin ser el más simple, ya hayan surgido: a) La pirámide de base triangular (4,4) que tiene 6 aristas. b) La pirámide de base cuadrilátero (5,5) que tiene 8 aristas. c) El prisma de base triangular (6,5) y la bipirámides triangular (5,6), ambos poliedros tienen nueve aristas.

Pregunta 4: ¿Existe un poliedro con siete aristas?

Se espera que en la búsqueda de argumentos para responder la pregunta anterior se recurra a la relación V + C = A + 2 (relación de Euler) existente entre vértices, caras y aristas de poliedros convexos.

A continuación y a modo de abordar la problemática de una manera más sistémica, proponemos el estudio de familias de poliedros. Comenzamos con las dos más conocidas en el discurso matemático escolar uruguayo.

Pregunta 5: ¿Dónde se ubican los poliedros regulares? ¿Y los deltaedros?

Dado que estas son familias finitas de poliedros puede que no se vean grandes regularidades, pero esperamos que observen que en el caso de los poliedros regulares, quedan dispuestos en puntos del gráfico que son simétricos respecto a la diagonal principal.

En el caso de los deltaedros podrán observar que los puntos correspondientes en el gráfico quedan alineados (en particular en la recta C = 2V-4), tanto mediante el análisis exhaustivo de los ocho casos como mediante un análisis analítico de las relaciones existentes entre caras, vértices y aristas para esa familia.

Es posible que ya hayan surgido los prismas (6,5) y (8,6).

Pregunta 6: ¿Dónde se ubican los prismas en el cuadro V-C?

Se busca observar que los prismas se ubican en puntos que están alineados. Y deducir la ecuación de dicha recta. Esto es posible hacerlo a partir de dos puntos ubicados en el gráfico V-C. También se puede deducir dicha ecuación de la siguiente manera: En un prisma cuya base es un polígono de n lados, V = 2n (n por cada base) y C = n + 2 (n caras "laterales" y las dos "bases"). De la primera igualdad podemos deducir $n = \frac{V}{2}$, que se puede sustituir en la segunda para obtener que $C = \frac{V}{2} + 2$. Es decir que los puntos están alineados en una recta de pendiente $\frac{1}{2}$ y ordenada en el origen 2.

También es posible que haya surgido la bipirámide triangular (5,6).

Pregunta 7: ¿Dónde se ubican las bipirámides en el cuadro V-C?

Mediante razonamientos análogos a los hechos para los prismas se puede deducir que las bipirámides se ubican en puntos alineados, ahora en la recta C = 2V – 4.

Esperamos que al abordar esta pregunta los participantes del taller descubran la dualidad existente entre caras y vértices para estas dos familias, lo que pueden incluso interpretar geométricamente.

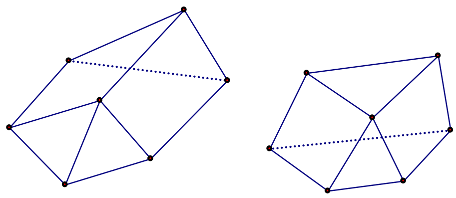
A partir de las dos rectas anteriores se puede preguntar si es posible construir poliedros 'por debajo' de la recta de los prismas y también si es posible construir poliedros 'por encima' de la recta de las bipirámides. De esta manera se busca constatar que solo es posible construir poliedros convexos en la siguiente región del cuadro V-C:

$$\begin{cases} C \geq \frac{V}{2} + 4 \\ C \leq 2V - 4 \end{cases}$$

En otras palabras, las bipirámides están entre los poliedros más eficientes en tener mayor número de caras para un determinado número de vértices. Los prismas están entre los menos eficientes si pensamos en la cantidad de caras en relación a la cantidad de vértices.

Pregunta 8: ¿Es posible construir un poliedro para el punto (7,6)?

Una finalidad de la pregunta es involucrar a los participantes en la actividad de construir un poliedro –si es que existe- a partir de condiciones dadas por su número de vértices y de caras. Si bien tanto el número de vértices como de caras es chico, la dificultad radica en construir poliedros que no pertenecen a una familia de poliedros que sea tenida en cuenta en el discurso matemático escolar actual. Se busca que construyan los poliedros:

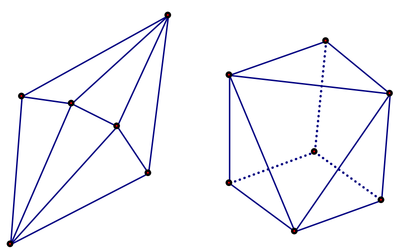


Esperamos que a partir de esta pregunta descubran que hay más de un poliedro que cumple la condición (7V, 6C). Esto pondrá de relieve si los participantes estaban asumiendo o no que por cada punto había un solo poliedro. La presencia de los dos poliedros anteriores en un mismo casillero siembra dudas sobre el resto de los puntos donde es posible construir poliedros convexos. Ahora no solo tenemos el problema de tratar de construir un poliedro para el punto, sino que se agrega el problema de saber cuántos poliedros será posible construir en cada punto. Con esta pregunta buscamos además que los participantes del taller tomen conciencia de la diferencia radical de actividad matemática entre i) partir del poliedro y establecer relaciones entre V-C-A y ii) a partir de cierta relación entre V-C-A, buscar construir un poliedro.

Siguiendo la dualidad existente entre caras y vértices y que ya se observó entre prismas y bipirámides, se puede plantear la siguiente pregunta.

Pregunta 9: ¿Es posible construir un poliedro para el punto (6,7)?

Podrán surgir los poliedros:



Pregunta 10: ¿Cómo construir al menos un poliedro para cada punto?

Para responder esta pregunta pueden surgir diversos métodos, entre ellos, los de truncamiento y ampliación, que eventualmente pueden haber sido usados para responder las dos preguntas anteriores.

Por último proponemos una pregunta que invita a profundizar lo considerado en las preguntas 8 y 9 respecto a la cantidad de poliedros por cada punto del gráfico.

Pregunta 11: ¿Cuántos poliedros distintos hay en el punto (6,6)? ¿Y en el punto (7,7)?¿Y en el punto (10,10)? ¿Y en el punto (13,13)?

La finalidad de esta pregunta es mostrar cómo crece la cantidad de poliedros distintos que se pueden formar en cada punto a medida que nos alejamos del punto (4,4).

La siguiente tabla (Michon, 2000) indica la cantidad de poliedros que pueden encontrarse para cada par (V,C):

Caras \ Vértices	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
13						219	7916	104213	709302	2937495
12					14	558	8822	64439	268394	709302
11					38	768	6134	25626	64439	104213
10				5	76	633	2635	6134	8822	7916
9				8	74	296	633	768	558	219
8			2	11	42	74	76	38	14	
7			2	8	11	8	5			
6		1	2	2	2					
5		1	1							
4	1									

Es sorprenderte pensar, por ejemplo, que la cantidad de poliedros distintos que tienen 13 vértices y 13 caras es 2.937.495. Es decir que formando poliedros que tengan 13 vértices y 13 caras se podría construir un poliedro distinto para cada habitante de nuestro país.

Reflexiones finales

Los poliedros constituyen un contenido a abordar en enseñanza media y formación de maestros y profesores que generalmente es abordado bajo el paradigma de la “visita de monumentos” (Chevallard, 2013). Esto es, se los presenta, se enumeran algunas de sus propiedades y se reconocen algunas de las familias más conocidas.

Por el contrario, en este taller proponemos una visita al mundo de los poliedros que invita al “turista” a involucrarse en un trabajo matemático más profundo, bajo la perspectiva del cuestionamiento del mundo (Chevallard, 2013). Mediante una guía tentativa de preguntas proponemos un paseo en el que los asistentes podrán conjeturar propiedades, buscar generalidades y patrones y esgrimir argumentos para validar o refutar. Conscientes de que un paseo por todos los poliedros es una utopía, esperamos que este taller brinde herramientas para una consideración más sistemática de los poliedros, que permita a los asistentes internarse en su estudio mediante caminos que no sean los ya trillados de las familias más conocidas.

Referencias bibliográficas

Chevallard, Y. (2013). Enseñar Matemáticas en la Sociedad de Mañana: Alegato a Favor de un Contra paradigma Emergente. Journal of Research in Mathematics Education, 2 (2), 161 -182.

Dalcín, M. y Molfino, V. (2015). *Cuerpos con historia. Poliedros para experimentar. Volumen 1*. Montevideo: Ediciones Palíndromo.

Dalcín, M. y Molfino, V. (2016). *Cuerpos con historia. Poliedros para experimentar. Volumen 2*. Montevideo: Ediciones Palíndromo.

Gutiérrez, A. y Jaime, A. (1991). El modelo de Razonamiento de van Hiele como marco para el aprendizaje comprensivo de la Geometría. Un ejemplo: Los Giros. *Educación Matemática*, 3(2), pp. 49-65.

Gutiérrez, A. y Jaime, A. (1996). El modelo de razonamiento geométrico de van Hiele. En *El grupo de las isometrías del plano. Colección: Educación Matemática en Secundaria, 13,* pp. 85-97. España: Síntesis.

Michon, G. P. (2000). Counting polyhedral. Recuperado el 16 de mayo de 2017 de http://www.numericana.com/data/polyhedra.htm