# UM AMBIENTE DINÂMICO NO ENSINO E APRENDIZAGEM DE CONTEÚDOS MATEMÁTICOS

Celina A. A. P. Abar
Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP) – Brasil
abarcaap@pucsp.br
Nível Educativo: Professores da Escola Básica
**Palavras Chave:** Geometria dinâmica, Geogebra, Educação Matemática

## RESUMO

Apresentamos uma proposta de um mini-curso concebido com o objetivo de oferecer orientações pedagógicas para o ensino e aprendizagem de conteúdos matemáticos com o uso de um ambiente dinâmico e promover discussões sobre os impactos que possam ser vivenciados pelos participantes no desenvolvimento de atividades a serem utilizadas na sua prática docente. O curso será desenvolvido em ambientes com computadores e acesso à Internet com no máximo quinze participantes. Os participantes do curso devem estar familiarizados com conceitos algébricos e geométricos pertinentes ao Ensino Básico assim como se sentirem confortáveis no uso do computador e no acesso à Internet. As atividades têm por objetivo buscar um aprendizado em matemática que permita ao participante desenvolver capacidades que caracterizam atos próprios do "fazer matemático" como experimentar, representar, analisar e concluir. Com base nessas reflexões, as atividades foram preparadas para que o participante tenha a oportunidade de manipular os objetos na tela a fim de conjecturar, descobrir e formalizar as relações pertinentes ao assunto em estudo. Será utilizado o GEOGEBRA, um software matemático para o estudo de Geometria, Álgebra e Cálculo.

## INTRODUÇÃO

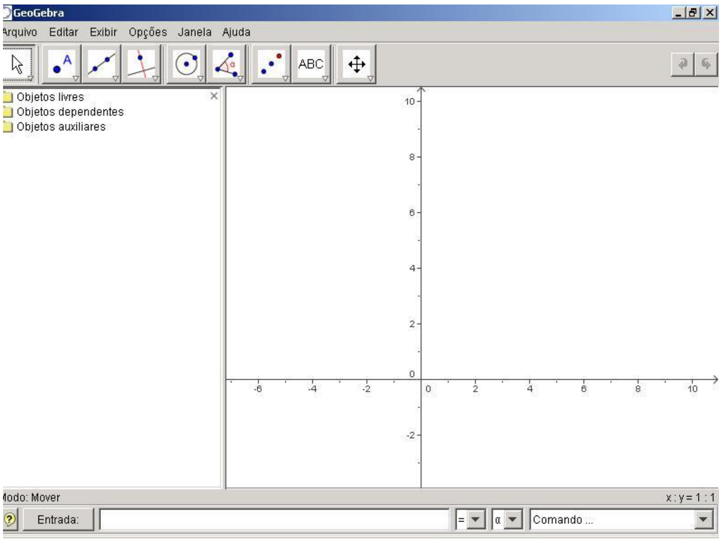
A apropriação das tecnologias digitais pelo professor e, em especial, pelo professor de matemática, é uma condição de sobrevivência para sua prática docente. É difícil conceber um professor, nos dias atuais, desenvolvendo seu trabalho na escola sem fazer uso dos novos recursos tecnológicos para dar suporte às suas atividades. Assim, sua formação deve ser contínua e acompanhar o desenvolvimento das novas tecnologias. É essencial conhecer estratégias de ensino e aprendizagem que possibilitem ao aluno independência para que ele possa desenvolver seus próprios mecanismos de conjecturas e resolução de problemas com o uso de programas computacionais específicos. È importante também conhecer teorias e pesquisas que dêem suporte a essas estratégias e servem de alicerce para a prática docente deste professor.

Nesse sentido, propomos um mini-curso dirigido a professores de matemática com o uso de um software educacional como apoio ao ensino e aprendizagem de conteúdos matemáticos nos contextos algébricos e geométricos. Na exploração desses conteúdos o programa GEOGEBRAfoi escolhido pelo fato de ter acesso livre na sua utilização e de possibilitar plenamente a realização das atividades propostas.

Com a realização e vivência nesse mini-curso, o professor participante poderá reconhecer como as TICs podem contribuir para a sua formação continuada e que a prática docente pode ser aperfeiçoada e fundamentada com a leitura e reflexão de resultados de pesquisas já realizadas.

Pretende-se envolver os participantes em um contexto de aprendizagem com propostas de problemas, formulação de hipóteses e tomadas de decisão em um diálogo permanente com a realidade de sua prática docente. Além disso, oferecer orientações pedagógicas e promover

discussões sobre os impactos de um ambiente dinâmico no processo de ensino e aprendizagem de conteúdos matemáticos.
As atividades têm por objetivo buscar um aprendizado em matemática que permita ao estudante desenvolver capacidades que caracterizam atos próprios do “fazer matemático” como experimentar, representar, analisar e concluir. Com base nessas reflexões, as atividades devem ser preparadas para que o participante tenha a oportunidade de manipular os objetos na tela a fim de conjecturar, descobrir e formalizar as relações pertinentes ao assunto em estudo.
O GEOGEBRA é um software matemático para o estudo de Geometria, Álgebra e Cálculo. Para tanto, há duas janelas de visualização: a janela algébrica e a geométrica. Cada objeto visualizado na janela geométrica tem sua representação algébrica mostrada na janela algébrica. Ao abrir o software, visualizamos a seguinte tela:




Nela podemos observar as duas janelas: a janela algébrica (à esquerda) e a janela geométrica (à direita).
O mini-curso proposto terá a duração de quatro horas divididas em duas etapas.

**Etapa 1: PRIMEIROS PASSOS**
Nesta seção inicial, temos por objetivo ajudar o participante a se familiarizar com a tela e algumas opções de ferramentas do aplicativo GEOGEBRA.

**OBJETIVOS ESPECÍFICOS**

Após realizar as atividades da Etapa I você será capaz de:
- Abrir uma figura feita com o Geogebra e movimentá-la na janela geométrica.
- Salvar uma figura feita com o Geogebra no local desejado.
- Criar uma figura no Geogebra utilizando as ferramentas Ponto, Ponto médio, Segmento e Polígono.
- Distinguir pontos livres e objetos.
- Utilizar ferramentas de formatos para nomear e colorir figuras.
- Fechar o aplicativo Geogebra.

ATIVIDADE 1 – Conhecendo as ferramentas Geogebra

Inicie o aplicativo Geogebra - preparando uma folha limpa - Na tela há duas janelas: a janela algébrica, do lado esquerdo e a janela geométrica, do lado direito. A janela algébrica pode ser fechada ou aberta clicando na cruzinha x ou na opção Exibir – Janela de álgebra. Feche a janela algébrica.

Na janela geométrica os eixos cartesianos e a malha podem ser exibidos ou escondidos, através da opção do menu Exibir, Exibir–Eixo e Exibir–Malha. Esconda os eixos e a malha.

Na parte inferior da tela do geogebra há uma caixa de Entrada e uma de Comando que podem ser exibidos ou escondidos por meio da opção Exibir–Campo de Entrada. Esconda a caixa de Entrada.

Na parte superior da janela há os ícones com pequenas setas no canto inferior direito que abrem as ferramentas disponíveis. O primeiro botão na barra de ferramentas é utilizado para selecionar e mover objetos.

Sempre que você quiser selecionar um objeto para movimentá-lo ou alterar suas propriedades, esse botão deverá ser acionado.

Criando pontos livres – clique na pequena seta do botão Ponto e escolha a opção Novo ponto. Clique na janela geométrica três vezes em locais diferentes para obter três pontos. Os três novos pontos são pontos livres, pois não dependem de nenhum outro objeto.

Não esqueça de clicar logo em seguida no botão Mover para desativar a ferramenta de criação de pontos.

Para desfazer uma ação, basta escolher no menu superior da janela geométrica a opção Editar – Desfazer. Pode-se refazer o que foi desfeito com a opção Editar – Refazer. Experimente desfazer/refazer a última operação executada anteriormente.

Modificando o aspecto - O aspecto de um objeto pode ser modificado ao se alterar valores de suas propriedades. Após selecionar um objeto (botão Mover), clicando sobre o objeto com o botão DIREITO do mouse pode-se ver um menu de opções. Com a opção exibir rótulo pode-se exibir ou esconder o rótulo com a denominação do objeto. Essa denominação pode ser alterada na opção Renomear. Para deletar o objeto, utiliza-se a opção Apagar.

Na opção Propriedades encontra-se a ferramenta para alterar a cor do objeto. Inicialmente é apresentada uma pequena janela contendo do lado esquerdo todos os objetos que foram criados e do lado direito opções referentes ao objeto que está selecionado. Clicando-se na opção Cor vê-se uma janela com as possíveis escolhas para a cor do objeto e basta clicar sobre a cor escolhida para alterar a cor do objeto.

Selecione um dos três pontos livres e altere as seguintes propriedades: exibir/esconder rótulo, mudar a cor, alterar o rótulo, apagar o objeto.

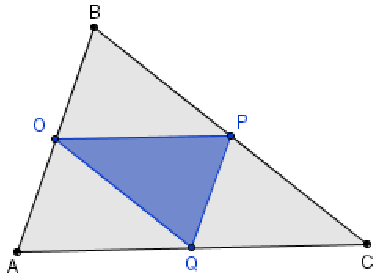
ATIVIDADE 2 – Primeira construção

Exiba o rótulo dos três pontos denominados A, B e C. Movimente os pontos de modo que fiquem não alinhados. Com a ferramenta Segmento definido por dois pontos (uma das possibilidades do botão Reta definida por dois pontos) construa os segmentos AB, AC e BC. Não se esqueça de clicar no botão Mover para desativar a ferramenta de criação de segmentos.

Com a ferramenta Ponto médio ou centro (no botão Novo ponto), construa os três pontos médios:

*O – ponto médio de A e B.*
*P – ponto médio de B e C.*
*Q – ponto médio de A e C.*

*Não se esqueça de clicar no botão Mover para desativar a ferramenta de criação de pontos.*
*Use a ferramenta Polígono para construir o triângulo OPQ.*




*Movimentando e alterando as propriedades dos objetos, obtenha uma figura semelhante à figura abaixo:*

Gravando um arquivo – para gravar a figura construída, basta escolher a opção Arquivo – gravar como, digitar o nome do arquivo Figura1_seunome.ggb e escolher o local onde pretende guardar seus arquivos.
Encerrando o aplicativo – para encerrar o uso do aplicativo basta escolher a opção Arquivo-fechar que encerra o aplicativo Geogebra.
Abrindo um arquivo – inicie o Geogebra e clique sobre Figura1_seunome.ggb no menu Arquivo ou no local que você escolheu para guardá-lo.
Objetos e pontos livres - o triângulo OPQ é um objeto assim como os pontos O, P e Q. Os pontos A, B e C são pontos livres, mas os pontos O, P e Q não são pontos livres, pois foram obtidos por meio de uma construção geométrica (são pontos médios). Cada um desses pontos depende de dois pontos iniciais. Por sua vez, o triângulo OPQ depende da existência dos pontos O,P e Q.

**ATIVIDADES DE EXPLORAÇÃO**

1. Mantendo fixos os pontos A e C, movimente o ponto B e observe que os dois pontos O e P são deslocados acompanhando o movimento de B. Movimente o ponto P. Que parte da figura acompanha o movimento de P? Explique.

2. Movimente os pontos de forma a obter novamente a figura inicial do triângulo OPQ. Selecione o ponto B e arraste-o até ficar alinhado com A e C. Em que ordem ficaram os pontos O, P e Q?
3. Construa o triângulo ABC, utilizando a ferramenta Polígono. Movimente o ponto B, mantendo fixo o segmento AC. Observe os deslocamentos dos pontos O e P. É possível fazer com que todos os seis pontos fiquem alinhados sendo O, P e Q nesta ordem e ao mesmo tempo A, B e C fiquem nesta ordem? Explique.

**Etapa 2: POLÍGONOS**

Na Etapa 2 temos por objetivo capacitá-lo a classificar e construir quadriláteros e utilizar as ferramentas do Geogebra para auxiliar na verificação de conjecturas plausíveis.
OBJETIVOS ESPECÍFICOS
Após realizar as atividades desta parte você será capaz de:
- Fazer construções de diferentes quadriláteros, baseadas nas propriedades que os definem.

- Verificar algumas propriedades relacionadas a quadriláteros com auxílio do Geogebra.

ATIVIDADE – Construindo Quadriláteros

Preparando a figura de base – Inicie o aplicativo Geogebra, abra o arquivo BaseAltura.ggb. A partir da figura contida nesse arquivo serão feitas as 6 primeiras construções dessa atividade. Antes de iniciar cada construção grave a figura com o nome QuadX_seunome.ggb, em que X é o número da construção realizada. Repita esse passo para cada construção.


Construção 1 - construa um quadrilátero ABCD com o lado AB sobre a reta r (veja que o ponto A já está sobre a reta), lado CD paralelo à reta r e com altura relativa ao lado AB igual a h. ATENÇÃO! O único invariante na figura deve ser AB//CD, isto é, ao mover tudo o que é permitido, apenas o paralelismo se mantém.

Construção 2 - construa um quadrilátero ABCD com o lado AB sobre a reta r, lado CD paralelo à reta r, com altura relativa ao lado AB igual a h e com AD//BC. ATENÇÃO! Os dois únicos invariantes na figura devem ser AB//CD e AD//BC.

Construção 3 - construa um quadrilátero ABCD com o lado AB sobre a reta r, lado CD paralelo à reta r, com altura relativa ao lado AB igual a h, com AD//BC e AB $\equiv$ BC $\equiv$ CD $\equiv$ AD. ATENÇÃO! Ao mover tudo o que é permitido mover, os quatro lados do quadrilátero devem ter a mesma medida.

Construção 4 - construa um quadrilátero ABCD com o lado AB sobre a reta r, lado CD paralelo à reta r, com altura relativa ao lado AB igual a h, AB $\perp$ BC e AB $\perp$ AD. ATENÇÃO! Ao mover tudo o que é permitido mover, os ângulos internos do quadrilátero devem ser retos.

Construção 5 - construa um quadrilátero ABCD com o lado AB sobre a reta r, lado CD paralelo à reta r, com altura relativa ao lado AB igual a h, os ângulos internos retos e os quatro lados iguais. ATENÇÃO! Ao mover tudo o que é permitido mover, os ângulos internos do quadrilátero devem ser retos e os quatro lados iguais.

Construção 6 – volta ao início: construa um quadrilátero ABCD com o lado AB sobre a reta r, lado CD paralelo à reta r, com altura relativa ao lado AB igual a h e AD $\equiv$ BC. ATENÇÃO! Ao mover tudo o que é permitido mover, os lados AB e CD devem ser paralelos e os lados AD e BC devem ter a mesma medida.

Construção 7 - prepare uma folha limpa e construa um quadrilátero ABCD com dois pares de lados adjacentes iguais: AB $\equiv$ AD e BC $\equiv$ BD.

ATIVIDADES DE EXPLORAÇÃO

1) Os quadriláteros são polígonos com 4 lados. A seguir listamos as definições dos quadriláteros construídos na Atividade 1. Você poderia associar cada um desses quadriláteros a cada uma das 7 construções?
   1. Trapézio - é um quadrilátero que tem dois lados paralelos.
   2. Trapézio isósceles - é um quadrilátero que tem dois lados paralelos e os outros dois lados com a mesma medida.
   3. Paralelogramo – é um quadrilátero que tem dois pares de lados paralelos.
   4. Retângulo – é um quadrilátero que tem os quatro ângulos retos.

5. Quadrado – é um quadrilátero que tem os quatro lados iguais e os quatro ângulos retos.
6. Losango - é um quadrilátero que tem os quatro lados com a mesma medida.
7. Pipa - é um quadrilátero que tem dois pares distintos de lados adjacentes iguais.

2) Quais afirmativas são verdadeiras? Quais são falsas? Verifique se a conjectura é plausível, isto é, se parece ser verdadeira, usando o aplicativo: abra o arquivo Geogebra correspondente à figura desejada, insira as medidas dos elementos e movimente a figura.
    1. Os lados opostos de um quadrado são paralelos.
    2. Os lados opostos de um losango são paralelos.
    3. Em uma pipa, os ângulos opostos têm a mesma medida.
    4. Os ângulos opostos de um losango têm a mesma medida.
    5. Em um trapézio, as diagonais se cruzam em ângulo reto.
    6. Em um paralelogramo, as diagonais se cruzam em ângulo reto.
    7. Em um retângulo, as diagonais se cruzam em ângulo reto.
    8. Em um losango, as diagonais se cruzam em ângulo reto.
    9. Em um trapézio, os segmentos que ligam os pontos médios dos lados opostos se cruzam em ângulo reto.
    10. Em um paralelogramo, os segmentos que ligam os pontos médios dos lados opostos se cruzam em ângulo reto.
    11. Em um trapézio isósceles, os segmentos que ligam os pontos médios dos lados opostos se cruzam em ângulo reto.
    12. Em um paralelogramo, o quadrilátero determinado pelos pontos médios dos lados do paralelogramo é um retângulo.
    13. As diagonais de um losango são bissetrizes
    14. Os ângulos consecutivos em um paralelogramo são suplementares.
    15. Os ângulos opostos de um paralelogramo são congruentes.
    16. As diagonais de uma pipa se interceptam em ângulo reto.
    17. Em uma pipa, os ângulos formados por lados diferentes são congruentes.

RELEMBRANDO

1) Polígono é uma forma geométrica delimitada por uma linha poligonal fechada.
Uma linha poligonal é uma sucessão de segmentos não alinhados, isto é, que formam ângulos entre si com medidas diferentes de 180 graus. Daí o nome de polígono, que significa “muitos ângulos”, em grego. Os quadriláteros definidos anteriormente são polígonos especiais, porque são convexos. Nos polígonos convexos, os ângulos interiores têm medida menor que 180 graus.
Experimente construir um quadrilátero com um ângulo interno de medida igual a 320 graus. Provavelmente ficará semelhante a uma bandeirinha de festa. Mas há outro tipo de quadrilátero que também não merece os nomes definidos acima: são os polígonos cruzados, formado por uma linha poligonal que cruza a si mesma, se desenhados em uma superfície plana. Quadriláteros como esses mais parecem dois triângulos juntos.
Analise as construções de 1 a 7 e descubra se alguma delas produz com exatidão o quadrilátero desejado (convexo, não cruzado, com “muitos ângulos” internos). Tente construir um losango de forma que possamos mexer na figura, modificando a posição ou o lado, mas sem deixá-lo se transformar em um ponto ou em um quadrilátero cruzado (a isso se chama construção robusta).

QUADRILÁTEROS

1) Um quadrilátero é inscritível em uma circunferência se os 4 vértices desse quadrilátero pertencem a uma única circunferência. É fácil construir quadriláteros inscritíveis: basta escolher seus vértices sobre uma circunferência. Construa cada um dos quadriláteros

definidos anteriormente (paralelogramo, retângulo, quadrado, trapézio, trapézio isósceles e pipa) com os vértices em uma circunferência dada. ATENÇÃO! Primeiro, construa a circunferência, depois os quadriláteros.

2) Construa um quadrilátero qualquer ABCD, em seguida construa o quadrilátero determinado pelos pontos médios dos lados do quadrilátero ABCD. Movimente os pontos A, B, C ou D em várias posições diferentes, mesmo naquelas em que o quadrilátero ABCD deixa de ser convexo, ou torna-se cruzado. O quadrilátero formado pelos pontos médios tem uma forma conhecida? Qual dos 7 quadriláteros definidos acima se parece com ele?
3) Em uma mesma folha limpa, construa duas circunferências c1 e c2, um quadrilátero ABCD inscrito na circunferência c1 e um quadrilátero EFGH com os vértices E, F e G sobre a circunferência c2 e o vértice H fora de c2.

Determine as somas das medidas dos ângulos opostos de cada um dos quadriláteros e verifique se são verdadeiras ou falsas as afirmações:

1) A soma das medidas dos ângulos de um qualquer quadrilátero é igual a 360 graus.
2) A soma das medidas dos ângulos opostos de um qualquer quadrilátero é igual a 180 graus.

## REFERÊNCIAS

CHEVALLARD, Y. *La transposition didactique: du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble, La Pensée Sauvage, 1991.

BALACHEFF, N. *La transposition informatique. Note sur un nouveau problème pour la didactique.* Vingt ans de didactique des mathématiques en France, RDM, La Pensée Sauvage, 1994.

**SOFTWARE DE REFERÊNCIA**

GeoGebra 3.0 - Dynamic Mathematics for Schools: Markus Hohenwarter, 2001-2007
http://www.geogebra.org