



ANÁLISIS DE LOS CUERPOS GEOMÉTRICOS A TRAVÉS DE SUS REPRESENTACIONES

Haydeé Blanco

Argentina

fblanc@fibertel.com.ar

Nivel Educativo: Medio

Palabras clave: visualización, perspectiva, prototipo, socioepistemología.

Resumen

Se presenta en este trabajo una investigación acerca del análisis de las representaciones visuales que realizan los estudiantes de los cuerpos poliédricos en el plano realizando una propuesta de aplicación de geometría dinámica.

El objetivo de esta investigación es indagar de qué factores depende la representación de cuerpos geométricos y explorar la influencia del estudio y aplicación de elementos de perspectiva sobre la visualización de objetos tridimensionales en alumnos de escuela media.

Se realizó en primer lugar, una recopilación de antecedentes e investigaciones orientadas a poner de manifiesto las falencias observadas en el aula de matemática respecto de las representaciones bidimensionales de configuraciones tridimensionales, las cuales se apoyan sobre algún conocimiento de la geometría bidimensional y los motivos por lo que estas habilidades no se han desarrollado y que traen aparejados muchos inconvenientes en el momento de tener que aplicarlos a situaciones que involucren manejo geométrico.

Los resultados obtenidos muestran evidencias de un acercamiento a soluciones que permitan a los alumnos lograr estos objetivos y, respecto de los profesores, que comprendan la necesidad de enseñar geometría tridimensional basándose en aquellos conceptos que lleven al alumno a manejarse correctamente con los conocimientos matemáticos, evitando en lo posible las dificultades actuales.

Objetivo

Indagar de qué factores depende la representación de cuerpos geométricos y explorar la influencia del estudio y aplicación de la perspectiva sobre la visualización de objetos tridimensionales en alumnos de escuela media.

Este trabajo se basa en la **visualización**, ya que se intenta un análisis de las representaciones visuales que realizan los estudiantes de los cuerpos poliédricos en el plano, a través de algunas propuestas de aplicación.

Marco teórico

Muchos investigadores han realizado reflexiones acerca de la visualización en el aula de matemática desde diversos marcos teóricos y en relación a distintos contenidos de la matemática.

En este trabajo, nos centraremos en las representaciones que se realizan de cuerpos geométricos tridimensionales y vamos a presentar algunas de ellas, teniendo en cuenta en el análisis de las distintas concepciones acerca de la visualización, la doble interpretación del concepto: como un proceso mental de formación de imágenes y como una competencia deseable para obtener conocimiento matemático.

Presmeg (1986) sostiene:

“El currículum escolar de matemáticas, en el que el logro es medido a través de los resultados de los exámenes, favorece al pensador no visual y, en la mayoría de los salones de clase, la enseñanza enfatiza los métodos no visuales”.

Los trabajos de **Vinner** (1989) y **Eisenberg** y **Dreyfus** (1990) hacen mención de la reticencia por parte de los estudiantes del uso de consideraciones visuales.

Consideran que prevalece el pensamiento algorítmico sobre el visual.



Bishop (1985) habla de “ayudas visuales” no de imágenes visuales ya que la habilidad de interpretación de información aparece expresada en general y apartada del procesamiento visual. No se indica la transformación de información obtenida en forma simbólica en alguna forma de información gráfica. Menciona a la computadora como importante en dicho proceso.

Las primeras explicaciones teóricas sobre las representaciones gráficas de cuerpos geométricos consistían en argumentos cognitivos resultado de las experiencias de aula.

Vinner (1983) y **Tall** (1996) crearon los términos *imagen del concepto* y *definición del concepto* para explicar cómo el estudiante usaba dichas imágenes para resolver problemas. Tenemos tres elementos: *la imagen del concepto, la definición del concepto, un grupo de operaciones mentales*

Algunos aspectos en el aprendizaje de la Geometría. El espacio en la escuela

Reflexionando sobre cómo aprende geometría un niño, vemos que lo hace experimentando e interactuando con su entorno.

Según **Alsina** (1992), el conocimiento del espacio geométrico considera dos instancias: la correspondiente a la intuición: *etapa intuitiva* y la de naturaleza verbal: *etapa lógica*.

En la etapa intuitiva: se dan tres momentos:

La *percepción y visualización* a través de la construcción del espacio geométrico a partir de su entorno.

La *manipulación* a través de la modelización de percepciones con el manejo de materiales didácticos.

El *descubrimiento y enunciación de conjeturas*, a través de la apreciación de regularidades, propiedades.

En la etapa lógica: se dan dos momentos:

La *validación y comunicación*, a través de la demostración y comunicación de sus conjeturas.

La *relación*, a través de la posibilidad de expresar un mismo concepto de formas diferentes.

Pallascio (1985), considera cinco niveles: *visualización, estructuración, traducción, determinación y clasificación*.

Visualización: después de haber observado un objeto, radica en memorizar imágenes parciales a fin de reconocer objetos iguales o semejantes a través de un cambio de posición o de escala, entre un conjunto de objetos ante un mismo diagrama.

Estructuración: una vez visualizado el objeto, la estructuración reside en el reconocimiento y reconstrucción del objeto partiendo de sus elementos básicos.

Traducción: se basa en el reconocimiento de un objeto a partir de una descripción literaria y viceversa.

Determinación: reside en el reconocimiento de su existencia partiendo de la descripción de sus relaciones métricas.

Clasificación: reside en el reconocimiento de clases de objetos equivalentes de acuerdo a distintas pautas de clasificación.

Desarrollo del pensamiento geométrico y visualización

Los estudiantes presentan serias dificultades con las representaciones visuales de los cuerpos poliédricos en el **plano** (por ejemplo: cubos o pirámides). Estas dificultades también se reflejan en actividades en las que deben poner en juego la visualización de propiedades geométricas de cuerpos representados o bien de cuerpos que deben imaginar.

El **paradigma de la enseñanza** que sigue el **sistema educativo argentino**, está centrado fundamentalmente en un enfoque axiomático deductivo y en la resolución de problemas que en muchas oportunidades se orientan a lo algorítmico.

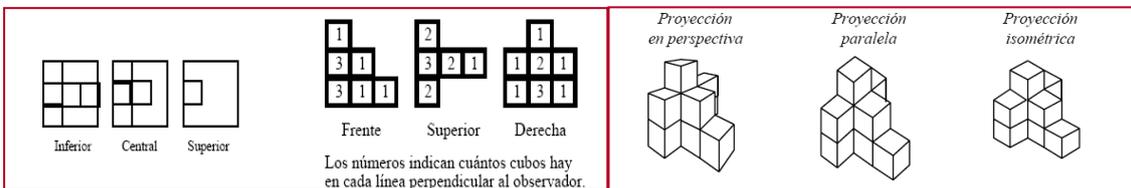
Como ninguna de las representaciones planas de cuerpos geométricos que realizan los alumnos corresponde por completo a la realidad, es útil que pueda manipular varias para utilizar la más conveniente en cada caso.

Parszyz (1988) se refiere a la existencia de distintos niveles de representación de cuerpos geométricos, a los que les corresponden distintas cantidades de información perdida.

El **primer nivel** corresponde a la representación de cuerpos tridimensionales en madera, cartulina o varillas. En estos casos se pierde información.



El **segundo nivel**, según Parszyz, corresponde a las representaciones bidimensionales.



Debemos tener en cuenta que la información que se mantiene se debe al hecho de compartir determinados códigos, pues determinados datos objetivos se traducen siempre de la misma manera.

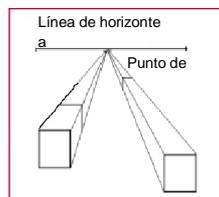
Parszyz (1988) lo denomina “restitución del significado”. De no conocerse los códigos se tendría una lectura equivocada de las representaciones planas.

Construcción utilizando la Proyección Paralela o Perspectiva Cavalieri



Cubo - Proyección en Perspectiva con 1 punto de fuga.

Construcción utilizando la proyección en Perspectiva con Puntos de Fuga



Cubo - Proyección en Perspectiva con 1 punto de fuga.

Cómo evoluciona la habilidad del dibujo en perspectiva

Mitchelmore (1976, 1980) describe el desarrollo de la habilidad de representación en perspectiva y propone cuatro etapas.

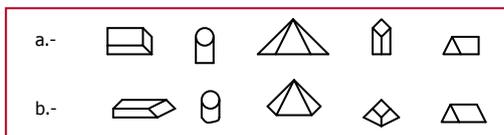
Etapas 1: Esquemática plana. Se representan las figuras dibujando una de sus caras ortogonalmente.



Etapa 2: Esquemática espacial. Las figuras se representan dibujando varias de sus caras orthogonalmente y a veces incluyendo caras ocultas.



Etapa 3: Pre-realista. Se muestran intentos de representar los cuerpos de una manera realista y dotarlos de profundidad, aunque sin lograrlo.



Etapa 4: Realista. Los dibujos siguen aproximadamente las reglas del dibujo en perspectiva, en particular las que aluden a las líneas que convergen en un punto del infinito (Gutiérrez, 1998).



La herramienta tecnológica como recurso para las representaciones gráficas

En opinión de **Trouche** (2005):

A lo largo de la historia las herramientas han provocado cambios en el terreno educativo, e incluso en el de los matemáticos profesionales. La aparición de las calculadoras y computadoras en la clase de matemática, no responden a una necesidad de este sector educativo, sino que forman parte de una evolución de las herramientas más general.

Principal hipótesis de trabajo

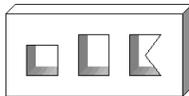
Influencia de los prototipos

En las clases de Geometría, tratando de mejorar la comprensión de los conceptos enseñados, se dan ejemplos modelizadores de esos conceptos (figuras tipo o **prototipos**), que si bien son necesarios, tienen sus ventajas y desventajas (**Hershkowitz**, 1990).

Experiencia con alumnos

Dadas las dificultades observadas en cuanto a la representación gráfica de cuerpos geométricos en el plano, se realizó una experimentación con alumnos de 4° año especialidad bachiller (con nociones de perspectiva) y 4to año especialidad comercial (sin nociones de perspectiva) para evidenciar los problemas existentes. Se les pidió lo siguiente:

1. Dibuja un cubo
2. Dibuja una pirámide
3. Veamos ahora una tablilla con 3 agujeros: uno cuadrado, otro rectangular y otro con el formato indicado en la figura.



Un tapón para tres orificios

Resultados de la experimentación

- se notan influencias de prototipos "diestros" y "zurdos"
- "aprenden" las representaciones prototípicas
- estrategia que había resultado exitosa en el caso del cubo, no lo fue en el caso de la pirámide
- el que los estudiantes tuvieran conocimientos previos de nociones de perspectiva, ayudó a la obtención de mejores resultados.

Representando poliedros en el aula

La realización de figuras planas es para los estudiantes problemática.

Para obtener una buena representación, ésta debe transmitir al que observa igual cantidad de información que el cuerpo tridimensional que representa (**Gutiérrez**, 1998).

Se diseñaron algunas actividades que se pusieron en práctica en el aula y que a continuación se describen y reportan.

Una experiencia en el inicio del estudio de los poliedros utilizando material concreto

Se eligió un aula de **1° año** para la realización de esta experiencia. No poseen experiencia previa en la representación de cuerpos geométricos en el plano.

La experiencia constó de **siete etapas**, que no se realizaron en el mismo módulo de clase, debido al tiempo que insumieron.

Primera etapa

Se propuso al curso, separado en grupos de 4 o 5 integrantes, la construcción de figuras tridimensionales cerradas y limitadas por polígonos con distintos materiales: plastimasa, sorbetes, cartulina, maderitas, etc. Cada grupo trabajó con distinto material.

Respondieron:

- ¿Cuáles son sus elementos?
- ¿Qué características tienen?
- ¿Qué dificultades encuentran para poder construirlos?

Representación con materiales concretos (1° nivel de **Parszyz**) (1988).

Segunda etapa

En nuestra experiencia en el aula, al realizar en clase el cubo de la figura formado por varillas y pedirles a los alumnos una representación del mismo, uno de los estudiantes, espontáneamente utilizó su teléfono celular para fotografiarlo y así obtener la representación pedida. Representación en perspectiva (2° nivel de **Parszyz**).

Definición de poliedro
Pallascio (1985)

visualización
estructuración



Tercera etapa

Se avanzó respecto de la visualización para trabajar la traducción y determinación. (**Pallascio**)

Se orientó a lograr comunicar y organizar las ideas; lo que habilitó el camino para lograr clasificaciones.

- *Describa un poliedro de diferentes maneras.*
- *Coteje su descripción con las de sus compañeros.*
- *Proponga una descripción de un poliedro y solicite a un compañero que lo construya.*

Cuarta etapa

Se les pidió a los alumnos que trataran de descubrir regularidades respecto de los elementos del poliedro: caras, vértices, aristas, etc. El descubrimiento de regularidades permitiría elaborar distintos criterios de clasificación de poliedros.

Se les propuso:

- *Existen poliedros convexos y poliedros no convexos.*

Y se les preguntó:

- *¿A partir de qué observaciones pueden descubrirse estas regularidades?*

Quinta etapa

Nuevamente se insistió en la elaboración de conjeturas a partir de regularidades. Nuestro objetivo era lograr trabajar la fórmula de Euler para poliedros convexos.

- *Cuente vértices, caras y aristas del poliedro que construyó y trate de relacionar estas cantidades.*
- *¿Cómo podría probar esa relación, que se denomina fórmula de Euler vinculada a los poliedros convexos?*

Sexta etapa

Sobre los logros obtenidos en esta etapa intuitiva se debe desarrollar la etapa lógica, caracterizada por la validación de conjeturas por parte del alumno a partir de la percepción espacial.

Se propuso la construcción de poliedros con caras regulares congruentes en los que en cada vértice concurrían el mismo número de aristas. Para ello se les dio a cada grupo plantillas para construir uno de los cinco poliedros regulares.

Se les dijo a los alumnos que recibían el nombre de poliedros regulares y se conjeturó que no era posible que existieran otros.



Séptima etapa

En un intercambio con los alumnos de 4to Bachiller, los alumnos de 1º que estaban participando de la experiencia visitaron el laboratorio de informática en el que alumnos de 4º habían programado representaciones en perspectiva de cubos. Los alumnos de 4º les mostraron cubos en distintas posiciones.

Entre los de 1º año, surgieron las siguientes observaciones por parte de ellos:

- *Vemos a los poliedros con más posiciones diferentes sobre la pantalla, que sobre los libros de texto.*
- *Es como tener muchas fotos de los cubos.*
- *Vemos fotos de todas las partes, aún de lo que está atrás.*



Una experiencia con alumnos, utilizando geometría dinámica para representar gráficamente poliedros

En esta experiencia se trabajó con un grupo de alumnos de 4° año Bachiller, fuera del horario de la asignatura matemática, en la clase de computación.

Tienen buen manejo de las herramientas informáticas y habían recibido nociones de utilización del software Cabri Géomètre.

Primera etapa

Comenzamos la experimentación, indicando a los alumnos que construyeran un cubo.



Esta representación se encuentra en Perspectiva Cavalieri o Paralela, aunque no es la manera usual en que la hacemos con lápiz y papel.

Segunda etapa

Comenzamos esta etapa, indicando a los alumnos que construyeran nuevamente un cuadrado. Esta construcción corresponde a una Perspectiva con un punto de fuga.

Al mover el punto elegido sobre el horizonte, los alumnos observaron la manera en la que se transforma la representación del cubo.

Tercera etapa

Con instrucciones similares a las anteriores, solicitamos a los alumnos que construyeran la representación de un cubo a partir de dos puntos sobre el horizonte (perspectiva con dos puntos de fuga). No sólo se obtuvieron prototipos, sino que fue posible observar el cubo en distintas posiciones, favoreciendo a un conocimiento real del mismo.

Algunos comentarios de las experiencias realizadas

Consideramos que a través de este tipo de actividades en las que el alumno combina representaciones con materiales concretos y geometría dinámica, es posible que el estudiante **rompa los obstáculos clásicos** del manejo de representaciones de cuerpos en el espacio, ya que puede lograr ampliar la manera en la que logra visualizarlos.

Acerca de cubos y sus representaciones. Reporte de una entrevista a una estudiante

Por último se realizó una entrevista a una estudiante adulta, intentando indagar acerca de sus opiniones y visión acerca de las representaciones planas de los cuerpos geométricos. Es estudiante de un postítulo de Especialidad en Informática Educativa y su título de base es Profesora de Biología. Esta alumna está aprendiendo a manejar ciertos elementos de geometría dinámica con Cabri en la asignatura Recursos tecnológicos aplicados a la enseñanza de las ciencias. Se observó:

- En el comienzo de la entrevista se pusieron de manifiesto las ideas de **Fischbein (1993)** al plantear la diferencia entre un objeto geométrico y su representación.
- La utilización de los **prototipos**, los cuales tienen mucha influencia en el aprendizaje de los alumnos, ya que van incorporando ciertas figuras como únicas, o casi únicas. Vemos que la influencia de libros y docentes no es solamente un factor didáctico, sino que también es social.

Tras realizar la estudiante las representaciones con Cabri, observamos su influencia en la comprensión de las representaciones planas con uno y dos puntos de fuga:

El **papel del Cabri**, si bien fue importante debido al aprovechamiento de la potencialidad de la geometría dinámica, se redujo a su uso como una herramienta.

Hemos detectado con claridad el peso de las **representaciones prototípicas** y la fuerte influencia de su **carácter social**.



Principales resultados

En esta investigación, se detectaron inicialmente por parte de los alumnos grandes dificultades en la representación de cuerpos geométricos al intentar describir y argumentar las características de los cuerpos y sus propiedades.

La experimentación llevada a cabo inicialmente, puso de manifiesto las falencias observadas en el aula de matemática respecto de las representaciones bidimensionales de configuraciones tridimensionales, las cuales se apoyan sobre algún conocimiento de la geometría bidimensional y los motivos por lo que estas habilidades no se han desarrollado y que traen aparejados muchos inconvenientes en el momento de tener que aplicarlos a situaciones que involucren manejo geométrico. Las dificultades se manifestaron sobre todo en estudiantes que no habían tenido acceso previamente a nociones de perspectiva a través del dibujo técnico. En los resultados obtenidos, fue posible detectar la presencia de prototipos de representaciones de cuerpos tridimensionales, tanto para cubos como para pirámides.

También se evidenció en esta experimentación intentos de los estudiantes para transferir la manera en la que representan un cubo a la representación de pirámides. Estos intentos no fueron exitosos, ni pudieron los alumnos darse cuenta de sus errores al respecto por no poseer una buena imagen mental de las pirámides.

Los alumnos tienen problemas en el diseño e interpretación de representaciones planas de cuerpos geométricos tridimensionales. Esto podría estar reflejando la poca importancia que se da a la geometría, en particular a la tridimensional, en la escuela.

Tenemos imágenes mentales incorporadas para la representación de cuerpos matemáticos en el plano. Al oír la palabra “cubo”, visualizamos una imagen que se une al prototipo que se utilizó en la escuela o en los libros de texto. Esa imagen mental es evocada por la palabra “cubo” y así se puede visualizar al mismo y sus características. Para lograr el concepto de “cubidad”, será necesario conocer y ser capaces de imaginar y visualizar al cubo en cualquier posición, pudiendo así conocer todas sus propiedades y siendo capaces de utilizar la visualización en sus dos interpretaciones, como proceso mental y como competencia para construir conocimiento.

En la forma en que se construyen las representaciones planas de poliedros, se pone de manifiesto la influencia de lo didáctico y lo social a través de las representaciones prototípicas que se realizan en la escuela. En cada escenario se van construyendo formas de representar que son asumidas por los actores del mismo.

En el uso de prototipos es posible identificar un aspecto didáctico a través de su utilización con el fin de transmitir conocimiento por parte de libros de texto y docentes, su carácter social se evidencia en que nuestra sociedad ha asumido el uso de algunos como correctos y estandarizados, por otra parte, su influencia cognitiva se manifiesta en la influencia que tiene en la formación de imágenes mentales.

Pensamos que es necesario que los estudiantes aprendan a dibujar y a leer las representaciones planas de cuerpos tridimensionales, para poder comprender la geometría espacial y facilitar la comprensión de materias como el Cálculo Diferencial e Integral, donde los alumnos encuentran serias dificultades no sólo en la escuela media sino también en la enseñanza superior. Observamos, como se muestra en las experiencias realizadas en esta investigación que resulta muy trabajoso este proceso no sólo con cuerpos que deben representar sino también con cuerpos que deben imaginar.

Tratamos con esta investigación de ir acercándonos a soluciones que permitan a los alumnos lograr estos objetivos y, respecto de los profesores, que comprendan la necesidad de enseñar geometría tridimensional basándose en aquellos conceptos que lleven al alumno a manejarse correctamente con los conocimientos matemáticos, evitando en lo posible las dificultades actuales.

Para lograr este objetivo pueden no sólo utilizar el dibujo manual, sino también el trabajo a partir de materiales concretos, la utilización de recursos tecnológicos como las fotografías y programas con las potencialidades de la geometría dinámica.



Los estudiantes que aprenden formas de representar cuerpos geométricos a través de la geometría proyectiva, si bien pueden reconocer su importancia en relación a la proximidad con la manera en la que ven los objetos, muestran preferencias por aquellas que se asemejan a las que construyeron con anterioridad.

A partir de la entrevista presentada al final, podría respaldarse la idea de que las representaciones planas que surgieron a través de la historia del arte muestran también a las mismas como una construcción social. Por ejemplo, si aceptamos esto, las culturas que no tuvieron representaciones que permitieran ver la idea de profundidad, como los egipcios, los mayas o los chinos, no podrían verse como representaciones imperfectas de la realidad, como a veces se han considerado. Sino que podría pensarse que ellos fueron capaces de interpretar a través de las mismas la idea de profundidad y otras características tridimensionales pues respondían a prototipos de representación que habían construido. A nosotros nos parecen planas porque nuestras representaciones pictóricas ya han incorporado elementos proyectivos que nos permiten visualizar el espacio de manera distinta. Esta visión permitiría comprender a las representaciones planas de objetos tridimensionales como construcciones socioculturales. En un escenario como el actual, en el que la tecnología ha cobrado cada vez un papel más central y en el que nuestros alumnos ven a la velocidad de los avances tecnológicos actuales como algo natural, consideramos que es imprescindible el aprovechamiento en el aula de todos los recursos a nuestro alcance para poder obtener mejores modos de visualización de los cuerpos geométricos.

Referencias Bibliográficas

- Alsina, C. (2005). Los secretos geométricos en diseño y arquitectura. En *Curso Interuniversitario Sociedad, Ciencia, Tecnología y Matemáticas*.
- Bishop, A. J. (1992). Implicaciones didácticas de la investigación sobre visualización. *Antología en Educación Matemática*. México: Cinvestav. (pp. 29-42).
- Eisenberg, T. y Dreyfus, T. (1990). On the Reluctance to Visualize in Mathematics. In Zimmermann W. & Cunningham S. (Eds), *Visualization in Teaching and Mathematics* (pp. 25-37), MAA Series. USA.
- Fischbein, E. (1993). The Theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, pp. 139-162.
- Gutiérrez A. (1998). Las representaciones planas de cuerpos 3-dimensionales en la enseñanza de la Geometría espacial. *Revista Ema*. Vol. 3, N° 3, 193-220.
- Hershkowitz R. (1990). Psychological aspects of learning geometry. En Nasher, P. y Kilpatrick, J. (ads.). *Mathematics and cognition: A research síntesis by the Internacional Group for the psychology of mathematics education*; pp. 70-95; Cambridge, Cambridge U.P.
- Mitchelmore, M. C. (1980). Prediction of developmental stages in the representation of regular space figures. *Journal for Research in Mathematics Education*, 11 (2), 83-93.
- Mitchelmore, M. C. (1983). Geometry and spatial learning: Some lessons from a Jamaican experience. *For the Learning of Mathematics*, 3 (3), 2-7.
- Parszyz, B. (1988). Knowing vs. seeing. Problems of the plane representation of space geometry figures. *Educational Studies in Mathematics*, 19, 79-92.
- Presmeg, N.C. (1986). Visualization in high school mathematics. En *For the learning of mathematics*. Vol 6; (3) pp. 42-46.
- Tall, D. (1996). Functions and calculus. En A. L. Bishop et al. (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 289-325). Netherlands: Kluwer.
- Trouche, L. (2005). Calculators in mathematics education: A rapid evolution of tools, with differential effects. En D. Guin, K. Ruthven y L. Trouche (Eds.), *The Didactical Challenge of Symbolic Calculators. Turning a Computational Device into a Mathematical Instrument* (pp. 9 - 39). New York, U.S.A.: Springer.



- Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of mathematics education, science and technology* 14 (3), 293 – 305.
- Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking*; Mathematics Education Library.