¿ATOLONDRADOS POR PI?

Patricia Eva Bozzano,
UNLP, Liceo Víctor Mercante, La Plata, Buenos Aires, Argentina.
pateboz@yahoo.com.ar
Nivel educativo: ESB-ESS.
Palabras clave: PI, aproximación, irracional

Resumen

En épocas, donde se acentúa más la falta de interés por parte de los alumnos y la necesidad de nuevas ideas *motivadoras* por parte de los docentes, llegada la hora de introducir temas como campo numérico: conjunto de números irracionales, conjuntos infinitos, serie y sucesiones, limites infinitos, algoritmos, expresiones algebraicas y trascendentes; como también, calculo de longitudes de circunferencia y áreas correspondientes a los círculos; un buen camino que lleve a atrapar el interés de los alumnos podrá ser el uso de la historia, elemento esencial para la construcción del concepto de numero, más aún, para la construcción tanto de la idea de numero irracional, su evolución y situación actual, como también la de conjuntos. Desde Arquímedes hasta Ramanujan; desde Aristóteles hasta Cantor. El mismo camino, debería contar con las aplicaciones de tan importante concepto: número de infinitas cifras decimales no periódicas, para la tecnología actual, y su protagonismo para el desarrollo, por ejemplo, en microprocesadores cada vez más veloces, placas de video con calidad que va superándose año a año, etc. Sobre estos últimos temas, son los alumnos quienes pueden darnos clases al respecto. Así, el objetivo que se pretende alcanzar es incluir el presente y el futuro, en estos últimos aspectos, con el pasado. Hasta en lo artístico se encuentran propuestas integradoras que provoquen el despertar del interés por parte del alumno, la literatura por un lado; por otro, la cinematografía. Algunas de ellas incluidas en este trabajo.

Introducción

“El progreso material de los hombres depende de las investigaciones abstractas o científicas del presente, y será a los hombres de ciencia, que trabajan para fines puramente científicos sin pensar en la aplicación práctica de sus doctrinas, a quienes deberá la Humanidad su desarrollo material en tiempos futuros… Cuando el matemático efectúa sus cálculos o busca nuevas relaciones entre los números, no busca la verdad para fines utilitarios. Cultivar la ciencia por su utilidad práctica, inmediata, es desvirtuar el alma de la propia ciencia… Conviene no olvidar que la matemática, aparte de su objetivo de resolver problemas, calcular áreas y medir volúmenes, tiene finalidades mucho más elevadas. Por tener tan alto valor en el desarrollo de la inteligencia y del raciocinio, la matemática es uno de los caminos más seguros para llevar al hombre a sentir el poder del pensamiento, la magia del espíritu… sin el sueño y la fantasía, la ciencia se envilece. Es ciencia muerta…”1 (Tahan Malba, (1996). *El hombre que calculaba.* Buenos Aires, ABRN prod.graficas, 187 páginas).

“Pi o el gran enigma circular.

Soy y seré a todos definible
mi nombre tengo que daros
cociente diametral siempre inmedible
soy de los redondos aros.”

de Manuel Golmayo

Un poema de fuerte contenido numérico: contando las letras de cada una de sus palabras, se obtienen las primeras veinte cifras de Pi. Aquí se presenta una de las relaciones entre literatura y matemática, como primer intento de despertar el interés para alumnos de nivel ESB, donde se les muestra que el famoso símbolo π es mucho más que la escasa representación 3,14 utilizada para cálculo de áreas de círculos como para longitud de circunferencias. A partir de esto, se efectúan preguntas disparadoras para despertar la curiosidad:
-¿Por qué el número tendrá nombre?
-¿Por qué se llama de ese modo?
-¿Por qué sólo usábamos tres cifras?

El objetivo, en todo momento, es motivar para: conocer, aprender, cuestionar, reflexionar.
Luego de esto, se los introduce a la idea de números "distintos", los correspondientes conjuntos numéricos; y hasta es posible, como lo he comprobado con experiencias, introducirlos al concepto de conjuntos infinitos y transfinitos. Proporcionar nuevos conceptos a partir de la integración con otras áreas, resulta para los alumnos, un aporte distinto a todo aquello a lo que están acostumbrados para aprender matemática. Como indica las experiencias y expectativas de estos últimos años, es necesario innovar para mejorar el desarrollo de las actividades de enseñanza-aprendizaje. Por tal motivo, el uso de la historia, los juegos, los desafíos, la integración con otras áreas, y que no falte: los usos en la actualidad, son elementos a tener en cuenta para lograr el objetivo: despertar interés y motivar.

Dando respuesta a los interrogantes:

¿Qué es Pi? Π es la letra griega que representa el cociente entre el perímetro de una circunferencia y la longitud de su diámetro. Perímetro proviene del griego perimetron: "medida alrededor", y diámetro del vocablo griego diametron: "la medida a través"

Haciendo un poco de historia:

Los egipcios y los babilonios resolvieron problemas específicos mediante métodos también específicos, pero nunca intentaron establecer reglas generales. En particular, los babilonios utilizaron para pi el muy groseramente aproximado valor 3. De igual manera, los antiguos hebreos daban a pi el valor 3, como se puede comprobar en el Cap.4 del 2º Libro de Crónicas, segundo versículo, en donde se describe un recipiente de forma circular en el Templo de Salomón. En uno de los más antiguos textos matemáticos, el Papiro de Rhind, siglo XVII antes de Cristo, los egipcios registraron una regla para calcular el área de un circulo con un valor asignado a pi de $(16/9)^2$: 3,16049…
Después vinieron los griegos, quienes buscaban arduamente lo general y creían que las formas matemáticas tienen ciertas propiedades naturales que son eternas e inmutables. Por ejemplo, Arquímedes de Siracusa, siglo III antes de Cristo, empleo un método, precursor directo del cálculo integral, para el cálculo de Pi, llamado "método de exhaucion". Consistía en inscribir y circunscribir polígonos regulares en un circulo de diámetro unidad; los perímetros de los polígonos inscriptos y circunscriptos servían de cota superior e inferior para el valor Pi; valiéndose de polígonos de 96 lados determino que Pi estaba comprendido entre 3+10/71 y 3+1/7 o 22/7!!
En el año 120, el matemático chino Chang Hing llegó a la relación 142/45(3,1555...). En la India, año 500, el matemático Aryabhatta propuso la relación 62832/20000(3,1416).
En Europa, se comenzó a obtener mejores resultados, a partir del siglo XVI. En el año 1593, Viete dedujo una serie infinita de fracciones "Serie de Vieta", que empleo para calcular Pi con 17 decimales. Allá por el 1600, el matemático ingles Oughtred empleo la letra griega π por primera vez, pero lo hizo para asignar con esa letra al perímetro de la circunferencia. En cambio, Euler, en el año 1737, utilizo el símbolo para asignar el cociente entre el perímetro de la circunferencia y la longitud de su diámetro. La demostración que Pi es un número irracional,

se le debe al matemático alemán Lambert, quien lo logro en el año 1761; el valor verdadero solamente se puede expresar como serie infinita. Como los pitagóricos desarrollaron la demostración de que la raíz cuadrada de 2 es un número irracional, sucedió de igual manera con Pi. Que Pi es un número trascendente (son números que salen del ámbito de las operaciones del algebra, son no algebraicos; solo pueden ser raíces de expresiones trascendentes), se debe a la demostración realizada por el matemático Lindemann en 1882, su trabajo se basa en la imposibilidad de la “cuadratura del círculo”.
¡¡¡ $e^{\pi\sqrt{163}}$ es un número entero!!! El matemático indio Srinivasa Ramanujan. Nacido en 1887 en el seno de una familia venida a menos, conjeturo con cálculos manuales la anterior afirmación. La importancia de mencionar dicho matemático, se basa en mostrar a nuestros alumnos, que hasta en situaciones nada favorables para una persona, con obstáculos sociales, económicos y de salud; la tenacidad, el tesón y esfuerzo, la constancia y dedicación, y el gusto por lo que se hace, abre caminos inesperados en la vida de cualquier persona. NOTA BIOGRAFICA: Este genio matemático indio, ideó métodos de extraordinaria eficacia para calcular Pi, que en la actualidad rinden millones de cifra decimales. Contando solo con dos libros: Tratado de trigonometría de Loney y Sinopsis de resultados Elementales en Matemática pura, recopilación del Prof. Carr de Cambridge; para constituir su formación matemática básica; pues, en dos oportunidades, fracaso en los exámenes de centros de estudio formales, logró el desarrollo de toda su obra. En 1913 estableció contacto con el matemático ingles Hardy a través de correspondencia, mediante la cual le hizo llegar un conjunto de formulas y teoremas. Luego, Hardy y su amigo, el matemático Littlewood, concluyeron que tenían ante sí la obra de un genio, puro talento. Finalmente, Hardy invito a Ramanujan a Cambridge, quien se incorporo en 1914; durante cinco años trabajaron codo a codo en el Trinity College, publicaron en colaboración una serie de trabajos; y en 1917, Ramanujan fue admitido como miembro numerario de la Royal Society de Londres y del Trinity College. A medida que crecía su importancia, su salud se deterioraba, en 1919 regreso a la India convertido en ídolo de los jóvenes intelectuales; murió allí en 1920 con un diagnostico de tuberculosis.
Se encuentra en la obra de Ramanujan los ingredientes básicos de los algoritmos iterativos para el cálculo de Pi mediante ordenadores. Se demuestra que los algoritmos de tipo Ramanujan para la determinación de valores aproximados para pi se hallan muy cerca de los óptimos posibles.
¿Cuál es el ingrediente que posee esta información para atrapar el interés de nuestros alumnos? Pues bien, las empresas fabricantes de microprocesadores: AMD, INTEL, CELERON, VIA, IBM, etc; utilizan los algoritmos iterativos tipo Ramanujan, para obtener productos cada vez más veloces. Un microprocesador es mejor para las exigencias del mercado, si es capaz de generar la mayor cantidad de cifras de Pi, en el menor tiempo. Y ahí entra el interés de nuestros alumnos: Sus computadoras, celulares, reproductores de audio y video, consolas de video juego (NINTENDO WII, PLAY STATION, etc.) son hoy, el producto que son, gracias a brillantes mentes de personas no tan distintas a ellos mismos, como muchos erróneamente creen. Todos los hombres mencionados en esta breve reseña histórica, han sido personas NO con capacidades especiales e irrepetibles, todo lo contrario, han efectuado su trabajo con esfuerzo y dedicación, paciencia y sobre todo con pasión.
Si en la actualidad, gracias toda esa tecnología de los microprocesadores, se sostiene la conjetura que Pi contiene infinitas cifras decimales no periódicas, cabe mencionar que tipo de conjunto infinito seria; pues la obra del matemático Cantor (1856-1918) define distintos tipos de conjuntos infinitos refiriéndose a su cardinal. El conjunto de todos los números naturales posee el mismo cardinal que el conjunto de todos los números enteros, por ejemplo; esos conjuntos son llamados “numerables”, ¿la misma clasificación le corresponde al conjunto de cifras no enteras de Pi? ¿Estaremos ante el caso de la unión de una familia de conjuntos numerables, la cual resulta ser un conjunto numerable? Por el otro lado, Cantor demostró que el conjunto de todos los números irracionales tiene un cardinal superior al de los conjuntos numerables, o sea, Pi pertenece a un conjunto de infinitos elementos, un conjunto infinito “no numerable”. Más aún,

llegó a demostrar que el conjunto de números irracionales (que tiene una partición: los números irracionales algebraicos y los números irracionales trascendentes), es un conjunto no numerable igual que el conjunto de los números reales, ¡el total igual a una de sus partes! Dichos conceptos, tan revolucionarios en el ámbito matemático como lo fueron las geometrías no euclideanas (geometría hiperbólica: la circunferencia de cualquier circulo tiene un perímetro mayor que π veces el diámetro; geometría elíptica: la circunferencia de un circulo es siempre menor que π veces su diámetro), tuvo sus detractores, quienes sostenían como únicas las ideas sobre el infinito establecidas en la antigüedad por Aristóteles y su "infinito potencial".
Si nos proponemos hallar una relación entre Pi, su hallazgo, evolución e importancia a través de la historia; y lo mismo para la teoría de conjuntos transfinitos; ambos, además de tener relación con respecto a los conceptos, definiciones y consiguiente clasificación, están envueltos en un halo de misterio (podríamos decir) que lo rodea acompañado por sorpresa y hasta resistencia. No muchas veces, le presentamos a nuestros alumnos, un tema que les resulte desafiante y con las características antes enumeradas; y si sumamos a esto la posibilidad que cuestionen para luego acceder a las conclusiones correctas, haciendo un recorrido por todas las etapas, en la forma más sintética posible, que ha atravesado el objeto de estudio; podríamos decirnos estar en el camino de atrapar el interés de los alumnos, entusiasmarlos a descubrir y hacer, investigar y hasta desarrollar ideas, solo por el placer de hacerlo, como muchos de los matemáticos aquí mencionados lo han hecho.

Actividades propuestas:

Nivel: a partir de 1º año de ESB.

1. Problema original egipcio, siglo XIX antes de Cristo, tomado del Papiro de Rhind:
"Tomar el diámetro. Restar la novena parte. De esta diferencia nuevamente la novena parte y restar de la anterior. Multiplicar el resultado por el diámetro. Tal es el área del circulo."

2. En la antigüedad, el matemático griego Eratostenes (siglo III antes de Cristo), con el método de determinación de ángulos entre paralelas, conociendo la distancia entre dos puntos (Siena-Alejandría), y con una simple regla de tres, determinó la longitud de la circunferencia máxima de la Tierra. Obtuvo el equivalente a 40.200 km. Calcular el radio terrestre, utilizando tres valores distintos e históricos de Pi.

3. El siguiente verso de Aryabhata, matemático hindú del siglo IV, nos da la más antigua formulación sobre el valor aproximado de la relación que, más adelante, se llamará "pi".
"Sumar cuatro a cien, multiplicar por ocho, sumar todavía sesenta y dos mil. Se obtiene así un valor aproximado de la circunferencia cuyo diámetro es de dos miríadas."
Dos miríadas: 20 000
Nivel: ESS.

1. Expresar el término general de la Serie de Gregory, que tiende a π/4.
1 – 1/3 + 1/5 – 1/7 + 1/9 – 1/11 + 1/13 – 1/15 + 1/17……..

2. Expresar el término general de la Serie de Vieta, y encontrar a que valor tiende.
4/1 – 4/3 + 4/5 – 4/7 + 4/9 – 4/11 + 4/13 – 4/15 + 4/17…….

3. Método de Arquímedes de exhaución: trazar seis circunferencias de diámetro unidad, inscribir en tres de ellas polígonos regulares de seis, doce y veinticuatro lados; en las otras tres circunscribir otros tres polígonos iguales a cada uno de los anteriores. Con el uso de las razones trigonométricas (seno, coseno y tangente) expresar el perímetro de cada uno de los polígonos en función del ángulo central determinado por una diagonal y el apotema

correspondiente de cada polígono. Por último, “atrapar” el valor de Pi, entre los perímetros de los polígonos de igual cantidad de lados, tanto inscripto como circunscripto.

4. Probabilidades: problema propuesto y resuelto por el francés George Louis Leclerc, conde de Buffon, siglo XVIII, conocido como el problema de la aguja de Buffon: arrojar al azar una aguja de longitud L= 2cm sobre una superficie con líneas paralelas a distancia d= 4cm una de otra. Repetir centenar de veces. ¿Cuál es la probabilidad de que la aguja caiga sobre una de las líneas? (cuanto mayor es el numero de sucesos, mejor será la aproximación a la probabilidad que tiende a $\frac{1}{\pi}$).

5. Algoritmos iterativos: toman como entrada de cada ciclo la salida del precedente.

Sea $y_0 = \sqrt{2} - 1$; $\alpha_0 = 6 - 4\sqrt{2}$;

$y_{n+1} = 1 - \sqrt[4]{1 - y_n^4} / 1 + \sqrt[4]{1 - y_n^4}$; $\alpha_{n+1} = [(1+y_{n+1})^4 \alpha_n] - 2^{2n+3} y_{n+1}(1+y_{n+1} + y_{n+1}^2)$

Ejecutar el algoritmo hasta n=9, y comprobar la cantidad de cifras de Pi que provee.

6. Investigación: se invita a los alumnos averiguar las últimas novedades publicadas acerca del cálculo de cifras de π realizada por ordenadores. Por internet, el enlace, se sugiere, que sea “super pi + ordenadores+ cifras”. Allí encontrarán varios links que informan al respecto.

Marca del siglo XX
Autores: Yasumasa Kanada y Daisuke Takahashi (Universidad de Tokyo)
Fecha: 20 de Septiembre de 1999
Número de decimales: **206..158.430.000**
Tiempo: 37 y 46 horas (dos cálculos diferentes utilizando algoritmos diferentes)
Ordenador utilizado: Hitachi SR8000

Nueva marca mundial
Autores: Kanada, Ushio y Kuroda
Fecha: Diciembre de 2002
Número de decimales: **1.241.100.000.000**
Tiempo: Más de 600 horas
Ordenador utilizado: Hitachi SR8000 [2]

Para finalizar, propongo como actividad, recurrir al cine. Son muchas las películas que dedican su argumento, o parte de él, a temas relacionados con la matemática, y hasta a veces propiamente a matemáticos. Es el caso, por ejemplo, de MOEBIUS (1996), LOS CRIMENES DE OXFORD (2008), UNA MENTE BRILLANTE (2001), la trilogía: EL CUBO (1997), y la película de ficción PI(1998) la cual, como su nombre lo indica, hace explicita referencia al número π .

Valores obtenidos para PI a lo largo de la historia

Las columnas indican autor del cálculo, año y número de decimales.

Babilonios	Hacia el 2000 a.C.	1	3.125 = 3 + 1/8
Egipcios	Hacia el 2000 a.C.	1	3.16049=(16/9)^2
Arquímedes	Hacia el 250 a.C.	3	3.1418 (media)
Ptolomeo	150	3	3.14166
Liu Hui	263	5	3.14159

[2] FUENTE: http://mimosa.pntic.mec.es/jgomez53/matema/conocer/numpi.htm

Tsu Ch'ung Chi	480	6	3.1415929(=355/113)
Aryabhata	499	4	3.14156
Al-Khowarizmi	800	4	3.1416
Al-Kashi	1429	14	3.14159265358979
Vieta	1593	9	3.141592653
Romanus	1593	15	3.141592653589793
Van Ceulen	1596	20	
Van Ceulen	1615	35	

A partir de esta fecha empiezan a utilizarse series.

Sharp	1699	71	
Machin	1706	100	
De Lagny	1719	127	(112 correctos)
Vega	1794	140	
Rutherford	1824	208	(152 correctos)
Strassnitzky y Dase	1844	200	
Clausen	1847	248	
Lehmann	1853	261	
Rutherford	1853	440	
Shanks	1874	707	(527 correctos)

Utilizando calculadora

Ferguson y Wrench	1947	808
Smith y Wrench	1949	1.120

Utilizando ordenador

Reitwiesner	1949	2.037	ENIAC
Nicholson y Jeenel	1954	3.092	NORAC
Felton	1957	7.480	PEGASUS
Genuys	1958	10.000	IBM 704
Guilloud	1959	16.167	IBM 704
Shanks y Wrench	1961	100.265	IBM 7090
Guilloud y Filliatre	1966	250.000	IBM 7030
Guilloud y Dichampt	1967	500.000	CDC 6600
Guilloud y Bouyer	1973	1.001.250	CDC 7600
Miyoshi y Kanada	1981	2.000.036	FACOM M-200
Tamura y Kanada	1982	4.194.288	HITACHI M-280H
Tamura y Kanada	1982	8.388.576	HITACHI M-280H
Kanada, Yoshino y Tamura	1982	16.777.206	HITACHI M-280H
Gosper	1985	17.526.200	SYMBOLICS 3670
Bailey	1986	29.360.111	CRAY-2
Kanada y Tamura	1986	33.554.414	HITACHI S-810/20
Kanada y Tamura	1986	67.108.839	HITACHI S-810/20
Kanada, Tamura, Kubo	1987	134.217.700	NEC SX-2
Kanada y Tamura	1988	201.326.551	HITACHI S-820/80
Chudnovskys	1989	480.000.000	
Chudnovskys	1989	525.229.270	
Kanada y Tamura	1989	1.073.741.799	
Chudnovskys	1991	2.260.000.000	
Chudnovskys	1994	4.044.000.000	
Kanada	1995	6.442.450.938	

Kanada and Takahashi 1997 51.500.000.000 utilizando un HITACHI SR2201 en 29 horas (mes de agosto).

Bibliografía:

- Asimov, Isaac. (1977). *De los números y su historia* .Buenos Aires, El Ateneo, 257 páginas.
- Borwein, Jonathan; Borwein Peter. (1988). Ramanujan y el número pi. *Investigación y ciencia*, numero 139, 104 páginas.
- Doxiadis, Apostolos. (1992). *El tío Petros y la conjetura de Goldbach*. España. Ediciones B, 166 páginas.
- Gardner, Martin. (1988). *Viajes por el tiempo y otras perplejidades matemáticas*. España, ed. Labor, 294 páginas.
- Gardner, Martin. (1997). *Damas, parábolas y más mistificaciones matemáticas*. España, Gedisa editorial, 190 páginas.
- Guasco, Maria Jose; Crespo Crespo, Cecilia. (1996). *Geometría, su enseñanza.* Buenos Aires, Pro Ciencia Conicet, 221 páginas.
- Guedj, Denis, (1996). *El imperio de las cifras y los números*. Italia, ediciones B, 176 páginas.
- Palacios, Alfredo; Giordano, Emilio. (2000). *Caminante, si hay camino*….En: Palacios, Alfredo Raul, antología, (2000). *Cuentecicos y decires*. Buenos Aires, Lumen, 159 páginas.
- Smullyan, Raymond. (1992). *Un viaje al infinito.* En: Smullyan, Raymond, (1992). *Satán, Cantor y el infinito*. España, 262 páginas.
- Tahan Malba. (1996). *El hombre que calculaba.* Buenos Aires, ABRN producciones graficas, 187 páginas.
- Tahan, Malba. (2006). *Matemática divertida y curiosa*. Buenos Aires, Pluma y papel ediciones, 164 páginas.
- Zapico, Irene; Serrano, Gisela; Micelli, Monica. (2000). *Integración de áreas para el mejoramiento de la enseñanza de la Matemática*. En: Zapico, Irene; Burroni, Ester; y otros, (2000). *Matemática, historia y arte*.. Buenos Aires, UIDI, Instituto Superior del Profesorado Dr. Joaquín V. González, CDROM.