# LA GEOMETRIA DE LOS GRAFOS PLANARES

Autores: Teresa Braicovich, Patricia Caro, Lorena Alfonso, Marcia Oropeza
Institución: Universidad Nacional del Comahue. Argentina
Dirección electrónica: teresabraicovich@jetband.com.ar
**Nivel educativo:** EGB3 y Polimodal
**Palabras clave:** grafos, planaridad, poliedros

## Resumen

A partir de distintas investigaciones, en distintos niveles educativos y en distintos contextos sociales, llevadas a cabo se llegó a la conclusión que el trabajo con algunos conceptos de grafos ayuda a los alumnos en distintos aspectos dentro del proceso de enseñanza. Pero, muchos docentes desconocen el tema, otros sólo tienen un mínimo conocimiento del mismo e incluso algunos, aún cuando conocen más sobre esta temática no conocen la forma de presentarlo a sus alumnos.
Debido a lo planteado, se propone el dictado de este taller, cuyo objetivo es transferir conceptos del tema grafos a docentes, tanto en formación como en ejercicio, pero haciendo además referencia a la didáctica y a la metodología a utilizar de acuerdo a los distintos niveles educativos en los cuales se desee trabajar. En particular, en esta propuesta se presentarán los grafos planares y la relación de ellos con los poliedros eulerianos, ya que distintas representaciones sustentan diferentes formas de pensar sobre los objetos matemáticos.
Durante los encuentros se buscaría que sean los propios asistentes quienes construyan el conocimiento, mediante la presentación de actividades adecuadas, esto con el fin de generar en ellos la inquietud de profundizar en el estudio de este tema en el futuro y también de movilizarlos a enseñar el mismo a sus alumnos.

## I) Introducción

Debido a que el tema grafos no se encuentra en las currículas escolares se realizaron algunas investigaciones en distintos niveles educativos y de distinto contexto social con el fin de evaluar la viabilidad de introducirlo[4]. A partir de este estudio, se concluyó que la inclusión de ciertos conceptos de la teoría de grafos hace que los alumnos: realicen razonamientos matemáticos típicos de la matemática discreta, mediante la intuición, la exploración, el descubrimiento, el planteo de distintas hipótesis y la corroboración, o no de las mismas. Esto atendiendo a que el alumno debe apropiarse del conocimiento matemático, "*el razonamiento y la demostración matemáticos proporcionan modos potentes de desarrollar y codificar conocimientos sobre una amplia variedad de fenómenos. Las personas que razonan y piensan analíticamente tienden a percibir patrones, estructuras o regularidades…y conjeturan y demuestran*". (NCTM, 2003, pág. 59).
También se pudo determinar que los estudiantes son capaces de utilizar a los grafos como "*organizadores*" para así facilitar la comprensión y por lo tanto el aprendizaje, realizando representaciones y modelizaciones de situaciones cotidianas utilizando esta estructura matemática.
La finalidad de este taller es transferir algunos conocimientos de este tema a los asistentes, ya sean docentes en formación o en ejercicio. En particular, en este caso se trabajarán conceptos

---
[4] Distintos trabajos de integrantes de los Proyectos de Investigación *Adjunción en Grafos* y *El operador line sobre grafos cordales y de comparabilidad*, proyectos ejecutados y subsidiados por la Universidad Nacional del Comahue, con informes de avance y final aprobados. Períodos 2004-2007 y 2008 hasta la fecha, respectivamente. www.uncoma.edu.ar

referidos a la planaridad de los grafos y la relación de los mismos con los poliedros eulerianos. Las actividades que se propondrán tendrán una fuerte componente procedimental, se buscará que sean los propios asistentes quienes construyan el conocimiento, esto por supuesto, eligiendo actividades adecuadas.

**II) Pertinencia de la propuesta**

En matemática discreta se trabaja con conjuntos finitos de objetos, lo que incluye tópicos y técnicas de cada día de la vida, esta rama de la matemática se desarrolló rápidamente adquiriendo gran importancia durante las últimas cuatro décadas. El tema de matemática discreta con el cual se trabajaría en este taller, como ya se dijo, es la teoría de grafos y dentro del mismo nos avocaremos a la planaridad.
El primer artículo referido a la teoría de grafos, estaba relacionado con recorridos, fue publicado en el año 1736, fue escrito por el matemático suizo Leonhard Euler. Es importante mencionar que esta teoría en sus comienzos se ocupaba principalmente de pasatiempos y rompecabezas, sin embargo, avances recientes en la matemática y especialmente en sus aplicaciones la han impulsado en gran medida, siendo actualmente una rama de la matemática que se encuentra en pleno auge.
Ya en el siglo XIX se usaban los grafos en áreas tales como circuitos eléctricos o diagramas moleculares, en la actualidad estos son una herramienta natural y tienen muchas aplicaciones a cuestiones de carácter práctico: emparejamientos, problemas de transporte, flujo en redes, programación, entre otros y además está presente en campos tan dispares como la economía, la sicología y la biología.
Por otro lado, en este taller se relacionan los grafos con los poliedros. En NCTM (2003), dentro de los objetivos para los últimos tres años de la enseñanza media, se plantea utilizar la visualización, el razonamiento matemático y la modelización geométrica para resolver problemas y dentro de este objetivo se propone utilizar a los grafos para modelizarlos y resolverlos.

**Grafos y su potencial educativo**

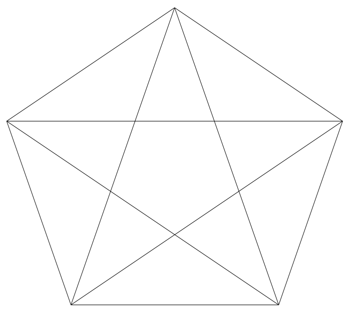
Puede establecerse, a modo de síntesis, que existen distintos argumentos para introducir algunos conceptos de la Teoría de Grafos en las currículas de los distintos niveles educativos. Citaremos para tal fin el texto de Rosenstein, J., Franzblau, D., Roberts, F. (1997, pág. xxvii), donde se detallan los siguientes puntos:

- Referido a la aplicabilidad: en los años recientes varios temas de esta teoría han sido utilizados creando diversos modelos en distintas áreas.
- Referido a la accesibilidad: para entender las aplicaciones del tema en muchas situaciones es suficiente tener conocimientos de aritmética y en otras solamente de álgebra elemental.
- Referido a la atracción: existen algunas situaciones sencillas de resolver y también otras que hacen que los alumnos deban explorar para poder llegar a los resultados.
- Referido a la adecuación: a aquellos estudiantes que no tengan problemas en matemática les dará mayor preparación para las carreras que elijan y para los que no les va bien en esta disciplina es apropiada pues puede dar la posibilidad de un nuevo comienzo.

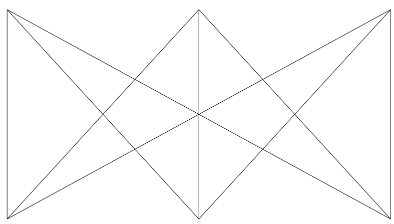
**III) Contenidos a desarrollar**

Una *representación en el plano* de un grafo $G=(V,U)$ es una función *f* tal que a cada vértice $v \in V$ le hace corresponder un punto del plano y a cada arista $a \in U$ le hace corresponder una curva simple con extremos en los puntos del plano correspondientes a los puntos extremos

de la arista *a*, de manera que tal curva no contiene otros puntos correspondientes a vértices del grafo.
Un grafo *G* admite distintas representaciones, sin embargo, es importante destacar que una representación determina un único grafo. En este taller se trabajaría con la representación en el plano de los grafos, en particular con el concepto de planaridad.
Un grafo *G* se dice <u>*grafo planar*</u> si admite una representación en el plano tal que curvas correspondientes a aristas distintas no se cortan salvo, tal vez, en sus puntos extremos. Una tal representación se dice una <u>*representación plana*</u> de *G* o una <u>*inmersión*</u> de *G* en el plano. Un <u>*grafo plano*</u> es un grafo planar con una dada representación plana.
Para la introducción del tema se utilizará un antiquísimo problema, el llamado comúnmente "*Problema de los recursos*". En el mismo es esencial, decidir si se puede o no dibujar un grafo en el plano sin intersecciones entre puntos interiores de las aristas. El enunciado se presenta a continuación:
"*En un terreno se han construido tres casas y se han excavado tres pozos de agua para uso de sus ocupantes. El clima y la naturaleza del terreno son tales que es frecuente que uno u otro de los pozos se seque; por ello, es importante que los habitantes de cada una de las casas tengan acceso a cada uno de los tres pozos. Al cabo de un tiempo, los residentes a, b y c desarrollan una fuerte antipatía mutua, por lo que quieren construir caminos al mismo nivel hasta los tres pozos x, y, z, de manera que puedan evitar el encontrarse en el camino de ida y de vuelta a los pozos, la pregunta es si será posible hacer esto*".
Cabe aclarar que este mismo problema suele ser presentado de otras maneras, por ejemplo, tener desde las tres casas conexiones a los servicios de gas, agua y luz mediante cañerías que no se crucen pero que se encuentren en el mismo plano.
Con este problema como disparador se presentará la Conjetura de Kuratowski. En el año 1930, el matemático polaco Kazimierz Kuratowski da a conocer un teorema en el que demuestra que un grafo es planar si y sólo si, ignorando sus vértices de grado dos, no contiene subgrafos isomorfos al bipartito completo $K_{3,3}$ o al completo $K_5$, ambos grafos se esquematizan a continuación:



**Grafo $K_5$**



**Grafo $K_{3,3}$**

Se trabajará con la Fórmula de Euler que dice:

"Sea *G* un grafo planar conexo con *v* vértices, *a* aristas y *r* regiones, entonces se tiene que:

$$v - a + r = 2$$"

y con el siguiente concepto:

"Un grafo planar simple *G* es un <u>*grafo planar maximal*</u> si el agregado de una arista entre dos cualesquiera de sus vértices no adyacentes produce un grafo que no es planar".

Cabe mencionar que la Fórmula de Euler mencionada para los grafos es equivalente a la *Fórmula Poliedral de Euler*, tomando cantidad de caras del poliedro en lugar de cantidad de regiones del grafo.
Dado un grafo planar $G$, se puede construir un nuevo grafo $G'$, llamado <u>*grafo dual*</u> de $G$, el mismo se construye asociando un vértice a cada región del grafo $G$ y si una arista limita dos

regiones en *G*, se añade en el grafo dual $G'$ una arista uniendo los vértices correspondientes a esas regiones. Como dos regiones pueden estar limitadas por más de una arista en común, pueden existir aristas paralelas. Asímismo, en el grafo dual pueden existir bucles, los mismos representan aristas que no limitan distintas regiones en el grafo $G$ .
En un _poliedro regular_ todas las caras son polígonos regulares congruentes entre sí y a cada uno de sus vértices concurre el mismo número de aristas. Es importante recordar que existen exactamente cinco poliedros regulares, los mismos son llamados *sólidos platónicos*, en honor a Platón, por ser quién los mencionó por primera vez en su libro Timeo. Se presentan estos a continuación:

**Tetraedro** **Cubo** **Octaedro** **Dodecaedro** **Icosaedro**

Un grafo regular plano *G* es _completamente regular_ si su grafo dual $G'$ es también regular, se evidencia la correspondencia que existe entre los sólidos platónicos y los grafos completamente regulares.

**IV) Metodología:**

El propósito de esta propuesta de taller es la de presentar una serie de actividades a resolver con herramientas de la Teoría de Grafos, las que pueden ser llevadas al aula por el docente, por supuesto con la dificultad acorde al nivel en que dicta sus clases.
Como el tiempo de desarrollo del taller no es demasiado extenso, la idea es generar en los asistentes la inquietud de investigar y estudiar el tema grafos, por lo que se prepararon actividades que los motiven a continuar en esa dirección. Para que esto sea efectivamente provechoso se ofrecerá toda ayuda a futuro, mediante el contacto con las docentes encargadas del taller.

**Algunas actividades a proponer:**

A continuación se presentan ciertas pautas a tener en cuenta para las actividades que se propondrían en el taller, esto atendiendo a la flexibilidad del proceso de enseñanza-aprendizaje:

- Comenzar el taller analizando en conjunto el prólogo del libro "*Matemática* 1*. Iniciación a la creatividad*" de Luis Santaló, que dice: ..."*Como los alumnos de hoy no son los mismos que los de ayer y las necesidades para poder actuar eficazmente en el mundo actual tampoco son las mismas, es natural que la educación matemática deba estar en continua evolución y que los educadores deban ir ajustando sin pausa la forma y el fondo de sus enseñanzas, para mantener a la escuela acorde a la calle de manera que el alumno no encuentre demasiada discontinuidad entre lo que oye en el aula y lo que encuentra y ve en su casa y en la calle*"....
- Sin definir la estructura de grafo, se planteará a los asistentes una situación problemática que pueda ser modelizada utilizando grafos y se les pedirá que hagan un esquema de la misma. La finalidad de esta actividad es que surja a partir de los distintos esquemas que ellos realicen el concepto de grafo, para que así comprueben que el mismo es relativamente intuitivo.

- Dar un listado con distintos conceptos de la teoría de grafos, por ejemplo: vértice, nodo, arista, distancia, ciclo, grafo valuado, conexidad, y pedirles que "*definan*" los mismos, esto por supuesto de manera intuitiva, para luego sí presentar las definiciones formales correspondientes. Es importante que vean a los grafos como una herramienta de modelización, pues representaciones diferentes sustentan diferentes formas de pensar sobre los objetos matemáticos.
- A medida que se dan los contenidos del tema que nos ocupa, mencionar las motivaciones históricas del mismo y también hacer una sucinta referencia a los restantes problemas clásicos de esta teoría, a saber: camino euleriano, camino hamiltoniano, árboles y coloreo, este último muy relacionado con el de planaridad. Se hará hincapié en que la historia debería formar parte, necesariamente, de los conocimientos de cada docente en todos los niveles, no sólo con la intención de que la utilice como instrumento en su propia enseñanza, sino también porque proporciona una visión verdaderamente humana de la ciencia y por ende permite entender mejor las distintas correlaciones existentes.
- Dar actividades que no sean una mera ejercitación rutinaria, sino aquellas que hagan movilizar los conocimientos previos y engendrar nuevos para lograr resoluciones correctas, haciendo que los propios asistentes construyan el conocimiento. Proponer actividades que requieran de la elaboración de conjeturas, de su justificación y de su posterior demostración. "*El tratamiento de la demostración formal sin realizar previamente un acercamiento a través del planteo de conjeturas, formulación de hipótesis, desarrollo de argumentos, conduce a un aprendizaje memorístico y a confundir el propósito de la demostración*". (Scaglia y otras, 2008).
- Se hará que los docentes trabajen de manera individual en algunas situaciones y de manera grupal en otras, consultando todo lo que consideren necesario, para lo que se contaría con 4 personas a cargo del taller.
- Se hará hincapié en grafos duales, poliedros regulares y grafos completamente regulares, esto con el fin de proporcionar a los docentes una puerta para introducir el tema grafos en alumnos de los últimos años de la enseñanza secundaria.
- Por último, cerrar el taller con el prólogo del libro "*Introductory Graph Theory*" de G. Chartrand (1985), el que se transcribe a continuación: *"Escribí este libro con varios objetivos: enseñar al lector algunos de los temas vigorosos y excitantes del campo de la teoría de grafos, mostrar que los grafos son aplicables en una gran variedad de campos, dentro y fuera de la matemática, incrementar los conocimientos de los estudiantes y facilitar las demostraciones o pruebas matemáticas y por último no por ser lo menos importante para que disfruten con la matemática".* La idea es analizar el mismo y compartir, o no, la opinión del autor.

**Reflexión final**

En este taller, como seguramente será heterogéneo con respecto a los participantes, se parte considerando que los asistentes desconocen totalmente el contenido a desarrollar referido a grafos, que no han trabajado previamente con conceptos de esta teoría, ya que por el tipo de actividades que se plantean esto es posible. Pero, cabe aclarar que se considera que sí manejan el tema de poliedros, con el cuál se relaciona. Por último, queremos destacar que "*Pensar matemáticamente supone buscar conexiones y haciendo conexiones se construye la comprensión matemática. Sin ellas, los estudiantes tienen que aprender y recordar demasiados conceptos y destrezas aislados. Con conexiones, pueden construir nuevos conocimientos sobre conocimientos previos*" (NCTM, 2003, pág. 278)

**Bibliografía**

Appel, K. y Haken, W. (1989). La solución del problema de los cuatro colores. *Investigación y Ciencia* 15, 78-91. Buenos Aires. Argentina.

Ausubel, D. (1978). *Psicología Educativa. Un punto de vista cognoscitivo*. Trillas, México.

Braicovich, T. (2005). *Introducción de algunos conceptos de grafos en Tercer Ciclo de Educación General Básica*. Universidad Nacional del Comahue. Neuquén.

Braicovich, T.; Caro, P; Cerda, V.; Osio, E.; Oropeza, M.; Reyes, C. (2009). *Introducción a la Teoría de Grafos.* Editorial Educo. Neuquén.

Brousseau, G. (1986). Fondaments et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathematiques*. 7 (2), 33-115.

Cognigni, R.; Braicovich, T.; Reyes, C. (2008). Recorriendo grafos a lo largo de la educación general básica. *Revista de Educación Matemática de la Unión Matemática Argentina* 23. 109-125. Universidad Nacional de Córdoba.

Coriat, M. (2004) Algunos usos escolares de los grafos. UNO. *Revista de Didáctica de la Matemática* 36, 8-21. Universidad Complutense de Madrid.

Chartrand, G. (1985). *Introductory Graph Theory*. Dover, Nueva York.

Chiappa, R. (1989). Algunas motivaciones históricas de la Teoría de Grafos. *Revista de Educación Matemática de la Unión Matemática Argentina* 4(1), 37-44. Universidad Nacional de Córdoba.

Guzmán, M. (1984). *Juegos matemáticos en la enseñanza*. Actas de las IV Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas.

Kenney, M. and Hirsh, C. (1991). *Discrete Mathematics across the curriculum K12 Yearbook*. National Council of Teachers of Mathematics. Reston, Virginia.

Menéndez Velázquez, A. (1998). Una breve introducción a la Teoría de Grafos. *SUMA*: *Revista sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas* 28, 11-26.

National Council of Teachers of Mathematics. (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*.. Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales. Sevilla. España.

Paenza, A. (2007). "*Matemática…¿estás ahí*? *episodio* 3". Siglo XXI. Editores Argentina. Buenos Aires.

Paenza, A. (2008). "*Matemática…¿estás ahí*? *episodio* 100". Siglo XXI. Editores Argentina Buenos Aires.

Rosentein, J., Franzblau, D., Roberts, F. (1997). *Discrete Mathematics in the Schools*. Dimacs. Volumen 36 American Mathematical Society National Council of Teachers of Mathematics.

Santaló, L. (1993). *Matemática* 1. *Iniciación a la creatividad*. Ed. Kapelusz. Buenos Aires.

Scaglia, S., Renzulli, F., Gotte, M. (2008). Propuesta para mejorar la demostración en el nivel terciario. Actas de VII CAREM. Santa Fe. Argentina.

Wilson, R. (1979). *Introduction of Graph Theory*. Longman. New York.