Uso de representaciones y generalización de la regla del producto

MARÍA C. CAÑADAS[1] Y LOURDES FIGUEIRAS[2]

[1]Universidad de Granada; [2]Universitat Autònoma de Barcelona

Resumen

Analizamos los protocolos de resolución de problemas de 50 estudiantes con el objetivo de profundizar en la construcción de la regla del producto como esquema básico de resolución de problemas de conteo. En particular, indagamos en el uso que se hace de la inducción y de diferentes representaciones para pasar de la enumeración exhaustiva y el recuento total de posibilidades a la generalización de dicha regla. El análisis ha puesto de manifiesto la existencia de dos procesos de generalización: sobre la dimensión del problema y sobre el número de elementos que intervienen en cada factor. Mostramos cómo ambos procesos se relacionan con el uso efectivo de los diagramas de árbol que los estudiantes generan de manera espontánea y apuntamos posibles implicaciones para la instrucción. Por otra parte, el análisis de los datos ha generado la necesidad de indagar en la conexión entre las representaciones textuales y otros tipos de representaciones, evaluando su funcionalidad.

Palabras clave: Diagrama, generalización, razonamiento inductivo, resolución de problemas, representación.

Use of representations and generalisation of the multiplication principle

Abstract

We have examined the problem-solving protocols of 50 students with the goal of analysing the construction of the multiplication principle as a basic scheme for solving counting problems. In particular, we investigated how induction and different representations are used to move from exhaustive enumeration to the generalisation of this principle. The analysis revealed the existence of two processes of generalisation: 1) on the dimension of the problem, and 2) the number of elements involved in each factor. We show how both processes are related to the effective use of tree diagrams that students generated spontaneously, and suggest possible educational implications. Moreover, the analysis of our data has generated the need to investigate the connection between textual representations and other types of representations, evaluating its functionality.

Keywords: Diagram, generalisation, inductive reasoning, problem solving, representation.

Agradecimientos: Este trabajo ha sido realizado dentro de los proyectos de investigación del Plan Nacional I+D+i con referencias EDU2009-11337 y EDU2009-07298, financiados por el Ministerio de Ciencia e Innovación y cofinanciados con fondos FEDER.

Correspondencia con las autoras: María C. Cañadas Santiago. Dpto. de Didáctica de la Matemática, Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Granada, Campus de la Cartuja s/n. 18071 Granada. Tlf. 958242846. E-mail: mconsu@ugr.es

La combinatoria es una de las ramas más antiguas de la matemática y tiene una presencia evidente en ámbitos como la probabilidad, teoría de números o programación.

Las conclusiones de Piaget y sus colaboradores sobre el desarrollo de estrategias combinatorias y su relación con las operaciones lógicas fueron integradas en el marco de su teoría general de desarrollo cognitivo y sirvieron como punto de partida para investigaciones posteriores específicas en el ámbito de la Educación Matemática. Estas investigaciones pusieron de manifiesto el interés por los procesos de razonamiento de los estudiantes en la resolución de problemas combinatorios y sus implicaciones didácticas (English, 1991; Fischbein y Gazit, 1988; Fischbein y Grossman, 1997; Hadar y Hadass, 1981). Las aportaciones de Fischbein permitieron además contemplar el razonamiento involucrado en la combinatoria desde el punto de vista de la instrucción, incidiendo de manera notable en la ampliación de la perspectiva cognitiva piagetiana. En particular, Fischbein concluyó que es posible impulsar la asimilación de técnicas combinatorias relativamente rápido si se utilizan las representaciones adecuadas y, más concretamente, que la inclusión de los diagramas de árbol en un programa de instrucción debidamente sistematizado permite que puedan ser transferidos a nuevas situaciones (Greer, 2001).

Actualmente, el creciente interés por la matemática discreta vuelve a impulsar la reflexión sobre la enseñanza y el aprendizaje de contenidos combinatorios (Hußmann, 2008; Spira, 2008; Sriraman y English, 2004). En el ámbito de la investigación educativa, se han llevado a cabo investigaciones que avalan la actualidad del tema (Kollofell, Eysink, De Jong, 2010; Kollofell, Eysink, De Jong, Wilhelm, 2009; Spinillo y Gomes da Silva, 2010).

Desde un punto de vista didáctico, la mayoría de los problemas de combinatoria exponen a los estudiantes a un contraste evidente. Por una parte, suelen ser problemas de enunciado sencillo y anclaje conceptual muy básico, en el sentido de que involucran únicamente la regla del producto y combinaciones de las operaciones aritméticas básicas. Por otra parte, la concatenación de tales operaciones puede ser complicada, al menos por dos razones: la primera es que los problemas requieren una atención muy detallada de las condiciones que se imponen en el enunciado pues, a menudo, estas condiciones requieren resolver operaciones combinadas en las que hay hacer uso de paréntesis, divisiones parciales, etcétera. La segunda razón es la dificultad de identificar exactamente todas esas condiciones y generar una representación adecuada que las recoja todas. Esto puede conducir a que diferentes estudiantes obtengan resultados distintos para un mismo problema y, sin embargo, los razonamientos de todos ellos parezcan acertados.

En el ámbito escolar, la resolución de problemas de combinatoria suele comenzar con un algoritmo para la clasificación de problemas que tiene en cuenta el orden y la repetición de elementos. De este algoritmo se desprende una clasificación que distingue en problemas de permutaciones, variaciones o combinaciones con o sin repetición que los estudiantes resuelven con fórmulas previamente memorizadas.

Detrás de esta clasificación de los problemas de combinatoria subyace generalmente un modelo basado en la *selección* (Dubois, 1984): se considera un conjunto de *m* objetos, generalmente distintos, de los cuales ha de seleccionarse una muestra. Se tiene en cuenta si hay menos objetos que en la totalidad o no, si se admite o no la repetición de las elecciones individuales o si el orden de la selección individual imprime o no distinción. Este modelo subyace también en la forma en que las investigaciones han abordado la resolución de problemas combinatorios. Por ejemplo, Fischbein y Grossman (1997) se refieren a la conformación de esquemas específicos para resolver problemas de permutaciones, de variaciones y de combinaciones. Investigaciones recientes en el ámbito de la psicología de la instrucción (Kollofell *et al.*, 2009, 2010) se refieren a los problemas de combinatoria exclusivamente en términos de cuatro categorías, según involucren o no el orden o la repetición. Estos autores examinan la relación entre las representaciones que llevan a cabo los estudiantes y sus logros en la resolución de problemas de probabilidad y combinatoria. También refiriéndose a problemas específicos de combinaciones y permutaciones, Abramovich y Pieper (1996) muestran cómo los estudiantes llegan a la obtención de fórmulas generales de forma recursiva a partir del trabajo con casos particulares.

La limitación de referirse únicamente a problemas en términos de permutaciones, variaciones o combinaciones ha sido detectada por investigaciones previas, en las que se ha ampliado el número de modelos implícitos en el enunciado. Así surgen el modelo de *colocación* y el modelo de *partición* (Dubois, 1984; Navarro-Pelayo, 1994). El modelo de colocación se refiere a la colocación de una serie de n objetos en m celdas que, desde un punto de vista matemático, equivale a establecer una aplicación desde el conjunto de los n objetos al conjunto de las m celdas. El modelo de partición aparece cuando el enunciado del problema exige dividir un conjunto de n objetos en m subconjuntos. Aunque la consideración de estos modelos aportan una visión más amplia del proceso seguido por un estudiante en la resolución de un problema, cualquiera de ellos conduce nuevamente a considerar como operaciones combinatorias básicas las combinaciones, permutaciones con o sin repetición y variaciones con o sin repetición. En consecuencia, los resultados de las investigaciones derivan de pruebas de problemas diseñadas desde la consideración de tales operaciones. Compartimos la convicción de que automatizar estas fórmulas es muy útil para la solución de determinados problemas si dichas fórmulas pueden aplicarse críticamente. Sin embargo, desde nuestra perspectiva, y esta será la tesis que intentaremos justificar a lo largo de este artículo, existen esquemas básicos de razonamiento multiplicativo que permiten a los estudiantes resolver este y otros tipos de problemas antes de haber automatizado las conocidas fórmulas de cálculo de permutaciones, variaciones o combinaciones, que son consideradas operaciones sobre operaciones (Navarro-Pelayo, 1994). El primer esquema básico al que nos referimos es la regla del producto y el primer paso para su adquisición es pasar de la enumeración exhaustiva y recuento posterior del total de posibilidades a la identificación del patrón multiplicativo que permite el recuento sin enumeración.

Así pues, nuestro trabajo se centra en analizar el proceso de resolución puesto de manifiesto en problemas básicos de conteo que no se ajustan al esquema de *selección* habitual. En particular, analizaremos el papel de las representaciones utilizadas por los estudiantes cuando tratan de formalizar la regla del producto. Este problema nos lleva a asumir una perspectiva teórica que atienda aspectos esenciales del aprendizaje. En particular, consideraremos de manera diferencial técnicas y estrategias en la resolución de problemas y nos detendremos en el uso de la inducción.

Estrategias y esquemas en la resolución de problemas de combinatoria

Parte de las investigaciones relacionadas con la resolución de problemas en combinatoria se han centrado en las estrategias que llevan a cabo niños en los primeros años de escolarización. Las investigaciones de English (1991, 1993) informaron sobre las estrategias que emergen al resolver problemas cuya solución es, usualmente, un número suficientemente pequeño que puede obtenerse enumerando todas las posibilidades y haciendo un recuento posterior. Estas investigaciones permitieron caracterizar las estrategias utilizadas por niños de entre 4 y 12 años de forma espontánea cuando se enfrentaban a la tarea del recuento de posibles ordenaciones de dos y tres elementos. La autora identificó seis estrategias en un orden creciente de complejidad: desde la enumeración de posibilidades por ensayo y error hasta la denominada *estrategia del cuentaquilómetros* que, en el caso tridimensional, implica mantener constantes dos elementos de la ordenación.

Por otra parte, entre las investigaciones que se han ocupado de problemas de recuento más generales en los que la enumeración exhaustiva no es posible, encontramos la conceptualización de *esquema* en el sentido propuesto por Fischbein y Grossman (1997). Un esquema es un programa que permite al resolutor interpretar una cierta cantidad de información y preparar la reacción correspondiente. Más concretamente, estos autores consideran que el procedimiento que permite calcular la solución a un problema de conteo es un *esquema* que permite expresar el número total de posibilidades. La fórmula de cálculo de las permutaciones de n elementos o de las combinaciones de n elementos tomados de k en k expresan esquemas concretos.

Nuestro objetivo es profundizar en cómo afrontan los estudiantes la transición desde la resolución de problemas mediante enumeración exhaustiva a la construcción de esquemas más generales en el sentido de Fischbein. En particular, nos centraremos en la identificación de la regla del producto, que consideramos el esquema básico para la solución de problemas de conteo y que puede enunciarse de la siguiente manera:

> Ante el problema de calcular las posibles colocaciones independientes de dos objetos, si existe un conjunto de n_1 posibilidades para la primera posición y un conjunto de n_2 posibilidades para la segunda, entonces el número de posibles colocaciones que podemos conseguir es el producto de n_1 y n_2. En el caso general, si quieren calcularse el número de colocaciones independientes de k objetos y tenemos un conjunto de n_i posibilidades para la posición i, el número de posibles colocaciones que podemos hacer es el producto $n_1\, n_2\, n_3 \ldots n_k = \prod_{i=1}^{k} n_i$.
>
> (COMAP. Garfunkel y Meyer, 1997, p. 274).

El análisis de los datos que llevamos a cabo en este trabajo proviene de protocolos de resolución de problemas de colocaciones. Los estudiantes que los llevaron a cabo no manifestaban en el comienzo de la actividad la automatización de la regla del producto y muchos sí lo hicieron al finalizar el proceso. Es por ello que prestamos especial atención al análisis de diferentes estrategias (representación e inducción) que llevan estos últimos a la solución. A continuación desarrollamos los dos pilares teóricos que tomaremos en consideración: (a) el uso de representaciones y (b) la inducción.

Representación en la resolución de problemas de combinatoria

Desde una perspectiva cognitiva, Holyoak y Morrison (2005) destacan la relación entre la resolución de problemas y las representaciones que llevan a cabo los sujetos. La representación que el resolutor construye de un problema determinado es clave en la resolución. Existe acuerdo para distinguir entre representaciones internas y representaciones externas del conocimiento. Las representaciones internas no constituyen el objeto de estudio de esta investigación. Las representaciones externas que produce el estudiante mientras resuelve un problema de matemáticas permiten la expresión de conceptos e ideas, en tanto que para comunicar ideas es preciso representarlas externamente (Duval, 1999; Hiebert y Carpenter, 1992). A su vez, dichas representaciones y las operaciones que los estudiantes llevan a cabo entre ellas actúan como estímulo para los sentidos en los procesos de construcción de nuevo conocimiento. Centraremos nuestra atención en las representaciones externas que produce el estudiante, que se caracterizan por tener una traza o soporte físico tangible.

En el caso específico de la combinatoria, Kolloffel *et al.* (2009) centran su investigación en tres tipos de representaciones: (a) textuales, (b) aritméticas y (c) mediante diagramas. Estas representaciones tienen sus propios elementos y sus propias reglas para establecer relaciones entre elementos. Tomamos esta clasificación como punto de partida para nuestra investigación.

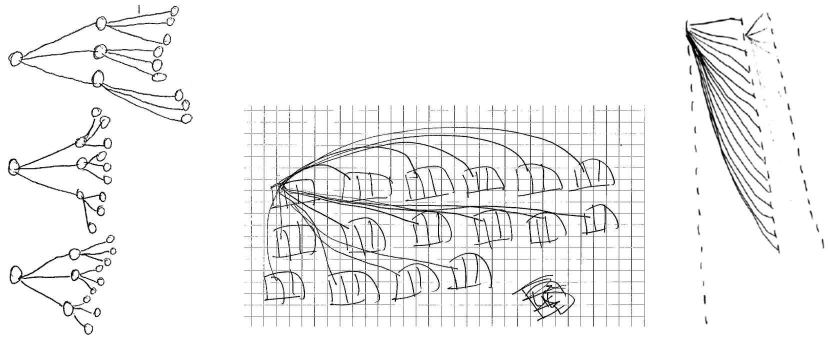
Las representaciones *textuales* se sirven del lenguaje natural de manera oral o escrita para exponer la información de forma cohesionada. En el caso de los protocolos que llevan a cabo los estudiantes mientras resuelven un problema, permiten expresar el proceso de razonamiento de forma secuencial.

Las representaciones *aritméticas* se sirven únicamente de números y operaciones expresados mediante lenguaje matemático que suelen organizarse para realizar un cómputo. Por ejemplo "$16{\cdot}16{\cdot}16 = 16^3$" está expresado aritméticamente.

Las representaciones *mediante diagramas* condensan la información que se expone en el plano del papel o la pantalla preservando, al menos, la relación estructural de la información que se representa. Pueden también preservar relaciones secuenciales, como en el caso de los diagramas de árbol o gráficos temporales. Si incluyen marcas textuales, se hace con el objetivo de etiquetar o especificar el significado de las partes del diagrama.

La representación mediante diagramas juega un papel destacado en nuestro trabajo, puesto que las investigaciones coinciden en señalar que el uso de diagramas ayuda a la comprensión y organización de muchas situaciones matemáticas y en particular de la combinatoria. Consideramos diagramas de árbol a una amplia variedad de representaciones hechas por los alumnos que tienen en común la utilización de ramas y cuyo nivel de sofisticación puede ser diverso (Figuras 1a, 1b y 1c).

FIGURAS 1A, 1B Y 1C
Ejemplos de diagramas de árbol



La funcionalidad de los diagramas de árbol ha sido analizada en diversas investigaciones. Por ejemplo, Fischbein y Gazit (1988) otorgan el máximo beneficio a estos diagramas en sus programas instructivos, considerándolos representativos de un estado de maduración en las estrategias de conteo. La efectividad de este tipo de representación ha sido cuestionada por Kolloffel *et al.* (2009), entendiendo que su beneficio se restringe únicamente al aprendizaje conceptual. Además, el trabajo de estos autores compara el efecto sobre el aprendizaje de las diferentes representaciones externas consideradas separadamente y de la combinación de dos de estas representaciones en el enunciado de las tareas (textual-aritmética y aritmética-diagrama). El resultado más significativo de su investigación es que el formato que combina representación textual y aritmética parece ser el más beneficioso para el aprendizaje y que combinar diagramas con representaciones aritméticas reduce la carga cognitiva (*cognitive load,* Kollofel *et al.,* 2009, p. 503), pero no mejora los resultados del aprendizaje. En la figura 3 se observan las tres representaciones mencionadas.

En el trabajo que presentamos, además de las representaciones que señalan Kolloffel y sus colaboradores, tendremos en cuenta un tipo de representación *algebraica*, que se caracteriza por el uso del lenguaje algebraico para expresar un enunciado o generalizar las operaciones aritméticas.

Por otra parte, en la investigación de Kolloffel *et al.* (*op.cit*.), las representaciones fueron creadas por el investigador en el contexto de cada problema, mientras que aquí nos ocuparemos de las representaciones que crea el estudiante en el proceso de resolución. Kolloffel ofrece al estudiante un diagrama de árbol para ayudar a identificar el patrón multiplicativo que subyace a un problema, mientras que aquí consideraremos el diagrama de árbol, más o menos sofisticado, cuando sea generado por los estudiantes para resolver un problema en el que subyace una estructura multiplicativa.

En tercer lugar, Kolloffel y sus colaboradores consideran la posibilidad de que se combinen dos o más representaciones (como sucede en el ejemplo de la Figura 3). Sin embargo, una de las aportaciones de nuestra investigación sobre la que volveremos más adelante es que los estudiantes utilizan una modalidad de representaciones, más compleja, que funde una o más de las representaciones textual, aritmética o mediante diagrama. Llamaremos a este nuevo tipo de representación *representación sintética*, que se caracteriza porque se combinan dos o más de las representaciones consideradas, pero que analizadas por sí solas no aportan información específica sobre el proceso llevado a cabo por el estudiante.

Inducción

Los procesos inductivos han sido considerados especialmente importantes para la adquisición de conocimiento en el medio social y científico, particularmente en el matemático (Mill, 1858; Neubert y Binko, 1992; Pólya, 1967). Estos procesos facilitan la identificación de regularidades en diferentes situaciones y ayudan a la comprensión de relaciones matemáticas (Dixon y Bangert, 2005).

Entendemos la inducción como una estrategia para la resolución de problemas en términos de Pólya (1967), que permite descubrir propiedades a partir del análisis de problemas más sencillos o casos particulares del mismo problema y encontrar regularidades que pueden conducir a la generalización. Los programas de instrucción suelen introducir la inducción mediante problemas en los que intervienen secuencias numéricas, desarrollos de series o aproximaciones. Con base en los trabajos de George Pólya en resolución de problemas (1945), Reid (2002) detalla en cinco pasos el proceso inductivo. Teniendo en cuenta estos trabajos, Cañadas y Castro (2007) proponen un modelo constituido por siete pasos para describir el razonamiento inductivo. En este trabajo hemos adaptado este modelo para describir cómo algunos estudiantes utilizan la estrategia de inducción para resolver problemas de combinatoria. No consideramos que todos los pasos que se describen a continuación deban darse ni que tengan que desarrollarse en el orden planteado:

1. Exploración de un problema más sencillo o casos particulares. Se refiere al manejo y experimentación de casos concretos sin llegar a organizarlos.

2. Organización de casos particulares. Se refiere a la ubicación u organización de los casos particulares de alguna forma que ayude a obtener conclusiones sobre el problema.

3. Identificación de patrón. La observación de casos particulares, organizados o no, permite extraer regularidades, pero no se aplican a otros casos o al caso general.

4. Formulación de conjeturas. Una conjetura es una afirmación basada en hechos empíricos que no ha sido validada y que puede hacer referencia a más casos particulares de los que los estudiantes están observando o manipulando.

5. Validación de la conjetura. Cuando los estudiantes formulan una conjetura, usualmente están convencidos de su validez para los casos con los que han trabajado pero no necesariamente para otros nuevos. En este paso, se trata de validar la conjetura para nuevos casos particulares –todavía no para el caso general. Si en el intento de validación en nuevos casos particulares encuentran un contraejemplo que la refuta demuestran su invalidez (paso 7).

6. Generalización. Los estudiantes plantean una conjetura para un caso general, que puede haberse originado a partir de su validación con casos particulares o no.

7. Demostración. La demostración es un paso caracterizado por la formalidad matemática de su justificación, que garantiza la validez o refutación de una conjetura. En este sentido, la refutación de una conjetura mediante un contraejemplo es una demostración.

En cuanto a la generalización, Dörfler (1991) distingue entre *generalizaciones empíricas* y *generalizaciones teóricas*. En este trabajo nos centramos en las primeras, que consisten en encontrar una cualidad o propiedad común entre muchos objetos o situaciones y darse cuenta de que esos objetos tienen algo en común y general a esos objetos y situaciones. Las investigaciones de Maher y Speiser (1997) y Martino y Maher (1999) mostraron cómo el contexto de la combinatoria resultaba especialmente efectivo para ayudar a los estudiantes a detectar principios de carácter general y cómo, a partir de situaciones básicas de conteo, podían abstraerse nociones sobre combinaciones y coeficientes binomiales.

Radford (2010) advierte de que se debe hablar de generalización cuando se ha identificado lo que tienen en común los casos particulares. Este autor diferencia entre *generalización algebraica*, cuando los estudiantes llegan a obtener una expresión que les permite obtener cualquier caso particular, y *generalización aritmética*, cuando los estudiantes manifiestan numéricamente haber identificado el patrón común de los casos particulares y lo utilizan para obtener cualquier otro caso particular, pero sin introducirse en el contexto algebraico. Cañadas, Castro y Castro (2008) también diferencia la generalización *textual* (a la que denominan verbal), cuando los estudiantes expresan con su lenguaje natural lo común que han identificado en los casos particulares y lo aplican en cualquier otro caso particular. Así, tenemos en cuenta tres tipos de generalización: (a) algebraica, (b) aritmética y (c) textual.

El marco teórico presentado conduce a desglosar la finalidad general de este trabajo en los siguientes objetivos específicos: (a) identificar si los estudiantes utilizan la inducción como estrategia en problemas básicos de conteo y, en tal caso, analizar su efectividad para la solución; (b) describir las representaciones que los estudiantes utilizan en la resolución del problema, prestando especial atención a los diagramas de árbol; y (c) analizar las posibles relaciones entre las estrategias utilizadas y su efectividad para la solución.

Metodología

Hemos realizado la investigación con 50 estudiantes de 11-12 años participantes en un proyecto para el estímulo del talento matemático en Cataluña. Los estudiantes provienen de diversos contextos escolares, sociales y culturales, pero conforman un grupo homogéneo en cuanto a edad, interés y capacidad para la actividad matemática. Han sido seleccionados entre más de 500 estudiantes a partir de una prueba de resolución de problemas de contenido matemático variado y de entrevistas individuales. Para la prueba no se tomó ningún test estandarizado de detección del talento y, mediante la entrevista, se aseguró que los estudiantes presentaban una buena disposición hacia las matemáticas y que no se sentían presionados por familias o profesorado para asistir a las reuniones extraescolares que se llevarían a cabo en el proyecto. Por tanto, aunque no son necesariamente estudiantes especialmente dotados, sí podemos afirmar que las sesiones se desarrollaron en condiciones óptimas en cuanto a nivel de implicación e interés. Los estudiantes no habían trabajado previamente contenidos de combinatoria. Se les entregó un cuestionario con problemas de complejidad creciente que tenían como objetivo último formalizar la regla del producto y se les pidió que detallaran al máximo el proceso de razonamiento que utilizaban.

La primera pregunta venía acompañada de un conjunto de 48 fichas manipulables que permitían formar 16 animales reales a partir de 16 cabezas, 16 cuerpos y 16 colas. También permitían construir otros animales fantásticos mediante diferentes combinaciones de cabeza, cuerpo y cola. Se aclaró a los estudiantes que se les preguntaba por todas las posibilidades de formar animales, fantásticos o reales. A continuación, se incluían otros dos enunciados cuya resolución también puede ser inmediata si se ha interiorizado el esquema de la regla del producto (Figura 2).

FIGURA 2
Preguntas del cuestionario

1. Con las fichas que tienes en la mesa puedes hacer diferentes animales. ¿Cuántos animales, reales o fantásticos, puedes hacer?
2. ¿Cuántos de estos animales tienen cabeza de cocodrilo y cola de elefante? ¿Cuántos tienen cuerpo de camaleón?
3. Un restaurante ofrece tres posibilidades para un primer plato, dos para un segundo plato y cinco posibilidades de postre. ¿Cuántas posibilidades hay de escoger un menú con primer plato, segundo plato y postre?

Los 50 estudiantes participantes llegaron a resolver el primer problema planteado de manera correcta. Un 87% respondió de forma automática a la pregunta planteada, expresando aritméticamente la solución correcta como producto (16·16·16) o como potencia (16^3). Estos estudiantes consideraron el problema trivial y no vieron la necesidad de justificar su respuesta. Ante nuestra petición, expresaron la regla del producto de forma textual y, en algunos casos, combinándola con expresiones aritméticas. Puesto que nuestro interés es profundizar en las estrategias utilizadas hasta llegar a aplicar la regla del producto, analizamos en profundidad los 10 casos de estudiantes que no resolvieron el problema automáticamente. Todos los estudiantes excepto dos resolvieron inmediatamente las cuestiones 2 y 3 en términos de la regla del producto después de haber resuelto la primera cuestión. En lo que sigue, nos centraremos en las producciones de los estudiantes relativas a la primera cuestión.

La tabla I recoge la información relativa a los 10 estudiantes analizados. Para cada uno de ellos detectamos las estrategias utilizadas en la solución de la primera cuestión, distinguiendo inducción y el uso de las diferentes representaciones que hemos considerado: textual, aritmética, mediante diagrama y algebraica. En el caso de la inducción, se han incluido en la tabla I, numerados de 1 al 7, los pasos definidos anteriormente.

Damos una medida de la dificultad del problema para cada estudiante considerando el número de etapas que necesitó para llegar a la solución. Por tanto, evaluamos la dificultad de la tarea únicamente en función de las capacidades de los estudiantes para resolverla. Esta medida aparece etiquetada con una *D* en la tabla I. A partir del análisis del trabajo llevado a cabo por los estudiantes, los hemos ordenado de manera creciente según la dificultad que les supuso el problema.

Para el problema planteado, consideramos que la estrategia tiene eficacia alta si *D* es inferior a 4 y asegura que la solución puede generalizarse inmediatamente a los problemas segundo y tercero del cuestionario. La estrategia tiene eficacia baja si *D* alcanza el valor 7 o superior o no permite la generalización inmediata a las cuestiones segunda y tercera. Los valores intermedios de *D* son considerados de eficacia media. La longitud de las tres barras sombreadas a la derecha en la tabla I representa la frecuencia con la que se han manifestado estos tres niveles de eficacia.

TABLA I
Estrategias y eficacia de las resoluciones

Estrategias												
Representación				Inducción								
Diagrama	Textual	Aritmética	Algebraica	1	2	3	4	5	6	7	D	Eficaz
			Estudiante 1									
$^{*}X_{1a}X_{2a}$	X_1X_2	X_1X_2	X		X_1				X_2		2	
			Estudiante 2									
$^{*}S_{1a}$	S_1	S_1X_2									2	
			Estudiante 3									
$^{*}S_{1a}$	S_1	S_1X_2									2	
			Estudiante 4									
X_{2a}	S_3	$^{*}X_1S_3$									3	
			Estudiante 5									
X_2	$^{*}S_1$	$^{*}S_1X_4$		X_2	X_3				X_4		4	
			Estudiante 6									
X_{2a}		X_3X_4		$^{*}X_1$	X_2	X_3			X_4		4	
			Estudiante 7									
	$^{*}S_1S_4X_5$	$^{*}S_1S_4$		X_2		X_3		X_5	X_4		5	
			Estudiante 8									
X_4	S_7	$X_5X_6S_7$		$^{*}X_1$		X_6	X_2X_4		X_7	X_3 X_5	7	
			Estudiante 9									
S_8		$^{*}X_1X_4S_8$		X_2 X_5	X_3	X_6	X_4		X_8	X_7	8	
			Estudiante 10									
	$S_2S_4S_4S_6$ $S_7S_8S_9$	$X_1S_2X_3S_4S_5S_6$ $S_7S_8S_9$		$^{*}X_1$	X_2	X_3	X_4X_6 X_8	X_9	X_{10}	X_5 X_7	10	

1: trabajo con casos particulars; 2: organización de casos particulares; 3: identificación de patrón; 4: formulación de conjetura; 5: comprobación de conjetura; 6: generalización; 7: demostración.

El análisis de las estrategias utilizadas por cada uno de los diez estudiantes aparece sintetizado en las filas de la tabla I. Para cada estudiante se ha marcado con una *X* o una *S* las estrategias que utilizan. La *X* hace referencia a una única estrategia y la *S* a la síntesis de dos o más. El subíndice indica la etapa de la resolución en la cual aparece esa estrategia El índice *a*, que se utiliza únicamente en las representaciones mediante diagrama, indica que se utiliza un diagrama de árbol. Cuando para el mismo estudiante aparece repetido el mismo índice en varias celdas, indica que en esa etapa se han utilizado tantas estrategias como veces aparece el índice. En particular, siempre que aparezca una *S* con un índice, volverá a aparecer al menos en otra celda. El único caso en el que no aparece subíndice (E1) se refiere a una generalización algebraica no requerida en el enunciado del problema y que, por tanto, no se contabiliza como etapa.

Hemos señalado con un asterisco la estrategia con la que comienza cada estudiante la resolución. Esto permite visualizar fácilmente una posible relación entre la dificultad de la tarea y la estrategia de arranque. Dado que puede darse la situación de que en la primera etapa se combinen de manera no sintética varias representaciones o incluso las estrategias de inducción o representación, se ha indicado con un asterisco la primera que se ha utilizado.

Análisis y resultados

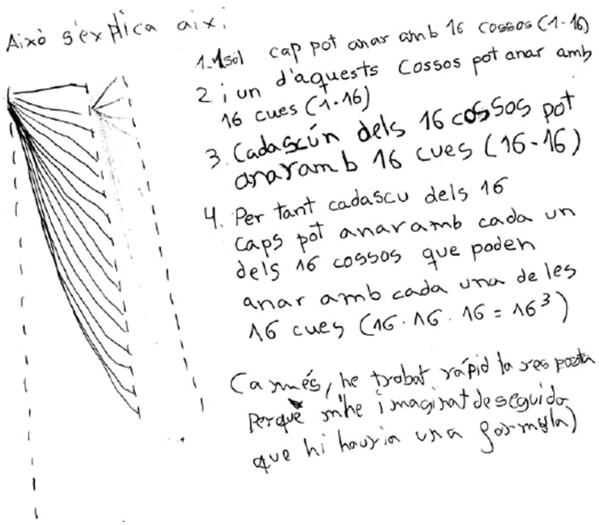
La información contenida en todos los casos analizados puede leerse en la tabla I. Por ejemplo, para E8 los datos de la tabla indican que el estudiante resolvió la tarea planteada en siete etapas y que por tanto la efectividad de su estrategia ha sido calificada como baja. La entrada X_1 indica que el estudiante inició la resolución de tarea explorando un problema más sencillo o casos particulares (paso 1 de la estrategia inductiva). El hecho de que el resto de los subíndices aparezcan colocados bajo el epígrafe *inducción* muestra que se mantuvo dicha estrategia durante todo el proceso de resolución. Este estudiante formula alguna conjetura (paso 4 de la inducción) sin organizar casos particulares o identificar un patrón (pasos 2 y 3 de la inducción) y prueba su falsedad, puesto que vuelve a formular una nueva conjetura. A continuación, identifica un patrón y generaliza esta última conjetura sin demostrarla. Durante este proceso, el estudiante ha utilizado una representación mediante diagrama para abordar un problema de generalización (registramos X_4 en la columna *diagrama* y en la etapa 6 de la inducción). Igualmente, ha utilizado representaciones aritméticas para formular la conjetura que le permite identificar y expresar un cierto patrón (registramos X_5 y X_6 bajo la columna *aritmética* y en las etapas 6 y 5 de la inducción). Finalmente, ha utilizado una representación sintética –aritmético-textual– para expresar una generalización, con la que cierra su proceso de resolución en siete pasos (subíndice 7).

El análisis llevado a cabo sobre los casos analizados permite extraer ciertas regularidades sobre los siguientes aspectos: (a) el uso de representaciones sintéticas y la relación entre las representaciones utilizadas y la efectividad de la tarea, (b) el uso de la inducción y su eficacia en la solución de la tarea y (c) la relación entre la generalización y la representación utilizada. En lo que sigue, desarrollamos los resultados obtenidos de acuerdo a estos tres epígrafes.

Representaciones y efectividad de la tarea

Los estudiantes inician la resolución mediante la representación de los datos que les proporciona el enunciado (Tabla I). Los diez casos analizados utilizan representaciones aritméticas y un estudiante utiliza una representación algebraica. La representación combinada, en el sentido de Kolloffel, es utilizada por E1 en los dos pasos que da para llegar a la solución adecuada del problema (Figura 3).

FIGURA 3
Representación combinada de E1



E1 representa los casos particulares con los que trabaja de forma organizada mediante un diagrama de árbol. En el diagrama original, las ramas son de diferentes colores y permiten ubicar la organización de los casos particulares. Además, acompaña este diagrama con una explicación textual que contiene la misma información que el diagrama y del mismo color que la parte del diagrama a la que se refiere. El estudiante traduce aritméticamente la explicación que aporta entre paréntesis.

Las representaciones sintéticas son utilizadas por ocho de los diez estudiantes en diferentes momentos de la resolución del problema. Estas representaciones siempre involucran a las representaciones textual y aritmética, y dos de los estudiantes además utilizan el diagrama de árbol como parte de esta representación sintética con una eficacia asociada alta. En la tabla I se puede observar que algunos estudiantes la utilizan en una o varias etapas del proceso de solución (estudiante E7); al comienzo del problema (E2, E3 y E5); o en etapas más avanzadas (E4, E8, E9 y E10). Los estudiantes que utilizan una representación sintética en alguno de los tres primeros pasos son aquellos que tienen una eficacia mayor en la resolución del problema.

La utilización de las representaciones sintéticas, especialmente cuando se hace uso del texto, parece ayudar al estudiante a dar significado a la idea matemática que subyace. En el caso de E4, la estudiante detecta que se trata de un problema de estructura multiplicativa y así lo evidencia mediante dos representaciones genuinamente aritméticas que utiliza: 16x3 o 16^3. Inmediatamente después, la estudiante genera la siguiente representación sintética (aritmética y textual):

> "el 3 de 16x3. Eso son las tres partes que tienen pero no tiene relación. No es que cada parte tenga tres posibilidades, sino que tiene 16. Al final se llega al resultado 16^3 = 4096".

Sintetizar las representaciones textual y aritmética permite, en este caso, dar un significado a las dos operaciones escritas en el contexto del problema que se propone. En los cuarenta estudiantes que resuelven el problema de forma inmediata y que en consecuencia no han sido considerados como casos de análisis, aparecía la representación aritmética 16^3 (o su equivalente 16·16·16). En el caso de E4, el avance fundamental para llegar a asegurar la validez de una de sus conjeturas y refutar la otra pudiera ser la representación sintética que utiliza.

En coherencia con investigaciones previas, los casos analizados indican que los diagramas de árbol resultan ser las representaciones más efectivas para la resolución de problemas de combinatoria, aunque este tipo de diagramas se apoyan en la combinación o en síntesis con otro tipo de representaciones. Cinco de los diez estudiantes analizados utilizan diagramas de árbol con diferentes niveles de sofisticación y tuvieron una alta eficacia en la resolución. El árbol aparece en combinación o síntesis con otro tipo de representaciones que permiten al estudiante llegar a una representación aritmética de la solución del problema en los casos de mayor eficacia. Quienes utilizaron un diagrama de árbol con la mayor eficacia no lo dibujaron para después llevar a cabo un recuento uno-a-uno de todas las posibilidades, sino para generar una nueva representación aritmética que da solución al problema. El único caso que alcanza la generalización algebraica es el de mayor eficacia y está asociado a un diagrama de árbol muy elaborado y a la combinación de todas las representaciones en los dos únicos pasos del proceso.

Los casos con efectividad baja no suelen utilizar diagramas y cuando los utilizan, no se trata de diagramas de árbol. La manipulación de fichas para el recuento directo se mantiene en estos casos durante los primeros pasos de la resolución.

Uso de la inducción y relación con la efectividad de la tarea

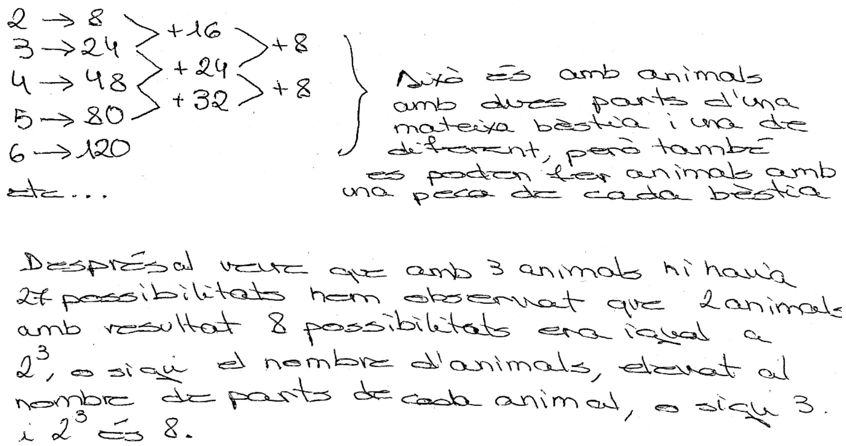
Siete estudiantes recurren a la inducción como estrategia de resolución y trabajan con casos particulares o los organizan en la resolución del problema. En este problema, los casos particulares pueden hacer referencia a: (a) el mismo problema tridimensional con un número menor de piezas; (b) la situación en la que resuelvan un problema bidimensional con el número de piezas inicialmente dado para cada elemento (16 piezas); y (c) el problema bidimensional con un número menor de piezas.

Un ejemplo del trabajo con casos particulares en varias de las situaciones mencionadas lo encontramos en E1. En la figura 3 se observa cómo primero resuelve el caso bidimensional, considerando que sólo tiene un elemento para la primera posición y 16 para la segunda (y lo representa como 1x16), cuyo resultado es 16. Posteriormente resuelve un caso particular bidimensional, con 16 elementos cada uno (16x16) para, finalmente, dar con el resultado del problema. Este estudiante utiliza una organización de esos casos particulares (mediante diagrama) que le ayuda a obtener conclusiones sobre el problema y lo conduce a la generalización, como veremos con más detalle posteriormente. Es un ejemplo que muestra que no es necesario utilizar todos los pasos de la inducción para resolver un problema de forma exitosa.

El resto de estudiantes que trabajan u organizan casos particulares comienzan resolviendo un problema tridimensional pero con un menor número de piezas. Esto pone de manifiesto que los estudiantes que no conocen la estrategia para llegar a la solución se sienten más cómodos si reducen el problema tridimensional con un número que consideran elevado a otro problema tridimensional en el que los números implicados (o su expresión gráfica mediante figuras o diagramas de árbol) sean más manejables. Sin embargo, esta opción no les conduce a una solución eficaz del problema. Desde un punto de vista evolutivo, las investigaciones de English (1991, 1993) pusieron de manifiesto el incremento en la dificultad que suponía pasar de problemas de conteo bidimensionales a problemas tridimensionales. Sin embargo, detectamos cómo el número de elementos que intervienen en cada factor es determinante para algunos estudiantes en la manera en la que simplifican el problema y algunos estudiantes optan por resolver un problema tridimensional con dos piezas. Una posible explicación es que el hecho de mantener el problema en su formulación tridimensional permite la enumeración exhaustiva de todas las posibilidades, mientras que el hecho de considerar el caso bidimensional (únicamente dos piezas, por ejemplo cabeza y cuerpo) aleja al estudiante de la concreción que ofrecen las fichas manipulables.

El caso en el que se manifiesta mayor variedad de pasos de la inducción y diferentes representaciones es el de E8, quien comienza con la organización de un caso particular del problema. A continuación, formula una conjetura que es rechazada tras demostrar mediante contraejemplo que es falsa. Los cálculos que realiza para refutar esta conjetura lo llevan a formular una nueva que expresa mediante un diagrama. Este diagrama le lleva a identificar un patrón para el caso particular que comenzó trabajando (ver Figura 4).

FIGURA 4
Pasos de inducción en E8



El proceso seguido por E8 muestra que los pasos considerados para describir la inducción no tienen que seguir el orden presentado en el modelo, repitiéndose algunos ellos y ausentándose otros.

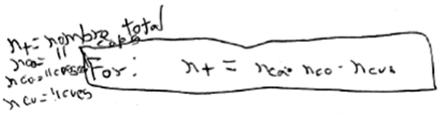
Los estudiantes en los que se ha detectado efectividad media o baja en la resolución del problema se corresponden con aquéllos que han seguido tres o más pasos de los considerados para la inducción. Los dos estudiantes que más pasos utilizaron (E9 y E10) fueron quienes no automatizaron la regla del producto para aplicarla en la resolución de las dos últimas preguntas del cuestionario. Esto apunta a que el número de pasos de inducción que realiza un estudiante parece ser inversamente proporcional a la eficacia del mismo en la resolución del problema. Sin embargo, utilizar la inducción en la resolución del problema es una estrategia eficaz cuando se utiliza para dirigir la construcción de un diagrama de árbol.

Generalización y representación

En la tabla I observamos que los estudiantes utilizan diferentes representaciones para expresar la generalización, en los casos en los que logran formularla. La coincidencia de subíndices en las representaciones y en el paso 6 de la inducción permite reconocer el trabajo que han realizado los estudiantes en este sentido.

Llamamos la atención sobre E1, el único estudiante que utiliza una representación algebraica para expresar la generalización del caso tridimensional (ver Figura 5).

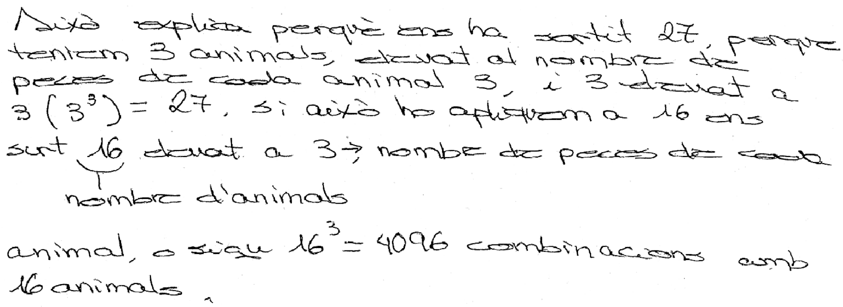
FIGURA 5
Generalización de E1



E1 identifica qué es lo que tienen en común los casos particulares del problema y lo representa mediante un diagrama de árbol: por un lado, la dimensión del problema y por otro el número de elementos que entran en juego en cada una de ellas. Ambas consideraciones son necesarias para expresar la generalización de la regla del producto. Esta generalización algebraica se produce después de haber obtenido una generalización (a) aritmética, porque detecta en esa representación lo que tienen en común los casos particulares con los que está trabajando según el número de fichas que considere para cada parte del cuerpo y las partes del cuerpo con las que esté trabajando) y (b) textual porque expresa verbalmente esa misma relación (Figura 3).

Con excepción del único caso en el que se da una generalización algebraica, el resto de los estudiantes utilizan representaciones aritméticas o sintéticas para expresar cierta generalización que les permite llegar a la solución adecuada del problema (Figura 6).

FIGURA 6
Generalización de E8



Conclusiones

Hemos profundizado en el proceso seguido por los estudiantes en un contexto del aula para lograr la generalización de la regla del producto y expresarla mediante diferentes representaciones. En concreto, los estudiantes han puesto de manifiesto cuatro formas de representar la generalización empírica en este tipo de problemas: (a) aritmética, (b) algebraica, (c) textual y (d) sintética (textual-aritmética).

La generalización aritmética ha sido la más frecuentemente utilizada y hemos observado cómo su expresión mediante una representación sintética (aritmética y textual) aparece a medida que el proceso seguido pierde efectividad. Aunque no se pidió explícitamente a los estudiantes que generalizaran la solución del problema para un número arbitrario de elementos, hemos encontrado una expresión algebraica en la solución de uno de ellos. Hemos indagado en el análisis de casos particulares llevado a cabo por este y otros estudiantes y hemos observado cómo en este tipo de problemas intervienen dos procesos de generalización: sobre la dimensión del problema y sobre el número de elementos que intervienen en cada factor. La mayoría de los estudiantes reducen el número de elementos y no la dimensión del problema y esta acción se asocia, en algunos casos, a una baja efectividad. Esta baja efectividad se pone de manifiesto en la utilización de muchos pasos de un proceso de inducción no adecuado para resolver este tipo de problemas. Esto parece indicar que los estudiantes no identifican la dificultad del problema con el hecho de que aumente su dimensión, sino con el elevado número de piezas para cada factor. Los estudiantes que optan por esta exploración de casos particulares utilizaron los materiales manipulables que se les ofrecieron para resolver el problema, enumerando de manera exhaustiva todas las posibilidades. Esto nos lleva a pensar que el contexto que proporcionan el enunciado del problema y el material manipulable que se proporciona pudiera limitar una aproximación más efectiva que contemple la reducción del número de dimensiones, puesto que con dicha reducción, las figuras que aparecen en el material dejan de tener sentido.

Desde el punto de vista de la instrucción, las investigaciones previas sobre combinatoria apuntan hacia la utilización del diagrama de árbol como una de las estrategias más efectivas para la resolución de problemas. Aunque compartimos con estas investigaciones la eficacia indiscutible de este tipo de diagramas, en este trabajo hemos puesto de manifiesto que la forma en la que los estudiantes abordan este tipo de problemas antes de haber sido específicamente instruidos para su solución es muy diversa, tanto por el tipo de representaciones que utilizan, como por la eficacia con la que utilizan dichas representaciones. En particular, hemos constatado que los estudiantes utilizan diagramas de árbol con diferentes niveles de sofisticación para resolver problemas aún cuando no han recibido una instrucción explícita sobre su uso. Algunos de los diagramas de árbol utilizados expresan de manera secuencial la solución a un caso particular mediante enumeración. En el caso de mayor efectividad, el diagrama de árbol utilizado representa una estrategia inductiva y no sólo la información que contiene el enunciado del problema.

El análisis llevado a cabo ha puesto de manifiesto que la estrategia de inducción es utilizada por un número considerable de estudiantes en el proceso de consolidar la regla del producto con resultados poco eficaces. En consecuencia, parece plausible que una instrucción centrada en el diagrama de árbol podría suponer un paso pequeño para aquellos estudiantes que afrontarían de manera natural este tipo de problemas con una representación mediante diagrama, pero un paso considerablemente mayor para otros estudiantes que lo afrontarían utilizando otras estrategias. Mientras que para los primeros esa instrucción lleva asociada claramente una mejora en la sofisticación de sus propias representaciones, para los segundos implicaría el reemplazamiento de su estrategia previa de abordaje por otra más eficaz sin que exista un proceso de construcción que medie entre ambas y que es necesario para el aprendizaje.

Hemos detectado cómo la estrategia de inducción aparece, en muchos casos, relacionada con una baja efectividad en la resolución. Sin embargo la inducción es la estrategia que subyace a la construcción de un diagrama de árbol efectivo, en tanto que representa tanto el crecimiento n dimensional como del número de elementos que intervienen en cada factor. Es por ello que el uso del diagrama de árbol resulta una estrategia muy efectiva para la generalización de problemas de combinatoria y explica porqué el estudiante E1 resuelve el problema con efectividad máxima. Su diagrama de árbol crece por la utilización de una estrategia inductiva, mientras que en el resto de los casos en los que se detecta la misma estrategia de inducción, ésta se muestra menos efectiva cuanto más se alejan de una buena representación.

Por todo ello, proponemos una perspectiva de instrucción del diagrama de árbol que ayude a los estudiantes a dar sentido a sus estrategias inductivas cuando las haya, y nunca antes de que los estudiantes se enfrenten a este tipo de problemas básicos de conteo únicamente con sus conocimientos previos.

Además, el análisis de los datos ha generado la necesidad de tomar en consideración representaciones sintéticas y, en particular, a detectar ciertas regularidades en aquellas que incluyen la representación textual, abriendo cuestiones interesantes para futuras investigaciones. Nos parece interesante resaltar la necesidad de indagar en la conexión entre el discurso que acompaña a este tipo de representaciones sintéticas y la funcionalidad de tales representaciones, evaluando hasta qué punto este tipo de representaciones expresan la necesidad de apoyarse en el lenguaje natural ante la imposibilidad de generar una única categoría de representación.

Los estudiantes que se han ceñido a un modelo de razonamiento inductivo para la resolución del problema han utilizado representaciones textuales y aritméticas y han logrado generalizar la regla del producto después de un proceso largo y errado en muchas etapas. Esta estrategia ha resultado poco eficaz debido al elevado número de pasos que han necesitado para resolver el problema.

Nuestra propuesta en relación con los primeros pasos de la instrucción para la solución de los primeros problemas de combinatoria a partir de los 12 años se inicia explorando el nivel de consolidación existente de la regla del producto. Es probable que los estudiantes se hayan enfrentado con anterioridad a problemas similares cuando se introduce la multiplicación y, en particular, que hayan explorado problemas de conteo bidimensionales mediante producto cartesiano. Lo que marca la diferencia en su consideración al inicio de un programa de combinatoria es el objetivo de integrar la regla del producto como esquema básico de conteo.

Referencias

ABRAMOVICH, S. & PIEPER, A. (1996). Fostering recursive thinking in combinatorics through the use of manipulatives and computing technology. *The Mathematics Educator, 7* (1), 4-12.

CAÑADAS, M. C. & CASTRO, E. (2007). A proposal of categorization for analyzing inductive reasoning. *PNA, 1* (2), 67-78.

CAÑADAS, M. C., CASTRO, E. & CASTRO, E. (2008). Patrones, generalización y estrategias inductivas de estudiantes de 3º y 4º de educación secundaria obligatoria en el problema de las baldosas. *PNA, 2* (3), 137-151.

COMAP. GARFUNKEL, S. & MEYER W. (Eds.) (1997). *Principles and practice of mathematics.* Nueva York: Springer- Verlag.

DIXON, J. A. & BANGERT, A. S. (2005). From regularities to concepts: The development of childrens' understanding of a mathematical relation. *Cognitive Development, 20*, 65-86.

DÖRFLER, W. (1991). Forms and means of generalization in mathematics. En A. J. Bishop (Ed.), *Mathematical knowledge: its growth through teaching* (pp. 63-85). Dordrecht: Kluwer Academic.

DUBOIS, J. G. (1984). Une systematique des configurations combinatoires simples. *Educational Studies in Mathematics, 15* (1), 37-57.

DUVAL, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales.* México, DC: Universidad del Valle.

ENGLISH, L. D. (1991). Young children's combinatoric strategies. *Educational Studies in Mathematics, 22* (5), 451-474.

ENGLISH, L. D. (1993). Children strategies for solving two- and three- dimensional combinatorial problems. *Journal for Research in Mathematics Education, 24* (3), 255-273.

FISCHBEIN, E. & GAZIT, A. (1988). The combinatorial solving capacity in children and adolescents. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 5*, 193-197.

FISCHBEIN, E. & GROSSMAN, A. (1997). Schemata and intuitions in combinatorial reasoning. *Educational Studies in Mathematics, 34* (1), 27-47.

GREER, B. (2001). Understanding probabilistic thinking: the legacy of Efraim Fischbein. *Educational Studies in Mathematics, 45* (1-3), 15-33.

HADAR, N. & HADASS, R. (1981). The road to solving a combinatorial problem is strewn with pitfalls. *Educational Studies in Mathematics, 12* (4), 435-443.

HIEBERT, J. & CARPENTER, T. (1992). Learning and teaching with understanding. En D. Grows (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 65-97). Nueva York: MacMillan.

HOLYOAK, K. J. & MORRISON, R. G. (2005). *The Cambridge handbook of thinking and reasoning*. Cambridge: Cambridge University Press.

HUßMANN, S. (2008). *Doing mathematics-authentically and discrete. A perspective for teacher training*. Trabajo presentado en el 11th International Congress on Mathematical Education, Julio, Morelia, México.

KOLLOFFEL, B., EYSINK, T. H. S., DE JONG, T. & WILHELM, P. (2009). The effects of representational format on learning combinatorics from an interactive computer simulation. *Instructional Science, 37* (6), 503-517.

KOLLOFFEL, B., EYSINK, T. H. S. & DE JONG, T. (2010). The influence of learner-generated domain representations on learning combinatorics and probability theory. *Computers in Human Behaviour, 26*, 1-11.

MAHER, C. A. & SPEISER, B. (1997). How far can you go with block towers? Stephanie's intellectual development. *Journal of Mathematical Behavior, 16* (2), 125-132.

MARTINO, A. M. & MAHER, C. A. (1999). Teacher questioning to promote justification and generalization in mathematics: What research practice has taught us. *Journal of Mathematical Behavior, 18* (1), 53-78.

MILL, T. (1858). *System of logic, raciocinative and inductive.* Londres: Harper & Brothers.

NAVARRO-PELAYO, V. (1994). *Estructura de los problemas combinatorios simples y del razonamiento combinatorio en alumnos de secundaria*. Tesis Doctoral. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

NEUBERT, G. A. & BINKO, J. B. (1992). *Inductive reasoning in the secondary classroom*. Washington DC: National Education Association.

PÓLYA, G. (1945). *How to solve it*. Princeton: University Press.

PÓLYA, G. (1967). *Le découverte des mathématiques*. París: DUNOD.

RADFORD, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA, 4* (2), 37-62.

REID, D. (2002). Conjectures and refutations in grade 5 mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 33* (1), 5-29.

SRIRAMAN, B. & ENGLISH, L. D. (2004). Combinatorial mathematics: Research into practice. *Mathematics Teacher, 98* (3), 182-191.

SPINILLO, A. G. & GOMES DA SILVA, J. F. (2010). Making explicit the principles governing combinatorial reasoning: Does it help children to solve Cartesian product problems? En M. F. Pinto & T. F. Kawasaki (Eds.), *Actas del 34 Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 217-224). Belo Horizonte: PME.

SPIRA, M. (2008). *The bijection principle on the teaching of combinatorics*. Trabajo presentado en el 11th International Congress on Mathematical Education, Julio, Morelia, México.