Paseos al azar: Memorias de una pulga solitaria

Gamaliel Cerda Morales

Este artículo expresa una experiencia directa de lo que significa el abordaje experimental de un problema probabilístico, valorando su resolución desde el sentido común, y la sana actitud investigativa de los estudiantes. Dicha metodología, ilustrará el avance de las ciencias cognitivas, en la actividad sensorimotora de construcción de ideas y conceptos matemáticos asociados al álgebra.

1. Introducción

1.1. *Observar movimientos aleatorios*

En 1827 el biólogo inglés, Robert Brown, notó algo que lo dejó perplejo: los granos de polen que estaban en una suspensión acuosa bajo el lente de su microscopio bailaban en todas direcciones, siguiendo caminos zigzagueantes. Probó, para ver, con otros granos de polen, que habían estado almacenando durante un siglo, y constató que bailaban de la misma forma.

El primero que logró adelantar una buena explicación del baile de los granos de polen, que pasó a llamarse desde entonces *movimiento Browniano*, fue Desaulx en 1877, quien dijo: "Este fenómeno es simplemente un resultado de la agitación térmica de las moléculas de agua". Efectivamente, cada partícula en suspensión en una solución acuosa, que no está tan quieta como parece, es bombardeada aleatoriamente, sin cesar, desde todos lados por las moléculas de agua. Si la partícula es suficientemente pequeña, estos impactos la propulsarán en una dirección, y en seguida en otra, en forma errática e imprevisible. Estos pequeños y aleatorios saltos generan entonces el movimiento browniano.

Vale la pena notar que esta invisible agitación de las moléculas de agua se manifiesta también en la forma en que se "difunde" una cucharada de tinta en un vaso con agua, en lugar de irse directamente al fondo… ¿Lo ha notado usted alguna vez?

La primera teoría matemática del movimiento browniano fue propuesta por Albert Einstein en 1905. Por este trabajo, recibió el premio Nobel de Física. Hoy en día, las aplicaciones de los modelos matemáticos del movimiento browniano son ubicuas, en el tratamiento de imágenes médicas, la robótica, economía, construcciones fractales, simulaciones gráficas, ecología, toma de decisiones, propagación de aerosoles, etc. Matemáticamente, podemos mirar el movimiento browniano como un paseo al azar en que la partícula paseante da en cualquier instante un salto de dirección y magnitud arbitraria.

En lo que sigue, estudiaremos, a mano, un análogo discreto de este tipo de movimiento, en que nuestra partícula da saltos de la misma magnitud a sitios prescritos de su espacio ambiente. En particular, consideraremos el caso de un espacio con sólo tres sitios, y veremos que incluso este fenómeno matemático permite modelar sistemas interesantes de la vida cotidiana.

1.2. *Problemática probabilística*

Podríamos introducir el cálculo de probabilidades, con la consigna “paseando al azar”, es decir, interesándose en el devenir de un ser u objeto que se pasea al azar por algún espacio o estructura. Uno ejemplo simple e imaginable de paseo al azar es el siguiente, que proponemos como un módulo de trabajo dirigido al alumno de enseñanza media.

Una pulga se pasea alegremente por los vértices de un triángulo equilátero, saltando cada vez desde un vértice a cualquiera de los otros dos, con igual probabilidad. ¿Si la pulga reside inicialmente en el vértice superior del triángulo (como muestra la figura 1), dónde estará después de un salto, dos saltos, tres saltos,...10 saltos, 100 saltos, muchísimos saltos? ¿A qué vértice(s) conviene apostar a la larga?

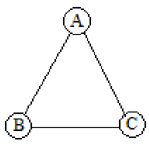


Fig. 1. La pulga sobre el triángulo ABC.

1.3. *Proceso determinístico*

Para resolver la misma problemática desde un punto de vista determinista, imaginamos que en lugar de la pulga saltarina y aleatoria, nos encontramos con la siguiente situación, en la que no se ve azar, sino que un futuro totalmente determinado: Una partícula, de masa 1, se encuentra en uno de los vértices de nuestro triángulo y, de pronto, se parte (“se fisiona”, en lenguaje elegante) en dos mitades iguales, que van a parar, cada una, a uno de los otros dos vértices. En seguida, cada mitad de partícula sufre el mismo destino, partiéndose en dos mitades, que van a aterrizar a los otros vértices, y así sucesivamente. Este proceso de fisión continúa indefinidamente. ¿Cuál es la repartición de masa que se va produciendo en los vértices del triángulo, instante tras instante. ¿Qué ocurre a la larga?

¿Ves alguna similitud entre los dos problemas? Podrías haber pensado que como la pulga no sabe a cuál de los otros dos vértices saltar, se divide en dos, de modo que cada media pulga va a cada uno de los vértices restantes. Notar que las fracciones de pulga, o de partícula, que van quedando en los distintos vértices te dan exactamente las probabilidades de presencia en ellos la pulga en dichos vértices. ¿Estarás de acuerdo entonces que el hecho de visualizar media pulga en un vértice equivale al hecho que al observar muchas veces la pulga, después de un salto, la encontremos aproximadamente la mitad de las veces en ese vértice?

Como ves, si no te gusta pensar en términos probabilistas, puedes visualizar la situación como un problema determinista, donde el destino de cada pedacito de partícula está totalmente determinado. No nos costaría mucho comenzar a graficarlo, anotando en cada vértice del triángulo equilátero la porción de partícula allí presente, instante tras instante, como en la figura 2.

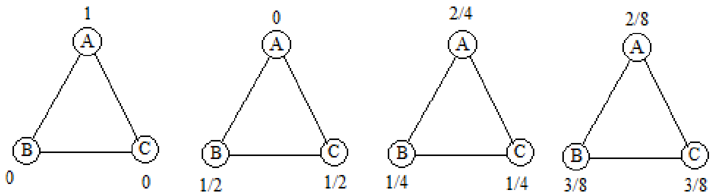


Fig. 2. Movimiento determinista de la partícula.

1.4. *Primera aproximación al problema probabilístico*

Si etiquetamos por A el vértice superior del triángulo, por B el inferior izquierdo y por C el inferior derecho, obtenemos la tabla 1, en que indicamos sólo la probabilidad de encontrar la pulga en los vértices A y B, pues la probabilidad de encontrarla en el vértice C es siempre igual a la de encontrarla en el vértice B (por simple simetría del recorrido).

Salto n	*P(Saltar a A)*	*P(Saltar a B)*	*P(Saltar a C)*
0	1/1	0/1	0/1
1	0/2	1/2	1/2
2	2/4	1/4	1/4
3	2/8	3/8	3/8
4	6/16	5/16	5/16
5	10/32	11/32	11/32

Tabla 1. Muestra de probabilidad por saltos.

Si graficamos estos datos, nos empezamos a dar cuenta que las probabilidades en cuestión, o bien la porción de partícula, en cada vértice tienden a equipararse, acercándose cada vez más al valor 0,33333.... = 1/3. Nota que la suma total de las tres probabilidades o de las tres porciones de partícula debe dar siempre 1 (esto se podría llamar "ley de conservación de la pulga"). Además, la probabilidad de estar en el lugar B, sigue una secuencia recursiva. El denominador es la potencia *n*-ésima de 2, mientras que, el numerador sigue la sucesión 1, 1, 3, 5, 11,… (conocida como sucesión de Jacobsthal). Podemos escribir cada uno de estos términos del numerador en función del término anterior, según la regla:

$$b_n = 2b_{n-1} + (-1)^{n-1}, \forall n \geq 0 \qquad (1)$$

Encontrar b_n en función del salto *n*-ésimo, equivale a mirar el desarrollo numérico de la recurrencia (1), y deducir una regla en función del número de saltos que realiza la pulga entorno a los vértices del triángulo ABC.
Miremos a simple vista lo descrito en (1):

$$b_1 = 1 = 2^{1-1}$$
$$b_2 = 2b_1 - 1 = 2 - 1 = 2^{2-1} - [2^{2-2}]$$
$$b_3 = 2(2b_1 - 1) + 1 = 2^2 b_1 - 2 + 1 = (2^{3-1} + 2^{3-3}) - [2^{3-2}]$$
$$b_4 = 2(2^2 b_1 - 2 + 1) - 1 = 2^3 b_1 - 2^2 + 2 - 1 = (2^{4-1} + 2^{4-3}) - [2^{4-2} + 2^{4-4}]$$
$$b_5 = 2(2^3 b_1 - 2^2 + 2 - 1) + 1 = 2^4 b_1 - 2^3 + 2^2 - 2 + 1 = (2^{5-1} + 2^{5-3} + 2^{5-5}) - [2^{5-2} + 2^{5-4}]$$

Notar que lo anterior depende de la paridad de *n*; determinando la cantidad de sumandos que se restan en cada caso al final de la serie. Para *n* par, el término *n*-ési-mo está dado por:

$$b_n = \left(\sum_{k=1,3,\dots,n-1} 2^{n-k} \right) - \left[\sum_{k=2,4,\dots,n} 2^{n-k} \right], \tag{2}$$

y si *n* es un número impar:

$$b_n = \left(\sum_{k=1,3,\dots,n} 2^{n-k} \right) - \left[\sum_{k=2,4,\dots,n-1} 2^{n-k} \right]. \tag{3}$$

A partir de este resultado podemos calcular en función de *n*, la probabilidad de que la Pulga se ubique en el lugar B, todo esto, siguiendo una fórmula matemáticamente aceptable desde un punto de vista exploratorio y experimental. Primero se divide el término *n*-ésimo por 2^n, para seguir la regla sugerida en la tabla 1, y completando el minuendo de la diferencia (2).

En el caso *n* par

$$P(\textit{saltar } B) = \frac{b_n}{2^n} = \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k \right) - 2\left[\sum_{k=2,4,\dots,n} \left(\frac{1}{2}\right)^k \right],$$

el primer término es la completación de suma y se restan a él, los elementos de exponente par; estos últimos agrupados dos veces. Considerando un cambio de variable en la segunda suma (por simple factorización del exponente), obtenemos:

$$\frac{b_n}{2^n}=\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k\right)-2\left[\sum_{k=1}^{n/2}\left(\frac{1}{4}\right)^k\right]=\frac{1}{3}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right).$$

(4)

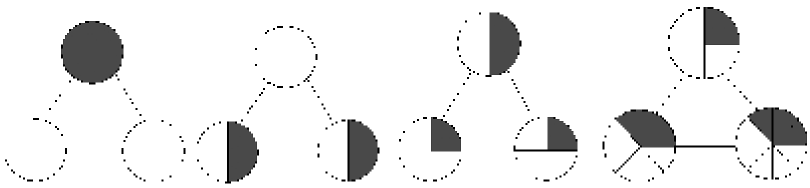
El caso impar es análogo, pues podemos resolver siguiendo el mismo mecanismo, y la respuesta considera que la probabilidad de saltar al vértice B, está dada por (4), si n es un número par e impar. De esto, la probabilidad de estar en el vértice A, es uno menos dos veces la probabilidad anterior, es decir, $\frac{1}{3}\left(1+2\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$.

Para la problemática del juicio final, sobre la cantidad de salto, existe una relación poco estudiada en la escolaridad, reflejo del concepto de límite sobre la sucesión obtenida, y cuyo valor representa una respuesta consistente para la memoria de nuestra pulga. Esto deduce que la probabilidad de estar en el lugar B o C, tiene valor 1/3, cuando *n* tiende a infinito. Aparentemente, desde un punto de vista práctico, la respuesta es poco sugerente, sin embargo, en el ámbito determinista, no tiene discusión.

2. Representaciones algebraicas y analíticas

2.1. *Utilización del concepto infinito en secundaria*

En el caso determinista, podemos utilizar la representación geométrica de la distribución de masa en cada vértice, como una porción del círculo (indicado en la figura 3). Las fracciones pintadas, completan un círculo (o unidad), y la parte pintada en el lugar B y C es la misma en cada uno de los saltos de la pulga. Además, mientras aumentan los saltos, se distribuyen las fracciones de forma equitativa; según ley de conservación de masa, siempre es un círculo pintado, pero las fracciones que lo completan tienden a parecerse en el infinito. Trabajar sobre este precedente, no es tan sencillo como uno podría imaginar, si las herramientas utilizadas son discretas y poco representativas de la situación problema.



Inicio salto 1 salto 2 salto 3

Fig. 3. Representación geométrica

Trata de un círculo subdividido en función de las potencias de dos, cuya porción achurada tiende a equipararse, al considerar valores más altos en los saltos de la pulga. Nuestro objetivo de estudio es aproximar una respuesta al paso de información pérdida entre la situación inicial de la pulga o la materia de masa 1, y su comportamiento, después del recorrido que realiza en una cantidad indeterminada de tiempos o saltos. Para ello, presentamos un instrumento que garantiza, bajo ciertos parámetros, la distribución correcta de estos temas, como mediación entre el álgebra elemental y los conceptos avanzados de matemática universitaria que han sido explorados.

2.2. *¿Aprendemos álgebra o análisis matemático?*

Desde el análisis matemático, el estudio de las series de Taylor, nos permite coordinar el comportamiento gráfico de una función, dadas sus propiedades de diferenciabilidad en un punto del dominio. En nuestro caso, es posible establecer una relación directa entre el concepto recursivo y la aproximación funcional del caso pulga. Primero, descubramos un patrón en la sucesión 1, 0, 2, 2, 6, 10, 22,… que aparece en la tabla 1, para la probabilidad de que nuestra pulga se ubique en el vértice A.

Dada la relación:

$$a_n = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n = 1 \\ a_{n-1} + 2a_{n-2}, & n \geq 2 \end{cases},$$

(5)

en función del parámetro n-saltos, define una función polinomial f(x) de grado infinito, que corresponde a la suma de los términos $a_n x^n, \forall n \geq 0$. Bajo esta condición, y por simple desarrollo algebraico, la función f satisface:

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n = 1 + \sum_{n\geq 2} a_n x^n = 1 + \sum_{n\geq 2} a_{n-1} x^n + 2\sum_{n\geq 2} a_{n-2} x^n \,. \quad (6)$$

Despejando (6) en función de x, obtenemos la relación

$f(x)=(1-x)+xf(x)+2x^2f(x)$, donde f(x) aparece con asíntotas verticales en x=-1 y x=1/2. Recordemos, que una expansión de Taylor verifica el término a_n en función de la *n*-ésima derivada de f evaluada en cero, sobre n factorial. Sin embargo, si resolvemos dichos términos a mano, obtenemos nuevamente la sucesión de Jacobsthal, que aparece en la primera sección.

Esto, no ayuda en nuestro análisis, y se hace necesario una descomposición parcial de la función f(x), como:

$$f(x)=\frac{1-x}{(x+1)(1-2x)}=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{1-2x},$$

(7)

donde a y b son números reales. Es fácil notar que a=2/3 y b=1/3. Finalmente, todo se reduce a estudiar las funciones de descomposición para f(x), las que son series de potencias, centradas en cero, y deducidas de forma general sobre la suma de $x^n, \forall n \geq 1$. Es así, como obtenemos:

$$f(x)=\frac{1}{3}\left[\frac{2}{1-(-x)}+\frac{1}{1-(2x)}\right]=\frac{1}{3}\left[2\sum_{n\geq 0}(-x)^n+\sum_{n\geq 0}(2x)^n\right]=\frac{1}{3}\left[\sum_{n\geq 0}[2(-1)^n+2^n]x^n\right],$$

y la sucesión que regula el comportamiento analítico de f(x) es precisamente

$$a_n=\frac{2^n+2(-1)^n}{3}, \forall n \geq 0.$$

(8)

Nuevamente, la aproximación por Taylor nos permite desarrollar una regla general que es múltiplo de 1/3, y que al ser dividida por la potencia n-ésima de 2, representa un factor neutro en el producto de probabilidad.

2.3. *Desde el álgebra matricial*

Una deducción entorno al uso de sistemas lineales, aproxima nuestro problema de la pulga, por relación entre probabilidades en un tiempo determinado, dado su estado anterior. Si representamos los estados en el tiempo (n) de la pulga en los vértices A, B y C, por a_n, b_n y c_n respectivamente, obtenemos una representación algebraica, para su probabilidad en el tiempo (n+1):

$$S=\begin{cases} a_{n+1}=0\cdot a_n+\frac{1}{2}b_n+\frac{1}{2}c_n \\ b_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+0\cdot b_n+\frac{1}{2}c_n \\ c_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2}b_n+0\cdot c_n \end{cases} \qquad (9)$$

En este caso, el vector de estado es (a_n, b_n, c_n), y su matriz de transición es simétrica, de ceros en su diagonal y ½ en los demás lugares. Para analizar el comportamiento del sistema, utilicemos el vector inicial $(1,0,0)$ por tabla 1. De esto, la matriz de transición, define una transformación lineal invertible y diagonalizable. Su polinomio característico tiene valores propios -1/2 y 1, y los subespacios propios asociados son $\langle(-1,1,0),(-1,0,1)\rangle$ y $\langle(1,1,1)\rangle$ respectivamente. Precisamente, son estos vectores los que determinan la matriz conjugada G a P, tal que $G^{-1}PG = D$, donde D es la matriz diagonal [-1/2, -1/2, 1]. Un simple cálculo aritmético, nos permite determinar la potencia n-ésima de la matriz de transición, que define el comportamiento que deseamos predecir. De la forma, generar una argumentación sobre el desarrollo de la ecuación $P = GDG^{-1}$, equivale a considerar las potencias:

$$P^n = GD^nG^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2^n & 0 & 0 \\ 0 & -1/2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & -1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix},$$

cuyo valor, según el estado inicial, respeta la primera columna del producto anterior, y es precisamente un análisis análogo a lo realizado hasta ahora:

$$(a_n, b_n, c_n) = \frac{1}{3}\left(1+2\left(-\frac{1}{2}\right)^n, 1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n, 1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

(10)

2.4. *A modo de conclusión*

Un vector propio del sistema definido por la matriz P, es precisamente $(1/3, 1/3, 1/3)$, lo que permite analizar el comportamiento estable sobre la igualdad que negamos a creer en nuestro problema. Por ejemplo, sobre una situación real, tres personas que tienen un vaso con un litro de bebida, y deciden repartir equitativamente, a sus vecinos cercanos en igual porción, tienden a equipar la entrega, aunque la fisión no resulte tan exacta (al igual que el concepto de infinitud). Este es un resultado discreto, pero no menos interesante de las representaciones de un grupo.

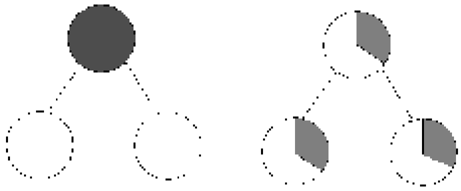


Fig. 4. Resultado final de repartición

Al descomponer la transformación, se construye algebraicamente una representación lineal natural asociada a la acción del grupo simétrico de 3 elementos, sobre los vértices del triángulo equilátero ABC. En efecto, sean $r = (123)$ y $r^2 = (132)$ las rotaciones del grupo, cuyas matrices asociadas son:

$$[\rho_r] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ y } [\rho_{r^2}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Es precisamente, la matriz P una semisuma de las matrices anteriores, como ocurría en el primer tramo de solución. La matriz es reflejo de cada transición por opción a los dos vecinos cercanos, aplicados a la rotación del triángulo entorno a su baricentro, en dirección antihoraria y viceversa.

Una pregunta interesante, sería generalizar para un polígono de n lados, e incluso sugerir una representación piramidal, es decir, la distribución de un peso por los nodos o vértices del tetraedro regular, en iguales condiciones a las descritas en este trabajo.

Agradecimientos

Este trabajo es resultado de una exploración práctica, del curso de Álgebra, en el programa de matemáticas, de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile. Agradezco a mi profesor, Jorge Soto-Andrade, sus comentarios y sugerencias sobre el tema.

3. Referencias bibliográficas

1. Brousseau, G., Los diferentes roles del maestro. En C. Parra e I. Sáiz, (compiladores), *Didáctica de las matemáticas: aportes y reflexiones*. Buenos Aires, Argentina, Paidos Educador, 1988.

2. Duval, R., *Semiosis y pensamiento humano*. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Universidad del Valle, Colombia, 1999.

3. González, P., Soto-Andrade, J., *Matemática Activa*, Tercero año medio, Ministerio de educación, Chile. Editorial Marenostrum, Santiago 2002.

Instituto de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.
Valparaíso, Chile.
gamaliel.cerda@gmail.com