ANÁLISIS DE UN PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN DESDE EL ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO.

Sandra Graciela Baccelli, Sergio Anchorena, Stella Maris Figueroa, Gloria Prieto

Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Mar del Plata, Argentina.

sgbaccel@mdp.edu.ar

sbaccelli@gmail.com

pollo_mdp@yahoo.com

Resumen

El objetivo de este trabajo es realizar un análisis exploratorio descriptivo de las dificultades de los alumnos para resolver problemas de optimización a fin de mejorar las estrategias de enseñanza de este tema. El análisis se basa en el desempeño de un grupo de 38 estudiantes de Ingeniería de la UNMDP. Se utiliza como instrumento de recolección de datos un protocolo diseñado para operacionalizar los conceptos del Enfoque Ontosemiótico de la Instrucción y la Cognición Matemática que pretende captar la configuración epistémica y a las configuraciones cognitivas asociadas al problema. Los alumnos que resuelven satisfactoriamente este problema representan un bajo porcentaje, los resultados del análisis muestran que las dificultades detectadas en las resoluciones se encuentran principalmente en algunos de los procedimientos empleados, se identifican aquellos procedimientos críticos en los que se puede intervenir para lograr un mejor desempeño a la hora de resolver este tipo de problemas.

Introducción

Los problemas que los ingenieros deben resolver implican, cómo tarea específica, optimizar la productividad de los recursos disponibles, dicha optimización consiste el lograr la producción máxima, utilizando una dotación fija de recursos, o bien obtener un nivel de producción dado utilizando la mínima cantidad de recursos.

En este contexto, los contenidos de matemática, referidos a máximos y mínimos relativos en el estudio de funciones, que se tratan en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Mar del Plata, en la asignatura Análisis Matemático A, se vinculan directamente con las competencias y capacidades necesarias para llevar adelante exitosamente este tipo de tarea.

Es por eso que resulta preocupante que, en primer año de las carreras de ingeniería, cuando se les proponen a los alumnos y alumnas ciertos problemas que requieren realizar tareas de optimización, la mayoría de ellos fracase en su resolución. Este es el caso de Análisis Matemático A, materia que se cursa en el primer y segundo cuatrimestre de primer año, donde una vez estudiados los conceptos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos se proponen problemas de optimización que aplican dichos conceptos. Es notorio observar la dificultad en el planteo, el análisis y la resolución de estos problemas, que luego al momento de las evaluaciones parciales se evidencia en la no resolución de los ejercicios que involucran los problemas de optimización.

Este trabajo forma parte de la investigación realizada en el marco de una tesis de maestría para optar por el grado de Magíster en Enseñanza de la Matemática en el Nivel Superior de la Universidad Nacional de Tucumán.

En este marco se plantea el siguiente interrogante como pregunta directriz de la investigación de la cual forma parte este trabajo: ¿Cuáles son las causas que determinan las dificultades de los alumnos para resolver problemas de optimización en un curso de cálculo diferencial?

Para dar respuesta a esta pregunta es necesario indagar en profundidad sobre diferentes aspectos o dimensiones en un proceso de instrucción matemática. En esta etapa se realizó un análisis exploratorio descriptivo destinado a determinar en que práctica matemática se producen las dificultades que obstaculizan la resolución de problemas de optimización, cuyos resultados se exponen en este trabajo. Dicho análisis se focalizó en las soluciones a un problema de optimización efectuadas por estudiantes de Ingeniería de la Universidad Nacional de Mar del Plata, tomando algunos elementos utilizados en investigaciones vinculadas a este tema (Malaspina, 2007)

La complejidad que subyace en dar respuesta a la pregunta directriz de la investigación se aborda utilizando algunas de las herramientas que provee el Enfoque Ontosemiótico de la Instrucción y la Cognición Matemática (EOS), poniendo el énfasis en los significados que los distintos actores asignan a los objetos matemáticos.

A continuación se presentan algunas de las herramientas del marco teórico que sustenta esta investigación.

Fundamentación

El Enfoque Ontosemiótico (EOS) de la cognición e instrucción matemática (Godino, Batanero y Font, 2008) pretende explicar y valorar muchos de los sucesos que se producen en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, teniendo en cuenta el triple aspecto de la actividad matemática como actividad de resolución de problemas socialmente compartida, como lenguaje simbólico y como sistema conceptual lógicamente organizado.

Uno de los conceptos principales de este enfoque es el de *práctica matemática,* concebida como toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas (Godino y Batanero, 1994). Las prácticas pueden ser idiosincrásicas, de una persona, o compartidas en el seno de una institución. En estas prácticas matemáticas intervienen objetos, que pueden ser *ostensivos* (símbolos, gráficos, etc.) y *no ostensivos* (conceptos, proposiciones, etc.) y que son representados en forma textual, oral, gráfica o incluso gestual. El significado de un objeto matemático se considera *institucional* cuando emerge de un sistema de prácticas matemáticas en un campo de problemas. Por otro lado, el significado de un objeto se considera *personal* cuando emerge de la práctica de una persona, y está igualmente asociado a la resolución de cierto tipo de problemas en una institución, donde las personas se encuentran involucradas en la resolución de una misma clase de situaciones problemáticas; el compromiso mutuo con la misma problemática conlleva la realización de unas prácticas sociales que suelen tener rasgos particulares, y son generalmente condicionadas por los instrumentos disponibles en la misma, sus reglas y modos de funcionamiento. "Las instituciones se conciben como *"*comunidades de prácticas*"*, e incluyen, por tanto, las culturas, grupos étnicos y contextos socioculturales. Se asume, por tanto, el postulado antropológico de la relatividad socioepistémica de los sistemas de prácticas, de los objetos emergentes y los significados" (Godino, Batanero y Font, 2008, p.5)

Los objetos que emergen de las prácticas van sufriendo transformaciones a lo largo del tiempo, incrementando el campo de problemas y modificando el sistema de prácticas para ampliar sus significados. En un primer nivel, Godino (2008), propone los siguientes tipos de objetos denominados primarios:

"• *Lenguaje* (términos, expresiones, notaciones, gráficos, etc.) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual, etc.)

• *Situaciones-problemas* (aplicaciones extra-matemáticas, ejercicios, etc.)

• *Conceptos- definición* (introducidos mediante definiciones o descripciones) (recta, punto, número, media, función, etc.)

• *Proposiciones* (enunciados sobre conceptos)

• *Procedimientos* (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo, etc.)

• *Argumentos* (enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o de otro tipo, etc.)" (p. 7)

En particular, estos seis tipos de objetos primarios amplían la tradicional distinción entre entidades conceptuales y procedimentales, al considerarlas insuficientes para describir los objetos que intervienen y emergen de la actividad matemática. Estos objetos se relacionan formando *configuraciones,* pensadas como redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas, incluidas las relaciones que se establecen entre los mismos (Figura 1). Estas configuraciones pueden ser *epistémicas,* desde una mirada institucional, o *cognitivas,* desde un punto de vista personal. Los *sistemas de prácticas* y las *configuraciones* se proponen como herramientas teóricas para describir los conocimientos matemáticos, en su doble faceta personal e institucional. El análisis de estas configuraciones informa sobre la "anatomía" de la actividad matemática.

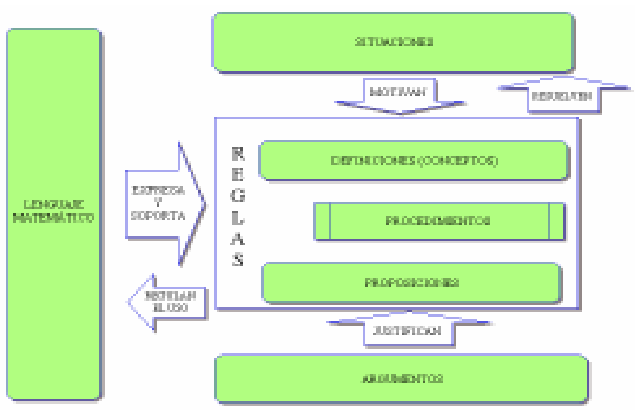

Figura 1. Componentes y relaciones en una configuración de objetos.
Fuente: Font y Godino, 2006.

Desarrollo y metodología

El problema de optimización utilizado para la investigación se presenta en el Cuadro 1. El mismo fue administrado a 38 alumnos de un primer curso de Análisis Matemático de las carreras de Ingeniería de la Universidad Nacional de Mar del Plata. Al momento de la toma de los datos ya habían concluido las actividades teóricas y prácticas referidas al tema en cuestión.

Determinar la mayor área que puede encerrar un rombo cuyo lado mide 1 metro.
(Recordar que un rombo tiene todos sus lados congruentes y su área es la mitad del producto de sus diagonales).

Cuadro 1. Problema de optimización propuesto.

Para realizar un análisis cualitativo de las soluciones obtenidas de los alumnos, a partir de la resolución de dicho problema efectuada por expertos, uno de ellos docente de la asignatura Análisis Matemático y el otro docente de Estadística e investigador de esta universidad, se confeccionó la configuración epistémica, presentada en la Tabla 1.

Objetos matemáticos	**Especificaciones**
Lenguaje	✓ **Gráfico:** representación del rombo cómo figura de análisis, trazado de sus diagonales. ✓ **Términos y expresiones:** longitud, área, cateto, hipotenusa, triángulo rectángulo. ✓ **Notación :** f(x) como función área, f'(x) y f´´(x) como derivada primera y segunda respectivamente. Lados y diagonal mayor y menor ✓ **Símbolos**: números, +, -, ( ) , [ ], =, raíz cuadrada, $\Rightarrow$, <, >. El ostensivo "{" que abarca la expresión que representa el área y la de la aplicación del teorema de Pitágoras necesarios para el armado de la función.
Situación – problema	✓ Enunciado del problema de optimización
Conceptos	✓ **Previos**: Están implícitas las definiciones de rombo y de área. El enunciado se da una parte de la definición, pues no se incluye que es un cuadrilátero paralelogramo, sólo se aclara que todos sus lados son iguales, característica necesaria para la resolución del problema. Respecto del área, se da la definición de la respectiva fórmula para el rombo, en forma coloquial, no simbólica, lo cual es apropiado al no haber gráfico en el enunciado sobre el cual referenciar los símbolos que aparecieran. Derivada primera y segunda. Máximo relativo. ✓ **Emergentes**: Área máxima de un rombo para un lado de longitud dada.
Proposiciones	✓ El área de un rombo es la mitad del producto de sus diagonales ✓ La suma del cuadrado de los catetos de un triángulo rectángulo es igual al cuadrado de la hipotenusa. ✓ Criterio de la derivada segunda para la obtención de puntos extremos. ✓ Las diagonales de un rombo se cortan en su punto medio en forma perpendicular.
Procedimientos	✓ Cálculo de la derivada primera y segunda de una función por medio de reglas. ✓ Operaciones aritméticas elementales ✓ Expresar en función de una variable la función área. ✓ Cálculo del área
Argumentos	✓ La longitud de un lado es un valor numérico positivo. ✓ Si la derivada primera en un punto crítico es menor que cero entonces en ese punto existe un máximo relativo. ✓ Expresar la función área en una sola variable. ✓ La medida de la diagonal que hace máxima el área de un rombo de lado 1cm determina la medida de la otra diagonal y específicamente su área.

Tabla 1. Configuración epistémica del problema de optimización propuesto.

El protocolo para analizar el desempeño de los alumnos y las alumnas fue diseñado, a partir de la configuración epistémica, tomando como base el modelo presentado por Malaspina (2007). El mismo fue utilizado como una herramienta para registrar los procedimientos y argumentos empleados por los estudiantes en sus respuestas al contrastarlos con la configuración epistémica. Se presenta una síntesis del protocolo en la Tabla 2.

La información que se obtiene del protocolo utilizado se puede analizar desde diferentes aspectos de acuerdo al tipo de objeto primario que se quiere observar y analizar. En este trabajo se presentan los resultados obtenidos al observar los procedimientos en las configuraciones cognitivas, basadas en la configuración epistémica previamente elaborada.

Hallan lo pedido	Si	
	No	
Representa gráficamente	No	
	Si	Correctamente
		Incorrectamente
Procedimientos Utilizados	Plantea la función área	Si
		No
	Plantea la condición	Si
		No
	Expresa la función área en una variable.	Si
		No
	Deriva la función área.	Si
		No
Argumenta por que el valor obtenido es óptimo	No	
	Si	Correctamente
		Incorrectamente

Tabla 2. Síntesis del protocolo utilizado para el análisis.

Análisis de los resultados

La información que se obtiene sobre la base del protocolo utilizado se puede analizar desde diferentes aspectos de acuerdo al tipo de objeto primario que se quiere observar y analizar.

Se consideró como respuesta satisfactoria la de aquellos alumnos que encontraron el punto crítico, sin tener en cuenta que no argumentan por qué el valor obtenido es máximo. Bajo estas condiciones sólo el 34% resuelve correctamente el problema, lo que resulta un porcentaje considerablemente bajo. Es notable observar que el 99% efectúa un gráfico del rombo como figura de análisis, el 47% lo hace correctamente y la mayoría de los que representan incorrectamente consideran al rombo, a priori, como un cuadrado en cuyo caso consideran las diagonales congruentes.

Sin embargo más allá de este resultado general y del tipo de gráfico realizado, es destacable el análisis de los procedimientos involucrados en la resolución, que van determinando la secuencia de pasos que conducen a la resolución final.

En la Tabla 3 se detallan los procedimientos estudiados con los correspondientes porcentajes de resoluciones en las cuales aparecen, calculados éstos sobre el total de alumnos a los que se les administró el instrumento.

<table>
<tr><td rowspan="9">Total
100%</td><td colspan="5">No efectúa procedimientos
21%</td></tr>
<tr><td rowspan="8">Efectúa procedimientos
79%</td><td colspan="4">Sólo plantean la función área
45%</td></tr>
<tr><td colspan="4">Sólo plantean la condición
0%</td></tr>
<tr><td rowspan="6">Plantean función área y la condición
34%</td><td rowspan="3">Expresan la función área en una variable
18%</td><td rowspan="2">Derivan
18%</td><td>Correctamente
13%</td></tr>
<tr><td>Incorrectamente
5%</td></tr>
<tr><td colspan="2">No derivan
0%</td></tr>
<tr><td rowspan="3">No expresan la función área en una variable
16%</td><td rowspan="2">Derivan
0%</td><td>Correctamente
0%</td></tr>
<tr><td>Incorrectamente
0%</td></tr>
<tr><td colspan="2">No Derivan
16%</td></tr>
</table>

Tabla 3. Procedimientos de las configuraciones cognitivas y sus correspondientes porcentajes.

Es necesario aclarar, para tener una real dimensión de lo que acontece, que en las clases teóricas se muestra un ejemplo de resolución de estos problemas, en las prácticas sólo se realizan consultas de los pocos problemas planteados en la guía. Como consecuencia, el resultado obtenido en las resoluciones replica una situación similar a la que se observa en la resolución de estos problemas en exámenes parciales.

En la Figura 2 se muestra la resolución del Alumno 22 con su respectivo análisis y en la Tabla 4 la correspondiente configuración cognitiva.

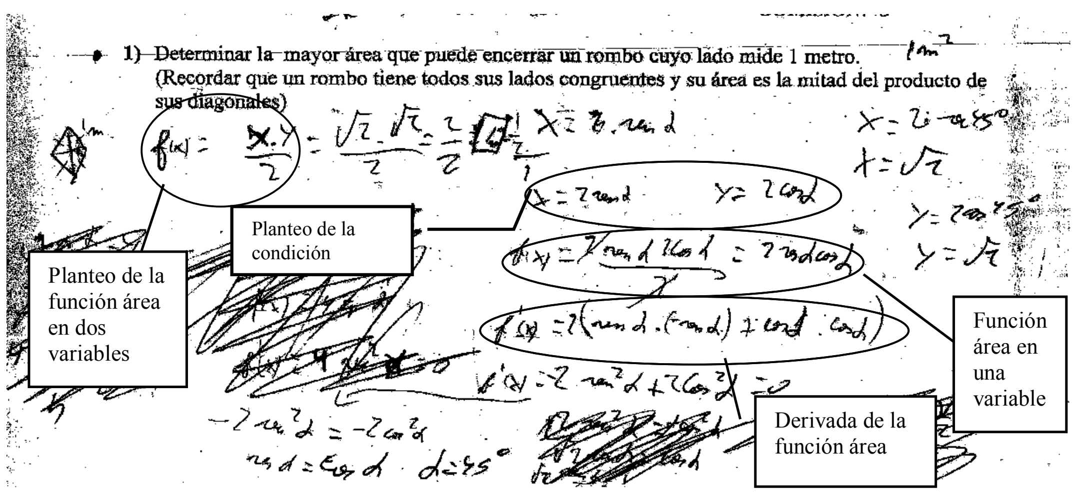

Figura 2. Resolución del Alumno 22 con sus comentarios

En la resolución que presenta el Alumno el planteo de la función área está expresada en función de las diagonales. Es notable observar que recurre a conceptos trigonométricos previos para plantearla en función de una variable, utilizando el ángulo determinado por la diagonal y uno de sus lados. Deriva en función de ese ángulo a pesar de mostrar la expresión derivada en x.

Recurre a nuevamente a herramientas de trigonometría para encontrar el punto crítico. Da la respuesta correcta pero no argumenta si dicho valor hace máxima el área.

Una observación a resaltar es que el alumno utiliza la expresión f(x) para denominar la función que en realidad está expresada en términos de x e y. Luego la escribe en función de α para expresarla y derivarla.

Objetos matemáticos	**Especificaciones**
Lenguaje	✓ **Grafico:** Dibuja un rombo, destacando que es una figura con lados congruentes, traza las diagonales, indica la medida del lado con su unidad de medida y el ángulo α formado por una diagonal y el lado. ✓ **Términos y expresiones:** Área en forma no ostensiva al indicar el resultado (1 m^2). Expresión de la función a maximizar. ✓ **Notación** f(x) cómo función de dos variables x e y (se sobreentiende que son sus diagonales), f'(x) cómo su derivada pero no esta en función de x, si bien lo indica claramente que está en función de alfa. ✓ **Símbolos**: números, +, -, ( ), =, raíz cuadrada, alfa, °.
Situación – problema	✓ Enunciado del problema de optimización
Conceptos	✓ **Previos**: Definición y propiedades del rombo. Derivada primera. Relación seno y relación coseno. Relación entre seno y coseno de un mismo ángulo. ✓ **Emergentes**: Área máxima de un rombo para un lado de longitud dada.
Proposiciones	✓ El área de un rombo es la mitad del producto de sus diagonales ✓ Las diagonales de un rombo se cortan en su punto medio en forma perpendicular. Implícita. El seno y el coseno de un ángulo convexo coinciden para un ángulo de 45°
Procedimientos	✓ Uso de una figura de análisis para el planteo del problema ✓ Cálculo de la derivada primera. ✓ Operaciones aritméticas elementales. ✓ Cálculo de seno y coseno de 45° en forma exacta. ✓ Expresar en función de una variable el área, aunque no es la indicada como tal. ✓ Cálculo del área
Argumentos	✓ Expresar el área en función de una única variable. ✓ El punto crítico de la función a maximizar, hace máxima el área .

Tabla 4. Configuración cognitiva del Alumno 22

En la Figura 3 se muestra la resolución del Alumno 2 con su respectivo análisis y en Tabla 5 la correspondiente configuración cognitiva.

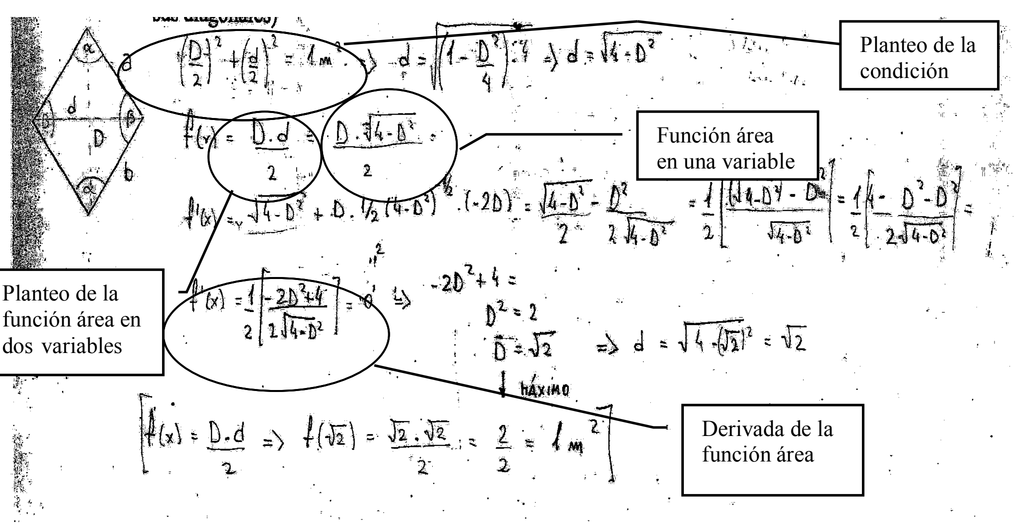

Figura 3 Resolución del Alumno 2 con sus comentarios

La resolución que muestra el Alumno 2 sigue una línea "tradicional", en cuanto aplica los conceptos desarrollados en la materia para la aplicación de la derivada, expresa correctamente la función a maximizar y utiliza el criterio de la derivada primera para encontrar el punto crítico que asume es el máximo, pero no argumenta por qué lo es. Es notorio observar cómo, al igual que el Alumno 22, indica las funciones y sus derivadas en términos de x, sin embargo deriva respecto de la variable "D", que representa a una de las diagonales.

En ambos análisis se observa una manifiesta disparidad o desajuste entre el significado que le atribuyen estos alumnos a la expresión f(x) con respecto al significado epistémico. Sin embargo esto no parece representar una dificultad para la resolución del problema. El generalizado uso de la expresión f(x) como representación simbólica de la palabra "función", por ejemplo en planillas de cálculo, podría ser una de las razones de la ausencia de conflicto.

Objetos matemáticos	**Especificaciones**
Lenguaje	✓ **Gráfico:** representa el rombo indicando sus lados con las letras a y b, sus ángulos opuestos congruentes con α y β, sus diagonales mayor y menos con d y D respectivamente. ✓ **Términos y expresiones:** longitud, área, cateto, hipotenusa, triángulo rectángulo. Área en forma no ostensiva al indicar el resultado (1 m^2). Expresión de la función a maximizar. ✓ **Notación**: f(x) cómo función de dos variables D y d (sus diagonales), f'(x) cómo su derivada expresada en función de la diagonal mayor. ✓ **Símbolos**: números, +, -, ( ) , [ ], =, raíz cuadrada, $\Rightarrow$
Situación – problema	✓ Enunciado del problema de optimización
Conceptos	✓ **Previos**: Están implícitas las definiciones de rombo y de área. Derivada primera. Punto crítico. ✓ **Emergentes**: Área máxima de un rombo para un lado de longitud dada.
Proposiciones	✓ El área de un rombo es la mitad del producto de sus diagonales ✓ La suma del cuadrado de los catetos de un triángulo rectángulo es igual al cuadrado de la hipotenusa. ✓ Punto crítico como el valor de la variable que iguala a cero la derivada primera ✓ Las diagonales de un rombo se cortan en su punto medio en forma perpendicular.
Procedimientos	✓ Cálculo de la derivada primera de una función por medio de reglas. ✓ Uso e una figura de análisis para el planteo del problema ✓ Operaciones aritméticas elementales ✓ Expresar en función de una variable la función área. ✓ Cálculo del área
Argumentos	✓ La longitud de un lado es un valor numérico positivo. ✓ Si la derivada primera en un punto crítico es menor que cero entonces en ese punto existe un máximo relativo. ✓ Expresar la función área en una sola variable. ✓ La medida de la diagonal que hace máxima el área de un rombo de lado 1cm determina la medida de la otra diagonal y específicamente su área.

Tabla 5. Configuración cognitiva del Alumno 2.

Conclusiones y recomendaciones

Si se tienen en cuenta los procedimientos empleados por los alumnos, presentados en la Tabla 3, más allá de haber resuelto el problema o no, y se los contrasta con la configuración epistémica, se encuentra que el 79 % de los alumnos plantea la función área, pero solo el 34% de los alumnos son capaces de plantear la función área y, simultáneamente, la condición dada, estableciendo mediante el Teorema de Pitágoras la relación entre las diagonales y el lado del rombo. De estos, sólo la mitad, el 18% logra expresar la función a optimizar en una variable y, todos los que plantean la función en una variable intentan derivar, haciéndolo correctamente solo dos tercios de éstos, que representan el 13% del total de alumnos. El planteo de la función en una variable se identifica en consecuencia como un "procedimiento clave" en la resolución de este tipo de problemas ya que, dados los conocimientos matemáticos en juego, es condición necesaria para la obtención de puntos extremos.

Algunos de los procedimientos y estrategias observadas en las resoluciones de los alumnos muestran un uso diferente de los objetos matemáticos, que no permite su comparación con la solución experta, como el Alumno 22, por la utilización de herramientas trigonométricas en los diferentes planteos.

Ninguno de los alumnos presenta una solución asignando diferentes valores a la variable x, realizando "tanteos". Ninguna de las soluciones presentadas corresponde al análisis de una función cuadrática, camino posible para la resolución. Es por ello, que se observa que este grupo de alumnos están muy orientados en la búsqueda de herramientas dentro del análisis matemático, dejando de lado los conocimientos previos desarrollados en su curso de ingreso.

A partir de los resultados obtenidos, pueden mirarse críticamente nuestras propias prácticas matemáticas. Estas prácticas, en general, priorizan la obtención de derivadas dejando en segundo plano la resolución de problemas, que debería ser la actividad central donde intervienen los objetos primarios, en especial los procedimientos fundamentales para dicha resolución. Esta misma situación suele trasladarse a los instrumentos de evaluación, mediante los cuales los alumnos logran la aprobación de un examen sin la resolución satisfactoria de problemas de optimización, siendo ésta la tarea más específica del ingeniero que apunta al desarrollo de una de las competencias formuladas en el documento final del XL Plenario del

Consejo Federal de Decanos de Ingeniería, CONFEDI (2006): “identificar, formular y resolver problemas de ingeniería”

Los resultados y conclusiones obtenidas impulsan a investigar en propuestas destinadas a contribuir a desarrollar estrategias de enseñanza y evaluación que por un lado contribuyan a identificar y aprender los procedimientos críticos, y, por otro, permitan identificar aquellas falencias que, de permanecer luego de la promoción de una materia, dificulten la adquisición de las competencias propias de la profesión del ingeniero.

Como ya se señaló, este trabajo presenta los primeros resultados de una investigación, que se centro especialmente en los procedimientos, en una próxima etapa, se pretende profundizar el análisis a partir de incluir otro de los objetos primarios propuestos por el EOS, las argumentaciones, que pretenden captar las justificaciones que alumnos y alumnas, al resolver un problema, utilizan para fundamentar su práctica matemática, pero esto, será objeto de futuras presentaciones.

Referencias bibliográficas

Consejo Federal de Decanos de Ingeniería (2006). Competencias Genéricas de Ingeniería – Documento final. En: http://www.confedi.org.ar/component/option,com_docman/task,cat_view/gid,20/Itemid,44/ (Recuperado el 2/12/2010)

Font, V y Godino, J. D. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educaço Matematica Pesquisa*, 8 (1), 67-98

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 14 (3), 325-355.

Godino, J. D., Batanero, C., Font, V. (2008). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Versión ampliada del artículo: Godino, J.D., Batanero, C. & Font, V. (2007). The Onto-Semiotic Approach to Research in Mathematics Education, *ZDM-The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127-135. Disponible en: http://www.ugr.es/local/jgodino.

Malaspina, U. (2007). Intuición, rigor y resolución de problemas de optimización. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 10(3), 365-399.