LA CONSTRUCCIÓN DE LA IMPLICACIÓN A TRAVÉS DE SUS DIFERENTES INTERPRETACIONES

Isabel García-Martínez – Marcela Parraguez
igarcia@ucn.cl – marcela.parraguez@pucv.cl
Universidad Católica del Norte – Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Chile.

Tema: Investigación didáctica
Modalidad: Taller (TA)
Nivel educativo: Terciario
Palabras clave: lógica, APOE, implicación

Resumen

Varios autores han reportado que estudiantes de los niveles secundario y terciario, presentan dificultades con la comprensión de la implicación, debido a sus diferentes interpretaciones (Durand-Guerrier, 2003; Epp, 2003; Ernest, 1984). Sin embargo, este es un tema que está presente (explícita o implícitamente) en los diferentes cursos de matemática.

Este trabajo se sustenta en la teoría APOE (acrónimo de Acción, Proceso, Objeto, Esquema), que es un marco teórico de corte cognitivo creado por Ed Dubinsky, que surge a partir de la abstracción reflexiva de la teoría de Piaget y es desarrollado junto a un grupo de investigadores (Arnon et al., 2014).

Este taller está dirigido a profesores de los niveles medio y superior, futuros profesores y a todos los interesados en el estudio de la didáctica de la lógica. Se trabajará con algunas de las interpretaciones de la implicación dadas por Quine (1950) –el entendimiento común, el conectivo proposicional, el condicional lógicamente válido y el condicional generalizado–. Se pretende observar las construcciones mentales que muestran los participantes para las distintas interpretacioes de la implicación y las relaciones que pueden establecer entre ellas, para luego reflexionar acerca de su enseñanza y aprendizaje en los diferentes niveles.

Introducción

En este taller se reflexionará acerca de la implicación en los niveles secundario y terciario, tópico que, a pesar de estar presente en todos los cursos de matemática de dichos niveles –explícita o implícitamente–, los estudiantes presentan dificultades en su comprensión (Alvarado y González, 2009, 2013; Crespo, 2007; Durand-Guerrier, 2003; Epp, 2003; Ernest, 1984; García-Martínez y Parraguez, 2017).

Generalmente, en matemática, la implicación es concebida como una proposición de la forma $p \Rightarrow q$, donde p se denomina antecedente y q consecuente y puede definirse mediante las tablas de verdad. Sin embargo, Quine (1950) sostiene que hay varias interpretaciones de las sentencias condicionales (o implicaciones) que son: el entendimiento común (donde, en general, el antecedente falso no se considera), el conectivo proposicional (definido mediante la tabla de verdad), el condicional lógicamente válido (reglas de inferencia) y el condicional generalizado (que rige los teoremas). Según Durand-Guerrier (2003), se deben tener en cuenta estos cuatro tipos de sentencias condicionales en la enseñanza y aprendizaje de la implicación.

Es precisamente con algunas de estas interpretaciones de la implicación, que se trabajará en este taller, a través del desarrollo de actividades, con la finalidad de determinar elementos en distintos estados de construcción, que den cuenta del aprendizaje de la implicación.

Marco teórico: Teoría APOE

El marco teórico que fundamenta esta investigación y las actividades de este taller, es la teoría APOE, que es un marco teórico de corte cognitivo que explica cómo se construye el conocimiento.

La teoría APOE, cuya sigla significa **A**cción, **P**roceso, **O**bjeto y **E**squema, fue creada por Ed Dubinsky y está basada en el concepto de abstracción reflexiva de Piaget. Posteriormente se ha seguido desarrollando en conjunto con otros investigadores (Arnon et al., 2014).

Según esta teoría, la construcción mental de todos los conceptos matemáticos o fragmentos de éstos, pueden interpretarse a través de acciones, procesos, objetos y esquemas que el aprendiz establece como estrategia cognitiva para su aprendizaje.

Las acciones son transformaciones de objetos, construidos previamente, las cuales el estudiante percibe, en general, como externas. Por ejemplo, en la función compuesta $g \circ f$, al calcular $g(f(x))$, la función g es interpretada como una acción que transforma el objeto $f(x)$. El estudiante muestra una concepción acción de un determinado concepto matemático si, para resolver un problema que involucre dicho concepto, él debe ser guiado, necesitando realizar todos los pasos que el problema involucre. Cuando una acción se repite y el estudiante reflexiona sobre ella, ésta se interioriza y da origen a un proceso. El estudiante muestra una concepción proceso de un determinado concepto matemático cuando no necesita más del estímulo externo y es capaz de resolver un problema sin necesidad de realizar todos los pasos. Por ejemplo, cuando el estudiante percibe una función como una regla que asigna a cada elemento del dominio (variable independiente) un y sólo un elemento del codominio (variable dependiente). También se puede obtener otro proceso al coordinar dos o más procesos. Cuando el estudiante es capaz de pensar el proceso como un todo y actuar sobre él, se dice que ha encapsulado el proceso en un objeto. Esto se evidencia, por ejemplo, cuando el estudiante es capaz de encontrar un contraejemplo para determinado problema o cuando trabaja con una forma funcional de las funciones, sin hacer referencia a una expresión determinada. La operación contraria de la encapsulación es la desencapsulación que consiste en volver al proceso que generó cierto objeto, para poder coordinarlo con otros procesos y encapsularlos en nuevos objetos. Un esquema es un conjunto de acciones, procesos y objetos relacionados con un concepto matemático y las relaciones entre estos elementos. Un esquema es una estructura coherente e inacabada ya que un esquema puede asimilar un nuevo objeto que se reacomoda a las estructuras existentes. Por otro lado, un esquema puede ser visto como un objeto, en dicho caso se dice que el esquema se ha tematizado.

A través de los mecanismos mentales –interiorización, coordinación, encapsulación, desencapsulación, tematización–, se pasa de un estado de construcción de conocimiento a otro. La Figura 1, precisa como se entrelazan las estructuras y los mecanismos mentales.

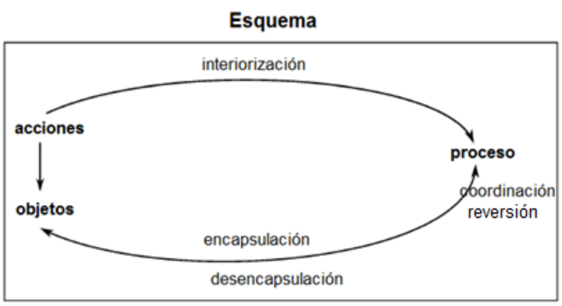


Figura 1: *Construcciones y mecanismos mentales (Arnon et al., 2014, p. 10).*

Método de investigación

La teoría APOE tiene asociado un ciclo de investigación compuesto por tres componentes: análisis teórico o descomposición genética (DG); diseño y aplicación de instrumentos; análisis y verificación de los datos.

El ciclo comienza analizando el concepto matemático con base en los libros de texto, en la epistemología, en la experiencia docente, en el propio conocimiento del investigador, en cuestionarios, etc., para, a partir de ahí, diseñar una DG para dicho concepto, que es un modelo hipotético que describe las estructuras y mecanismos mentales que un estudiante podría necesitar para construir un determinado concepto matemático (Arnon et al., 2014).

El objetivo principal de la DG es proponer a priori un modelo para el aprendizaje de un concepto matemático específico, éste se prueba, se analiza y en caso de ser necesario se vuelve a la DG y se refina. Se sigue este ciclo las veces que sea necesario. Es importante resaltar que para un mismo concepto matemático pueden existir varias descomposiciones genéticas, las cuales pueden ser todas viables, ya que cada una puede representar un camino diferente de construcción mental de dicho concepto (Roa-Fuentes y Oktaç, 2010).

Actividades para el taller

La finalidad de atender estas actividades con los asistentes al taller, es precisar y describir elementos específicos en pro de levantar diseños de descomposiciones genéticas para cada una de las interpretaciones de la implicación y observar las posibles relaciones entre las mismas; para luego reflexionar acerca de posibles formas de abordar este tópico en diferentes niveles educativos.

A modo de ejemplo, se presentan tres actividades:

Actividad 1

Determine si la siguiente proposición es verdadera o falsa, justificando su respuesta (esto es, demostrándola o dando un contraejemplo):

Si n^2 es par, entonces n es par (para todo número natural n).

El objetivo de esta actividad es abordar la implicación como condicional generalizado.

Actividad 2

Determine el mayor universo, dentro de los números naturales desde 1 hasta 20, para el cual la siguiente implicación es verdadera:

"Si n es un número par, entonces $n + 1$ es un número primo".

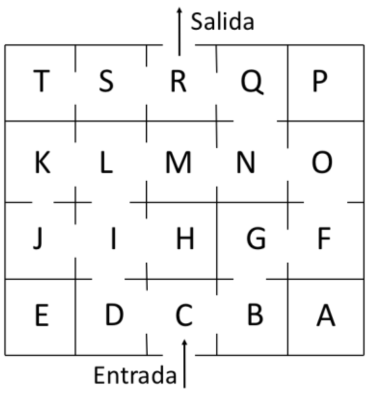
a) ¿Cómo responderían sus estudiantes?
b) ¿Cómo respondería usted?

Justifique todas sus respuestas.

El propósito de esta actividad es abordar la implicación como entendimiento común y/o como conectivo proposicional.

Actividad 3 (Durand-Guerrier, 2003)

Una persona llamada X logró pasar a través del siguiente laberinto (desde *Entrada* hasta *Salida*) sin utilizar la misma puerta (abertura) dos veces.



Se pueden formular frases pertinentes a la situación. Para algunas de estas frases, podemos determinar un valor de verdad (VERDADERO o FALSO); para otras, no tenemos suficiente información para decidir si son verdaderas o no (en ese caso, responda NO SE PUEDE DECIR).

De esta forma, analice cada una de las siguientes seis frases (justificando sus respuestas):

a) X cruzó P.
b) X cruzó N.

c) X cruzó M.
d) Si X cruzó O, entonces X cruzó F.
e) Si X cruzó K, entonces X cruzó L.
f) Si X cruzó L, entonces X cruzó K.

El objetivo de esta actividad es abordar la implicación como entendimiento común u otra interpretación.

Reflexiones

En el trabajo conjunto con los asistentes al presente taller, en el marco de CUREM7, se espera tener claridad y una mejor justificación de los elementos que componen descomposiciones genéticas para las diferentes interpretaciones de la implicación.

En trabajos previos (García-Martínez y Parraguez, 2016), ya se han abordado las actividades planteadas, sin embargo, se precisa de más evidencia empírica para alcanzar un real diseño de descomposiciones genéticas que den cuenta del aprendizaje de la implicación.

Referencias

Alvarado, A. y González, M. (2009). La implicación lógica en el proceso de demostración matemática: estudio de un caso. *Enseñanza de las Ciencias*, *28*(1), 73-84.

Alvarado, A. y González, M. (2013). Generación interactiva del conocimiento para iniciarse en el manejo de implicaciones lógicas. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *16*(1), 37-63.

Arnon, I., Cottril, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa, S., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). *APOS Theory*. *A framework for research and curriculum development in mathematics education.* New York: Springer.

Crespo, C. (2007). *Las argumentaciones matemáticas desde la visión de la socioepistemología*. Tesis de doctorado no publicada. CICATA-IPN, México.

Durand-Guerrier, V. (2003). Which notion of implication is the right one? From logical considerations to a didactic perspective. *Educational Studies in mathematics*, *53*(1), 5-34.

Epp, S. (2003). The role of logic in teaching proof. *American Mathematical Monthly 110*, 886-899.

Ernest, P. (1984). Mathematical induction: A pedagogical discussion. *Educational Studies in Mathematics*, *15*(2), 173-189.

García-Martínez, I. y Parraguez, M. (2016). *Estructuras mentales para un esquema de la implicación como entendimiento común.* En S. Estrella, M. Goizueta, C. Guerrero, A. Mena, J. Mena, E. Montoya, A. Morales, M. Parraguez, E. Ramos, P. Vásquez, y D. Zakaryan (Eds.), XX *Actas de las Jornadas Nacionales de Educación Matemática* (p. 127-130), ISSN 0719-8159. Valparaíso, Chile: SOCHIEM, IMA-PUCV.

García-Martínez, I. y Parraguez, M. (2017). The Basis Step in the Construction of the Principle of Mathematical Induction based on APOS theory. *The Journal of Mathematical Behavior*, *40*, 128-143.

Quine, W.V.O. (1950). *Methods of Logic.* New York: Holt, Rinehart and Winston.

Roa-Fuentes, S. y Oktaç, A. (2010). Construcción de una descomposición genética: Análisis teórico del concepto transformación linear. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 13*(1), 89 – 112.