LA PARADOJA DE AQUILES.
UNA MIRADA DESDE LA MATEMATICA Y LA FISICA

Horacio Caraballo[1] Cecilia Zulema González[2]
[1] Bachillerato de Bellas Artes. Colegio Nacional. Facultad Ciencias Agrarias y Forestales. Universidad Nacional de La Plata. Argentina.
[2] Facultad Ciencias Agrarias y Forestales. Facultad de Ingeniería. Universidad Nacional de La Plata. Argentina.
horacio@netverk.com.ar cgonzalez@agro.unlp.edu.ar
Nivel educativo: Medio (13-17 años). Universitario.
Palabras Clave: Paradoja de Aquiles, Matematización, Resignificación.

Resumen

Presentamos en este artículo algunos tópicos referidos a la paradoja de Aquiles. Se resuelve primero el problema desde un punto de vista cinemático, luego se enuncia la paradoja en los términos en que lo hizo Zenón pero con alguna precisión técnica, a continuación se retoma esta descripción pero se hace una narración matemática de la misma que nos termina enfrentando con las series geométricas. Se da una explicación breve sobre la idea de sucesión de sumas parciales como función y de la operación de límite sobre ésta de una manera informal. Se aplican estos resultados a interpretar la carrera manteniendo el punto de vista de Zenón. Este tipo de problema de cierta complejidad y que genera interesantes polémicas y diversidad de interpretaciones puede ser administrado por el docente de por lo menos dos modos: uno como elemento disparador (tópico generativo) al comienzo de la presentación de un tema y otro como un trabajo de integración y resignificación de conocimientos a posteriori.
Respecto a la implementación podemos resumir que este problema puede ser presentado de distintos modos, como tarea o proyecto de investigación, como taller, como exposición inaugural, etc.

Introducción

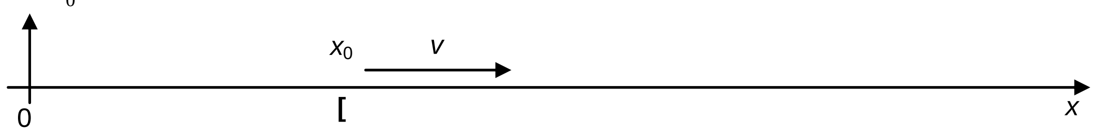
Zenón de Elea (490 – 430 antes de J.C.) discípulo de Parménides, combatió a los adversarios de la doctrina de su maestro mediante una serie de argumentos por los cuales se reducían al absurdo los conceptos de multiplicidad del ser y de movimiento. En cuanto al movimiento, Zenón proporcionaba diversas pruebas para combatirlo, entre ellas nombremos el argumento de Aquiles según el cual el más rápido de los hombres, Aquiles, no podrá alcanzar nunca al más lento de los animales, la tortuga, si se da a esta en una carrera una ventaja inicial. Pues mientras Aquiles recorre el camino que la tortuga llevaba avanzado por la mencionada ventaja inicial, la tortuga habrá recorrido otra porción, aunque mas pequeña, del espacio; cuando Aquiles haya recorrido esta porción de camino mas pequeña, la tortuga habrá avanzado otra porción mas pequeña, así la tortuga irá llevando la ventaja hasta en espacios infinitamente pequeños de tal forma que Aquiles no podrá alcanzarla nunca.
Borges en "*La perpetua carrera de Aquiles y la tortuga"* dice sobre la paradoja:
Las implicaciones de la palabra joya —valiosa pequeñez, delicadeza que no está sujeta a la fragilidad, facilidad suma de traslación, limpidez que no excluye lo impenetrable, flor para los años— la hacen de uso legítimo aquí. No sé de mejor calificación para la paradoja de Aquiles, tan indiferente a las decisivas refutaciones que desde más de veintitrés siglos la derogan, que ya podemos saludarla inmortal. Las reiteradas visitas del misterio que esa perduración postula, las finas ignorancias a que fue invitada por ella la humanidad, son generosidades que no podemos no agradecerle.
…….

Zenón es incontestable, salvo que confesemos la idealidad del espacio y del tiempo. Aceptemos el idealismo, aceptemos el crecimiento concreto de lo percibido, y eludiremos la pululación de abismos de la paradoja…
¿Tocar a nuestro concepto del universo, por ese pedacito de tiniebla griega?, interrogará mi lector.
En el espectro multifacético que nos propone la paradoja es nuestra intención abordarla desde un punto de vista didáctico en tanto y en cuanto su discusión en términos matemáticos proporciona la oportunidad de relacionar diversos temas entre si, integrarlos y resignificarlos. El esquema central es el de pasar de una suma finita a una serie, generar una función a partir de considerar la sucesión de sumas parciales y aplicar la operación de límite sobre esta función. Según el nivel de los alumnos a los que esté dirigida, esta actividad puede ir desde ser un tópico generativo para los temas de límite o series hasta, en un plano metacognitivo, la reflexión sobre la posibilidad de matematización de la realidad. En este último aspecto podemos seguir a Popper cuando se pregunta: *¿Por qué son aplicables a la realidad los cálculos de la Lógica y la Aritmética?* y analizar las tres posibles respuestas que propone:
- Estos cálculos, por lo general, son sistemas semánticos, es decir, lenguajes creados con la intención de usarlos para la descripción de ciertos hechos. No debemos sorprendernos, pues, si resultan servir para este propósito.
- Pueden estar construidos de modo que no sirvan para ese propósito; puede verse esto en el hecho que ciertos cálculos (por ejemplo la Aritmética de números naturales o la de números reales) son útiles para describir ciertos tipos de hechos pero no otros.
- En la medida en que un cálculo se aplica a la realidad pierde el carácter de cálculo lógico y se convierte en una teoría descriptiva que puede ser empíricamente refutable; y en la medida en que es considerado irrefutable, es decir, con un sistema de fórmulas lógicamente verdaderas, y no como una teoría científicamente descriptiva, no se aplica a la realidad.
Es esta última respuesta la que brinda los mejores argumentos para la discusión.

La versión cinemática de la carrera

Si partimos de las definiciones de posición y velocidad para un móvil que se mueve en línea recta, adoptamos un sistema de referencia, un sistema de coordenadas y suponemos la velocidad constante, la posición en función del tiempo viene dada por:

$$x = x_0 + vt$$



En este marco un análisis simple de la carrera entre Aquiles y la Tortuga sería el siguiente:
La partida es simultánea, la posición inicial de Aquiles coincide con el origen del sistema de coordenadas, la posición inicial de la Tortuga es $\boldsymbol{T_0}$, $\boldsymbol{v_A}$ es la velocidad de Aquiles y $\boldsymbol{v_T}$ la velocidad de la Tortuga, como todo el mundo sabe $\boldsymbol{v_A}$ es mayor que $\boldsymbol{v_T}$. Las posiciones de los contendientes (***A*** para Aquiles y ***T*** para la Tortuga) cuando el tiempo transcurre son:

$$A(t) = v_A t \qquad (1)$$

$$T(t) = T_0 + v_T t \qquad (2)$$

Podemos proponer la igualdad de las posiciones para determinar, si existe, el tiempo de encuentro t_e:

$$v_A t_e = T_0 + v_T t_e \quad \rightarrow \quad t_e = \frac{T_0}{v_A - v_T}$$

Como era de esperarse t_e existe ya que $\boldsymbol{v_A - v_T}$ es positivo y depende de esta diferencia y de la ventaja que tenga la Tortuga.
La posición de encuentro, reemplazando t_e en la ecuación (1) es:

$$A(t_e) = v_A \frac{T_0}{v_A - v_T} \quad \rightarrow \quad A = \frac{v_A}{v_A - v_T} T_0$$

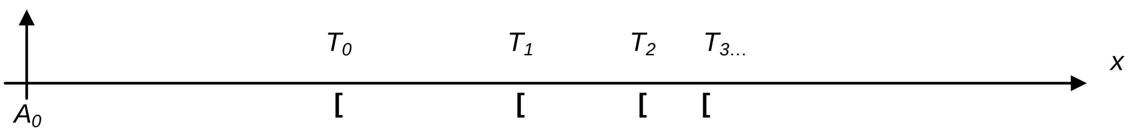
La posición de encuentro, reemplazando t_e en la ecuación (2) es:

$$T(t_e) = T_0 + v_T \frac{T_0}{v_A - v_T} \quad \rightarrow \quad T(t_e) = \frac{(v_A - v_T)T_0 + v_T T_0}{v_A - v_T} \quad \rightarrow \quad T(t_e) = \frac{v_A T_0 - v_T T_0 + v_T T_0}{v_A - v_T}$$

$$T(t_e) = \frac{v_A T_0}{v_A - v_T} \quad \rightarrow \quad T = \frac{v_A}{v_A - v_T} T_0$$

Las posiciones de Aquiles y la Tortuga son iguales tal y como lo esperábamos. Nuestros resultados indican que si la posición de la meta coincide con el encuentro los participantes empatarán, si la posición de la meta esta más cercana al origen que esta posición la ganadora será la Tortuga y si la meta está más alejada del origen ganará Aquiles. Estas predicciones son fáciles de comprobar desde un punto de vista técnico pero advirtamos que la Tortuga después de tantos siglos es reacia a participar de estos eventos.

La versión de Zenón sobre la carrera

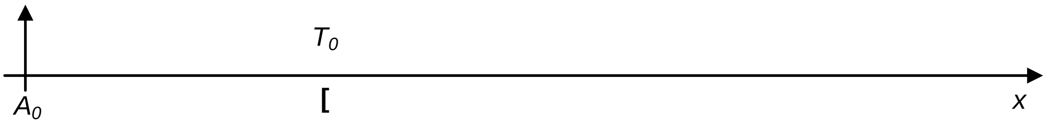


Aquiles y la Tortuga parten simultáneamente. Para describir la carrera tomamos un eje coordenado a lo largo de la pista, que es rectilínea, tomando como origen la posición inicial de Aquiles ($\boldsymbol{A_0 = 0}$). La Tortuga parte con ventaja desde la posición $\boldsymbol{T_0}$.
Aquiles llega a la posición $\boldsymbol{T_0}$ que ocupaba la tortuga. En el tiempo que tarda Aquiles en llegar a $\boldsymbol{T_0}$ la Tortuga avanza a la posición $\boldsymbol{T_1}$.
Aquiles llega a la posición $\boldsymbol{T_1}$ que ocupaba la tortuga. En el tiempo que tarda Aquiles en llegar a $\boldsymbol{T_1}$ la Tortuga avanza a la posición $\boldsymbol{T_2}$.
Aquiles llega a la posición $\boldsymbol{T_2}$ que ocupaba la tortuga. En el tiempo que tarda Aquiles en llegar a $\boldsymbol{T_2}$ la Tortuga avanza a la posición $\boldsymbol{T_3}$.
Este proceso continúa indefinidamente. Zenón concluye que Aquiles no puede alcanzar a la Tortuga.

La versión de Zenón sobre la carrera. Una narración matemática.

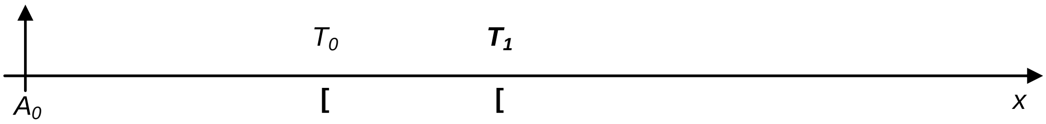
A continuación presentamos el mismo discurso de Zenón pero en términos matemáticos a partir de la misma relación entre posición, velocidad y tiempo que aceptamos cuando describimos la carrera desde la cinemática del movimiento rectilíneo uniforme.

Comienzo de la carrera. Posiciones A_0 T_0



Aquiles y la tortuga parten simultáneamente, el origen de coordenadas se toma en la posición inicial de Aquiles (***$A_0 = 0$***) la Tortuga parte con ventaja desde la posición ***T_0***

Posiciones ***A_1 T_1***



Aquiles llega a la posición ***T_0*** que ocupaba la tortuga. En el tiempo que tarda Aquiles en llegar a ***T_0*** la Tortuga avanza a la posición ***T_1***

Tiempo de Aquiles para ir desde ***A_0*** hasta ***A_1***:

$$t_{01} = \frac{T_0}{v_A}$$

Posición de la tortuga:

$$T_1 = T_0 + v_T t_{01} \;\rightarrow\; T_1 = T_0 + v_T \frac{T_0}{v_A}$$

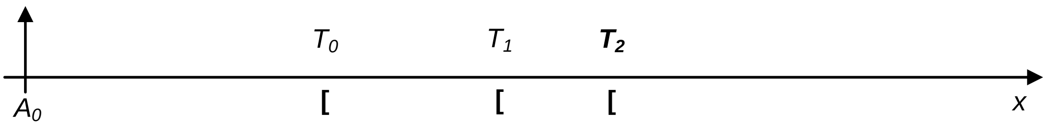
Posición de Aquiles:

$$A_1 = T_0$$

Tiempo total transcurrido es:

$$t_1 = t_{01} \quad \rightarrow \quad t_1 = \frac{T_0}{v_A}$$

Posiciones ***A_2 T_2***



Aquiles llega a la posición ***T_1*** que ocupaba la tortuga. En el tiempo que tarda Aquiles en llegar a ***T_1*** la Tortuga avanza a la posición ***T_2***

Tiempo de Aquiles para ir desde ***A_1*** hasta ***A_2***:

$$t_{12} = \frac{T_1 - T_0}{v_A}$$

Posición de la tortuga:

$$T_2 = T_1 + v_T t_{12} \;\rightarrow\; T_2 = T_1 + \frac{v_T}{v_A}\left(T_1 - T_0\right) \;\rightarrow\; T_2 = T_1 + \frac{v_T}{v_A}\left(T_0 + v_T \frac{T_0}{v_A} - T_0\right)$$

$$T_2 = T_0 + v_T \frac{T_0}{v_A} + \frac{v_T}{v_A}\left(v_T \frac{T_0}{v_A}\right) \;\rightarrow\; T_2 = T_0 + T_0 \frac{v_T}{v_A} + T_0\left(\frac{v_T}{v_A}\right)^2$$

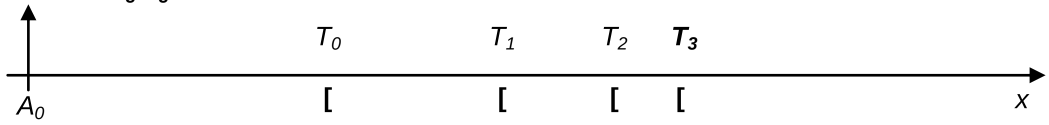
Posición de Aquiles:

$$A_2 = T_1$$

Tiempo total transcurrido es:

$$t_2 = t_{01} + t_{12} \quad \rightarrow \quad t_2 = \frac{T_0}{v_A} + \frac{T_1 - T_0}{v_A} \quad \rightarrow \quad t_2 = \frac{T_1}{v_A}$$

Posición ***A*₃ *T*₃**



Aquiles llega a la posición T_2 que ocupaba la tortuga. En el tiempo que tarda Aquiles en llegar a T_2 la Tortuga avanza a la posición T_3
Tiempo de Aquiles para ir desde A_2 hasta A_3:

$$t_{23} = \frac{T_2 - T_1}{v_A}$$

Posición de la tortuga:

$$T_3 = T_2 + v_T t_{23} \quad \rightarrow \quad T_3 = T_2 + \frac{v_T}{v_A}\left(T_2 - T_1\right)$$

$$T_3 = T_0 + T_0\frac{v_T}{v_A} + T_0\left(\frac{v_T}{v_A}\right)^2 + \frac{v_T}{v_A}\left(T_0 + T_0\frac{v_T}{v_A} + T_0\left(\frac{v_T}{v_A}\right)^2 - \left(T_0 + T_0\frac{v_T}{v_A}\right)\right)$$

$$T_3 = T_0 + T_0\frac{v_T}{v_A} + T_0\left(\frac{v_T}{v_A}\right)^2 + T_0\left(\frac{v_T}{v_A}\right)^3$$

Posición de Aquiles:

$$A_3 = T_2$$

Tiempo total transcurrido es:

$$t_3 = t_{01} + t_{12} + t_{23}$$

$$t_3 = t_{01} + t_{12} + t_{23} \quad \rightarrow \quad t_3 = \frac{T_0}{v_A} + \frac{T_1 - T_0}{v_A} + \frac{T_2 - T_1}{v_A} \quad \rightarrow \quad t_3 = \frac{T_2}{v_A}$$

Posición $\boldsymbol{A_n}$ $\boldsymbol{T_n}$

Tiempo de Aquiles para ir desde A_{n-1} hasta A_n:

$$t_{(n-1)n} = \frac{T_{(n-2)} - T_{(n-1)}}{v_A}$$

Posición de la tortuga:

$$T_n = T_0 + T_0\frac{v_T}{v_A} + T_0\left(\frac{v_T}{v_A}\right)^2 + \ldots + T_0\left(\frac{v_T}{v_A}\right)^n$$

$$T_n = T_0\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{v_T}{v_A}\right)^i$$

Posición de Aquiles:

$$A_n = T_{(n-1)} = T_0 \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{v_T}{v_A} \right)^i \quad \text{para} \quad n \geq 1$$

Tiempo total transcurrido es:

$$t_n = t_{01} + t_{12} + t_{23} + \ldots + t_{(n-1)n}$$

$$t_n = \frac{T_{(n-1)}}{v_A} \quad \rightarrow \quad t_n = \frac{T_0}{v_A} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{v_T}{v_A} \right)^i \quad \text{para} \quad n \geq 1$$

Que este proceso continúe indefinidamente sería equivalente a manejar objetos matemáticos, a los que llamaremos series, que tienen el siguiente aspecto:

$$t = \frac{T_0}{v_A} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{v_T}{v_A} \right)^i \qquad A = T_0 \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{v_T}{v_A} \right)^i \qquad T = T_0 \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{v_T}{v_A} \right)^i$$

Donde ∞ significa que *i* no termina nunca de aumentar. Si bien la posición de Aquiles y la tortuga es la misma, Zenón argumentaría triunfante que: si para calcular el tiempo de encuentro siempre hace falta agregar un instante mas, por pequeño que este sea, lo que está en juego es la eternidad y por lo tanto se concluye que Aquiles no puede sobrepasar a la Tortuga.
A esta altura nuestro discurso matemático hace necesario que tengamos argumentos que nos permitan manejar las series.

Interrupción en busca de nuevas herramientas

A continuación ampliaremos nuestra idea sobre la suma para poder seguir nuestra narración matemática.
Consideremos las sumas que hemos obtenido siguiendo a Zenón. Llamando ***r*** al cociente de las velocidades y prescindiendo de algunas constantes tenemos:

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} r^i$$

El intentar realizar esta suma cuando ***n*** se agranda indefinidamente nos deja expuestos a una nueva paradoja, como nos hizo notar Zenón, sería necesaria la eternidad para concluir la tarea. Sin embargo hay otro camino, consideremos la suma expandida, por motivos de claridad, de los ***n*** primeros términos:

$$S_n = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n$$

Multipliquemos por ***r*** ambos miembros de la igualdad:

$$rS_n = r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n + r^{n+1}$$

Restando miembro a miembro:

$$S_n - rS_n = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n - r - r^2 - r^3 - \cdots - r^n - r^{n+1}$$

Finalmente:

$$S_n - rS_n = 1 - r^{n+1} \quad \rightarrow \quad S_n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

En estos términos $\boldsymbol{S_n}$ puede considerarse como una función que a cada número natural que elijamos le hace corresponder un número real que representa la suma. Esta correspondencia se efectúa mediante una sola operación de potenciación y no a partir de la suma de los ***n+1*** términos, sin importar cuan grande sea ***n***.

Si recordamos que ***r*** es menor que 1 (***r*** es cociente entre la velocidad de la tortuga y la velocidad de Aquiles) se puede ver que cuanto mas grande resulte ***n*** mas pequeño va ser r^n. Si por último, para poder expresar esta afirmación, presentamos la operación de límite sobre una función tendremos:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \quad \to \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1-r^{n+1}}{1-r} = \frac{1}{1-r}$$

Si el límite existe, como en este caso, se lo interpreta como suma de la serie. En otras palabras tenemos una generalización de la suma. Resumiendo, si la cantidad de objetos a ser sumados es finita los procedimientos aritméticos elementales bastarán, mientras que si los objetos pertenecen a una colección infinita estaremos supeditados a la existencia del límite de la sucesión de las sumas parciales.
En lo que concierne a nuestro caso, tenemos que:

$$\sum_{i=0}^{\infty} r^i = \frac{1}{1-r} \qquad siendo \ |r| < 1$$

Continuación y final de nuestra narración matemática.

Se trata de encontrar la posición de Aquiles y la Tortuga a la vista de nuestra nueva idea de suma:

$$A = T = T_0 \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{v_T}{v_A} \right)^i \quad \to \quad A = T = T_0 \frac{1}{1 - \frac{v_T}{v_A}} \quad \to \quad A = T = T_0 \frac{v_A}{v_A - v_T}$$

Para el tiempo tenemos:

$$t = \frac{T_0}{v_A} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{v_T}{v_A} \right)^i \quad \to \quad t = \frac{T_0}{v_A} \frac{1}{1 - \frac{v_T}{v_A}} \quad \to \quad t = \frac{T_0}{v_A} \frac{v_A}{v_A - v_T} \quad \to \quad t = \frac{T_0}{v_A - v_T}$$

Estos resultados son idénticos a los obtenidos en la descripción cinemática de la carrera.
Aclaremos que no fue necesario objetarle a Zenón la posibilidad de dividir el espacio y el tiempo de manera indefinida. A esta altura la paradoja parece superada si acordamos con la tercera de las respuestas de Popper al problema de la aplicación del cálculo lógico-aritmético a la realidad:
En la medida en que un cálculo se aplica a la realidad pierde el carácter de cálculo lógico-aritmético y se convierte en una teoría descriptiva que puede ser empíricamente refutable…
También podemos darnos valor recordando las palabras de Henri Poincaré:
¿Es el análisis matemático un simple juego de la mente? Sirve para proporcionar a la Física un lenguaje conveniente; ¿no es este un servicio mediocre que, estrictamente considerado, es prescindible?; más aún, ¿no es de temerse que este lenguaje artificial pueda ser un velo interpuesto entre la realidad y el ojo del físico? Lejos de ello; sin este lenguaje, la mayor parte de las íntimas analogías de las cosas habrían permanecido por siempre ocultas a nosotros; y por siempre hubiéramos permanecido ignorantes de la armonía íntima del mundo…
Sin embargo parece prudente dejar la discusión abierta y siguiendo a Borges dar la calificación de joya "*para la paradoja de Aquiles, tan indiferente a las decisivas refutaciones que desde más de veintitrés siglos la derogan, que ya podemos saludarla inmortal".*

Conclusiones

En nuestra tarea docente hemos utilizado este problema como disparador previo a la presentación de límites con excelentes resultados, tanto en el último año de la enseñanza media (17, 18 años) como en el primer año universitario en los cursos de Cálculo. Respecto a la metodología de trabajo podemos resumir que se ha presentado el problema de distintos modos, como tarea de investigación, como taller, como exposición inaugural, etc.
También hemos utilizado este problema como proyecto de investigación luego de haber cubierto los temas que implican su resolución. En todos los casos el ajuste y la integración de conceptos es significativa pero además la reflexión sobre el uso de las herramientas formales en la descripción de situaciones fácticas es muy enriquecedora.

Referencias bibliográficas

- Borges, J. L. (1932). *Discusión.* Buenos Aires: EMECE.
- Ferrater Mora, J. (2004). *Diccionario de Filosofía*. Barcelona: Ariel.
- Kaplan, W. (1971). *Cálculo Avanzado*. México: CECSA
- Popper, K. R. (1967). *El desarrollo del conocimiento científico. Conjeturas y refutaciones*. Buenos Aires: Paidós
- Spivak, M. (1970). *Calculus. Cálculo Infinitesimal.* Barcelona: Reverté