# UNA APLICACIÓN DEL TEOREMA DE GERSHGORIN

Julia del Carmen González
Instituto Superior del Profesorado Joaquín V. González. Argentina
juliacmat@gmail.com

**Nivel Educativo:** terciario
**Palabras clave:** Gershgorin, autovalores, cónicas, geometría

## Resumen

Se enuncia el Teorema de Gershgorin y se presentan algunos ejemplos utilizando herramientas informáticas a fin de lograr una mejor comprensión de los conceptos involucrados.
Se realiza una aplicación de este teorema al estudio de cónicas con aplicación de software específico finalizando con un análisis de la misma desde un punto de vista didáctico.

## Introducción

Este trabajo fue desarrollado en el ámbito del Curso de Especialización para Profesores realizado en el período 2008-2009 en la Cátedra Álgebra II a cargo de la profesora María J. Guasco. Si bien la investigación se encuadra dentro de la Matemática Aplicada, del mismo se ha seleccionado un fragmento a los efectos de poder aplicarlo como ejemplo de algunas cuestiones vinculadas con la enseñanza de la Matemática, y en particular de la Geometría.
El Teorema de Gershgorin llamó nuestra atención por dos razones: el haber obtenido de una matriz un resultado geométrico de gran utilidad y que su demostración sea simplemente algebraica. Si bien este teorema es muy útil en los casos en que solo se necesita acotar el valor de los posibles autovalores relacionados con una matriz, el presente trabajo consiste en aplicarlo al estudio de cónicas.

## <u>TEOREMA DE LAS CIRCUNFERENCIAS DE GERSHGORIN</u> <u>(publicado en 1931)</u>

Hipótesis: Sea $A$ una matriz de n x n, $A=(a_{ij})$, $a_{ij}\in\mathbb{C}$. Sea $r_i=\sum_{i\neq j}|a_{ij}|$ $1\leq i,j\leq n$ y $C_i$ la circunferencia con centro en $a_{ii}$ y radio ri

$$C_i=\{z\in\mathbb{C}\ /\ |z-a_{ii}|=r_i\}$$

*<u>Tesis:</u>* a) Cada valor característico $\lambda_1,\lambda_2,....\lambda_k$ de $A$ está contenido dentro de al menos una de las $C_i$: $\{\lambda_1,\lambda_2,....\lambda_k\}\subset\bigcup_{i=1}^{n}C_i$

b) Si $M=C_{i1}\cup.....\cup C_{im}$ es disjunta con la unión de las restantes circunferencias, entonces dentro de $M$ hay exactamente $m$ valores característicos de $A$ (contados con su multiplicidad como raíces del polinomio característico).
Veamos algunos ejemplos para una mejor apreciación de los conceptos involucrados.

<u>*Ejemplo 1*</u>*:* Sea $A$ la matriz *no simétrica*:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 4 & 1 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

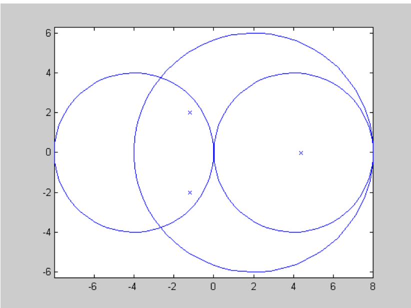
En este caso obtenemos las siguientes circunferencias de Gershgorin (CG):

$$\begin{aligned} C_1 &: (x-2)^2 + y^2 = 6^2 \\ C_2 &: (x-4)^2 + y^2 = 4^2 \\ C_3 &: (x+4)^2 + y^2 = 4^2 \end{aligned} \qquad \text{porque} \qquad \begin{cases} a_{11} = 2 \quad \text{y} \quad r_1 = |-1| + |5| \\ a_{22} = 4 \quad \text{y} \quad r_2 = |3| + |1| \\ a_{33} = -4 \quad \text{y} \quad r_3 = |-2| + |2| \end{cases}$$

Observemos que, si bien estamos trabajando en el plano complejo, el centro de las circunferencias está ubicado sobre el eje real.
Para obtener los círculos utilizamos el programa Matlab. Con la instrucción “eig” obtenemos los autovalores y con el programa llamado Gersh (ver apéndice) obtenemos las CG al introducir la matriz $A$:

```
A = 2   -1    5
      3    4    1
     -2    2   -4
eig(A)
ans = 4.3869       -1.1934 + 2.0116i       -1.1934 - 2.0116i
```
$\rightarrow$ autovalores

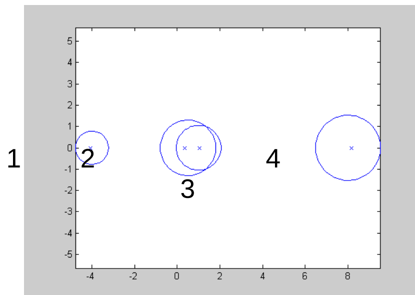
Buscamos los autovalores con la instrucción “eig(A)” a fin de obtener el valor exacto, pero observemos que a los efectos de saber si son positivos o negativos nos alcanza con dibujar las circunferencias de Gershgorin:



Dos autovalores son complejos y uno real y podemos apreciarlos en el gráfico precedente marcados con una cruz.

<u>*Ejemplo 2*</u>: Sea $A$ la matriz *simétrica*:

$$A = \begin{pmatrix} 0.5000 & -1.0000 & 0.2500 & 0.0500 \\ -1.0000 & 8.0000 & 0.0250 & 0.5000 \\ 0.2500 & 0.0250 & -4.0000 & 0.5000 \\ 0.0500 & 0.5000 & 0.5000 & 1.0000 \end{pmatrix}$$



eig(A) ans =-4.0626 0.3529 1.0452
Por ser $A$ una matriz simétrica sus autovalores son números reales. Notemos además que por la parte b) el teorema de Gershgorin las circunferencias 2 y 3 tienen intersección vacía con 1 y 4 (hay tres componentes conexas) y justamente en la intersección de 2 y 3 hay exactamente dos autovalores.

**APLICACIÓN DEL TEOREMA DE GERSHGORIN Al ESTUDIO DE CÓNICAS. RECTAS INCIDENTES**

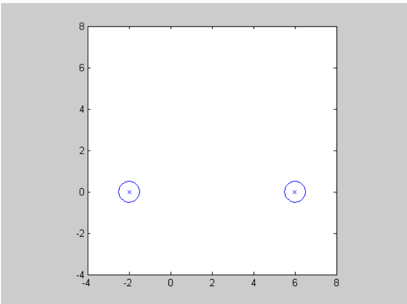
Analizaremos ecuaciones de cónicas que degeneran en dos rectas. Queremos observar las posiciones relativas de las circunferencias de Gershgorin según que las rectas se intersecten en distintos ángulos.

Recordemos que, dada una forma cuadrática: $ax^2+bxy+cy^2$, podemos expresarla matricialmente como:

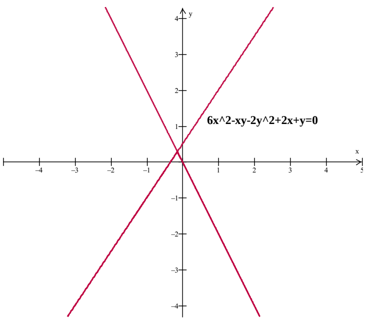
$(x \quad y)\begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ como es simétrica se obtendrán CG del mismo radio

*<u>Ejemplo 1</u>* Sea la ecuación de segundo grado en x e y: $6x^2-xy-2y^2+2x+y=0$
Busco las CG de la forma cuadrática:

A = 6.0000 -0.5000
-0.5000 -2.0000
Se obtuvo un autovalor positivo y otro negativo luego, De existir un lugar geométrico,
las posibilidades son: una hipérbola o un par de rectas



Utilizando el programa Winplot para graficar la cónica que representa la ecuación de segundo grado dada y se obtiene un par de rectas que se cortan.




Notemos que hemos obtenido una información adicional por tratarse de dos rectas que se cortan el término independiente de la ecuación canónica será nulo en ciertos ejes, luego para hallar dicha ecuación solo nos falta encontrar los autovalores que lo hacemos con la instrucción “eig”

Luego, siendo $x_1$ y $x_2$ las raíces de la ecuación (1), podemos escribirla en forma factorizada y obtenemos las dos rectas:

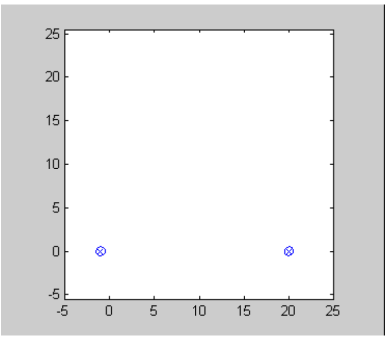
$$\underbrace{(6x-4y+2)}_{r_1}\underbrace{\left(x+\frac{1}{2}y\right)}_{r_2}=0 \qquad r_1 \text{ de pendiente } \frac{3}{2} \qquad r_2 \text{ de pendiente } -2$$

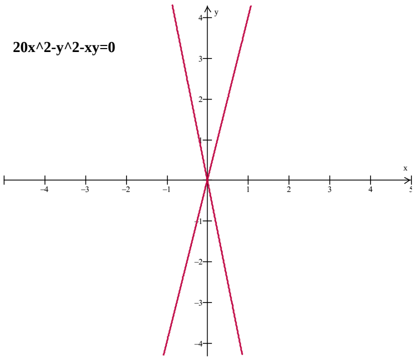
Ejemplo 2:

$$20x^2 - y^2 - xy = 0$$

A =20.0000   -0.5000

 -0.5000    -1.0000





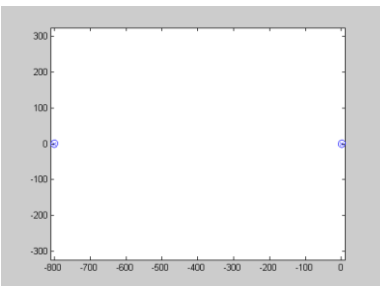

Aquí las rectas están más cerradas y los autovalores más distantes.
Que los autovalores sean distantes y que los círculos de Gershgorin se intersecten o no ya se puede anticipar analizando los valores de los $a_{ij}$ de la matriz puesto que :

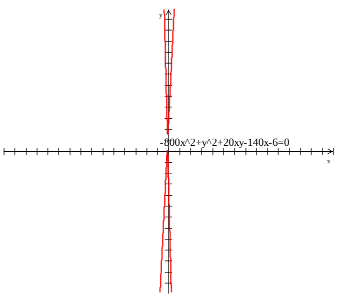
$$C_1 : (x-20)^2 + y^2 = 0.5 \qquad C_2 : (x+1)^2 + y^2 = 0.5$$

Si seguimos los pasos del ejemplo 1, también podemos llegar a obtener la ecuación canónica de esta cónica degenerada:

$$\underbrace{(20x-5y)}_{r_1}\underbrace{\left(x+\frac{1}{5}y\right)}_{r_2}=0 \qquad r_1 \text{ de pendiente } 4 \qquad r_2 \text{ de pendiente } -5$$

*<u>Ejemplo 3</u>:* $-800x^2 + y^2 + 20xy - 140x + y - 6 = 0$





En este caso las dos rectas que forman la cónica son:
$r_1 : 20x - y + 2$ de pendiente 20 $r_2 : -40x - y - 3$ de pendiente -40
Observemos la separación de las circunferencias coincidente con el aumento de las pendientes de ambas rectas.
Para volver a la ecuación original, debemos multiplicar $r_1 r_2$, luego a mayores pendientes de las rectas mayor será el coeficiente de $x^2$ en valor absoluto, con respecto al de $y^2$. Los dos términos en $x$ e $y$ tendrán coeficientes menores que los de $x^2$ e $y^2$, por esta razón la matriz de la forma cuadrática dará CG más distantes según sean mayores los módulos de las pendientes.
El trabajo original continúa con cuestiones teóricas que responden por ejemplo a la inquietud de preguntarnos si siempre serán disjuntas las circunferencias cuando de trate de dos rectas que se cortan. También contiene el análisis de las CG en el caso de elipses con distintas excentricidades.

**ANÁLISIS DIDÁCTICO DE LA SÍNTESIS PRESENTADA**

Desde la antigüedad la Matemática figura como parte fundamental en la enseñanza por su contribución al desarrollo del pensamiento lógico formal y porque nos permite desenvolvernos en la vida diaria. Sin embargo, si analizamos su desarrollo actual en el ámbito educativo nos encontraremos con que, en muchos casos, solo se presta atención a su aspecto informativo descuidando el formativo y “los dos objetivos deben desarrollarse armoniosamente, pues las veces que se ha ensayado la polarización en uno solo de ellos, los resultados no han sido buenos.” (Santaló, 1994, p. 30).
La ausencia de la Geometría en las aulas es una muestra de esta polarización hacia el aspecto informativo. Aún cuando sea incluida en los programas de la Escuela Media, se lo hace en un sentido parcial dándole importancia, por ejemplo, a la memorización de fórmulas para hallar áreas y volúmenes. Muchas veces los alumnos preguntan en el aula cuándo de verá Geometría así pueden hacer dibujos.
Si descuidamos el aspecto formal estamos olvidando que nuestra tarea como docentes es formar seres libres, libres para pensar, libres para desarrollarse, libres para crear y lo que podemos hacer a través de la Matemática es justamente brindarles herramientas para ello.
En el Nivel Medio siempre vemos numerosas e ingeniosas aplicaciones del Teorema de Pitágoras, ¿qué pasa con todos los demás teoremas y las propiedades que de ellos se deducen?, quedaron enterrados en el olvido. Por ejemplo podríamos preguntarles a nuestros alumnos por qué se puede construir un rombo o un romboide con solo dibujar una cruz o por qué en el hexágono se forman triángulos isósceles con vértices en el centro de la circunferencia circunscripta. Así, estaremos dando significación a los teoremas, ya que podrán deducir ellos mismos sus enunciados con el solo hecho de aplicar propiedades conocidas y tener un orden en sus razonamientos. El poder aplicarlos a situaciones concretas (como es el caso presentado del Teorema de Gershgorin) es la mejor forma de que puedan recordarlos y que sean capaces de utilizarlos como herramientas frente a otras cuestiones. Pero también serán capaces de resolver situaciones no vinculadas con la Geometría o el Álgebra porque les estaremos dando las bases para aprender a razonar y a expresarse con corrección ya que la forma en que demostramos en Geometría es a través de la argumentación. “Enseñar a pensar, pero también enseñar a usar el pensamiento adecuado en cada oportunidad” (Santaló, 1994, p. 30).
El presente trabajo muestra cómo puede utilizarse un teorema para el estudio de cuestiones en las cuales nunca se tuvo en cuenta, abordando un concepto desde otra perspectiva , como así también reconociendo cuándo un conocimiento se puede aplicar, además vemos su

utilidad en un caso concreto lo que constituye una gran fuente de motivación en todos los grados de enseñanza. Estamos así construyendo la significación a través de dos niveles: el externo (uso) y el interno (funcional). Recordamos en este sentido las siguientes palabras:
"El niño aprende a hablar sin preocuparse por la etimología de las palabras. Igualmente los conocimientos matemáticos se van puliendo con el uso y a través de definiciones y razonamientos repetidos una y otra vez a través de los distintos ciclos de la enseñanza, cada momento presentados bajo nuevos ángulos y de manera más perfecta y general. Es la famosa enseñanza en espiral, en cuyo transcurso se van grabando los conocimientos esenciales que son los que verdaderamente forman la inteligencia y preparan para ir actuando de manera cada vez más independiente, hasta llegar a la creatividad en que el alumno descubre cosas, no importa el nivel, por su propio pensar." (Santaló, 1994, pp. 30-31). Y también: "En un sentido estricto, el tercer tipo de trabajo matemático se presenta como una actividad reservada a los investigadores en matemáticas. Son muy numerosos los nuevos tipos de situaciones matemáticas y extramatemáticas que van surgiendo y para las que hay que crear nuevos modelos para estudiarlas o bien imaginar nuevas utilizaciones de antiguos modelos" (Chevallard, Y., Bosch, M. & Gascón, J. 1997, p. 56.)
El uso de técnicas informáticas permite ejemplificar un teorema a fin de obtener una mejor comprensión de los conceptos involucrados al poder representarlos fácilmente y así visualizarlos, anticipar resultados (Ejemplo 1), acceder rápidamente a una gran cantidad de ejemplos a fin de obtener conclusiones. Hoy en día contamos con numerosos programas y de fácil manejo como Geogebra, Cabri , Graphmatica, Winplot y otros, y no solo con ellos sino también con el entusiasmo de nuestros alumnos al utilizarlos. Cuantas veces aprendemos de ellos trucos en su uso o descubren aplicaciones que nunca tuvimos cuenta, convirtiendo así a la educación en un ida y vuelta entre educando y educador, experiencia esta sin duda de gran riqueza.

**Referencias bibliográficas**


- Santaló, L. (1994). *Enfoque: hacia una didáctica humanista de la matemática*. Buenos Aires: Troquel.
- Chevallard, Y., Bosch, M. & Gascón, J. (1997). *Estudiar matemática. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje.* Barcelona: Horsori.
- Fuller, G. & Tarwater, D. (2000). *Geometría analítica*. Argentina: Addison-Wesley Iberoamericana.
- Grossmann, S. I. (2007). Álgebra lineal. Méjico: McGraw-Hill Interamericana.