EL ÁLGEBRA TEMPRANA

Adriana López Camacho
lopezadriana36@gmail.com
Uruguay

Tema: Pensamiento algebraico

Modalidad: TA

Nivel educativo: Primaria (6 a 11 años)

Palabras clave: álgebra temprana, generalización, patrones.

Resumen

Este taller pretende abordar el difícil pasaje de la Aritmética al Álgebra y reflexionar sobre los problemas didácticos que aparecen en torno al trabajo algebraico en el aula.
Las actividades a trabajar en el taller abordan: el reconocimiento de patrones, la identificación del núcleo generador del patrón y la elaboración de una expresión que generalice; el análisis de una tabla para identificar relaciones y la resolución de problemas algebraicos, el análisis de los distintos procedimientos utilizados y la contrastación con lo realizado por alumnos en una investigación publicada.
Se apunta a reflexionar sobre el tratamiento algebraico a nivel escolar, en cómo abordarlo, qué dificultades se plantean, qué tipo de situaciones problemáticas serán las más convenientes, dentro de un trabajo en donde se espera que los participantes del taller resuelvan, discutan, conjeturen, expliquen sus puntos de vista, enriquezcan la discusión con sus experiencias, convirtiendo este encuentro en un espacio de reflexión colectiva en busca de recuperar el sentido cuando se trate de trabajar en este mundo algebraico.

Introducción

Para el desarrollo del pensamiento algebraico se propone la generalización como una vía de entrada eficaz a partir del reconocimiento de patrones y regularidades de un conjunto de figuras geométricas. Para ello se plantean situaciones en donde un conjunto de objetos poseen una característica común, o bien una serie en donde la regla que la regula será el desafío a descubrir.

Se presentarán algunos de los posibles caminos de solución, muchos de ellos se han visto a lo largo del trabajo en el aula. Estos trabajos viven en las escuelas, pero lo que se quiere es que lo aritmético sea un punto imprescindible pero no suficiente para abordar las situaciones y resolverlas. Encontrar una fórmula que exprese la regularidad hallada de un cierto grupo de objetos o completar una serie implica un cambio y una ruptura con respecto a lo que se viene haciendo a nivel escolar.

La generalización como puerta de entrada

Actividad 1: Los polígonos

a) Dibuja un polígono convexo y marca uno de sus vértices. Traza todas las diagonales que tengan como extremo el vértice marcado. La superficie del polígono queda dividida en triángulos. ¿Puedes deducir cuánto mide la suma de los ángulos interiores de dicho polígono?

b) Dibuja otros polígonos y repite el procedimiento. ¿Puedes buscar una manera de expresar cómo encontrar la medida de la suma de los ángulos interiores de un polígono convexo?

En esta actividad se propone una exploración para polígonos de distinto número de lados, utilizando algunas diagonales para triangular la superficie de dicha figura y así poder llegar a descubrir una regularidad vinculando el número de lados del polígono con la medida de la suma de sus ángulos interiores. Se comienza explorando casos particulares para poder llegar a la construcción de una fórmula que generalice la situación propuesta.

Las tablas se utilizan en la escuela y son una manera eficaz de dar el salto de los casos particulares a poder descubrir regularidades, por ejemplo:

Polígonos	Número de lados del polígono	Número de triángulos	Medida de la suma de los ángulos interiores
Cuadrilátero	4	2	180 x 2
Pentágono	5	3	180 x 3
Hexágono	6	4	180 x 4

En la tabla se puede vislumbrar que la diferencia entre el número de lados y el número de triángulos es de dos, por tanto al momento de expresar esta relación, los alumnos en la clase pueden expresar una fórmula de este tipo:

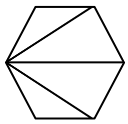
180 x (el número de lados menos dos)

Los argumentos utilizados para validar esta fórmula son:

"*Como la suma de los ángulos interiores de un triángulo es de 180º y puedo obtener siempre dos triángulos menos que el número de lados del polígono realizando esta operación voy a obtener los ángulos interiores de un polígono".*

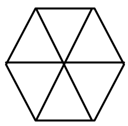
Cuando estaba trabajando en un sexto año esta actividad, dos alumnos seleccionaron el mismo polígono, un hexágono, pero el resultado fue diferente.

Un alumno realizó esta representación:



180 x 4 = 720

Otra alumna, en cambio, lo dibujó así:



180 x 6 = 1080

Frente a esta discrepancia, después de que cada uno explicara lo que realizó, y justificara lo hecho el maestro pregunta:

- *¿Están de acuerdo con lo realizado por sus compañeros? ¿Pueden estar ambos correctos o hay algún error?*

La alumna que presentó el segundo dibujo contesta:

- *Fui yo la que me equivoqué. Estoy tomando de cada triángulo un ángulo interior que no corresponde (los señala) pero lo que puedo hacer es esto: 180 x 6 – 360, porque la suma de los ángulos que no debí contar es de 360 grados.*
  O sea si multiplico 180 por el número de lados y le resto siempre 360 me va a dar lo mismo. Ahora si está bien, porque también me sirve para otros polígonos.

Desde ese momento es esta la fórmula que yo recuerdo y me gusta más que la que encuentro en los libros. La alumna tuvo la capacidad de encontrar el error en el caso particular, pero también generalizar la situación y expresar la generalización para los otros polígonos.

La experiencia de aula nos da mucho material para reflexionar sobre nuestras prácticas, lo que se está haciendo bien y lo que no. En general en estas actividades se observa que los alumnos tienden a dibujar siempre polígonos regulares, como si fueran los únicos existentes entre los polígonos. No es de extrañar que cuando estos alumnos dibujaron hexágonos los dos hicieron hexágonos regulares.

Es importante tener en cuenta que cuando estemos trabajando con estas figuras poder trabajar con un conjunto más amplio, si no corremos el riesgo de que los alumnos solo reconozcan como polígonos los regulares.

¿Cómo podemos hallar la medida de la suma de los ángulos interiores de cualquier polígono?

Con esta segunda propuesta de la alumna, vemos que cada lado va a "generar" un triángulo si marcamos un punto interior, y como ella dijo el ángulo de cada triángulo, que no pertenece a los ángulos interiores del polígono suman un ángulo de 360º por tanto la fórmula general sería:

$$180 \times n - 360$$

Si tenemos en cuenta la otra resolución al generalizar obtendríamos:

$$180\,(n-2)$$

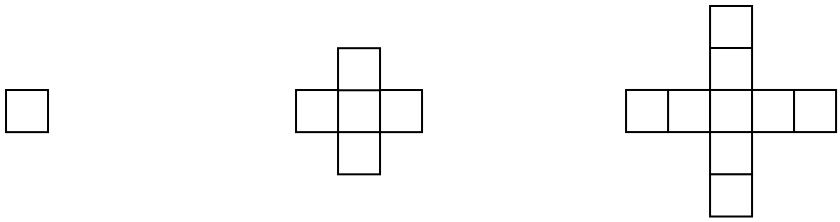
En esta actividad relacionada a los contenidos a trabajar en Geometría se pretende la generalización como una vía eficaz para comenzar a desarrollar un pensamiento algebraico, en donde la aritmética no es suficiente para expresar las relaciones encontradas en este conjunto de figuras. La letra **n** pasa a representar un conjunto de números naturales, en este caso a partir de 3, ya que no existen polígonos de menos de tres lados. Lo que el alumno comienza a estudiar es el ingreso de letras generalizando números, o sea letras que representan varios valores numéricos. Los valores posibles dependerán de la situación propuesta.

"Generalizar es encontrar características que unifican." (Sessa. 2005)

En este caso varía el número de lados de los polígonos que se trazan, pero para generalizar la situación se debe encontrar la ley que expresa la regularidad hallada mediante la producción de una fórmula. Estamos frente a algo nuevo y desconcertante para el alumno, estar frente a diferentes fórmulas, para expresar dicha regularidad, pero que son equivalentes y eficaces a la hora de resolver la situación propuesta. Esto implica un cambio, ya que vienen de una Matemática con resultado único, y en general un único camino.

La búsqueda de patrones

Actividad 2



a) *¿Cuántos cuadraditos habrá en el lugar 11? ¿Y en el lugar 50?*

b) *Busca una regla que permite extender la secuencia y busca una forma de expresar esa generalización.*

Una posible manera de resolver la situación es contando los cuadraditos que se van agregando en cada lugar podría ser:

1 5 9

Si observamos lo realizado en cada caso, para poder encontrar más fácilmente el patrón una expresión equivalente sería:

1 1+4 1+4+4

o en forma similar:

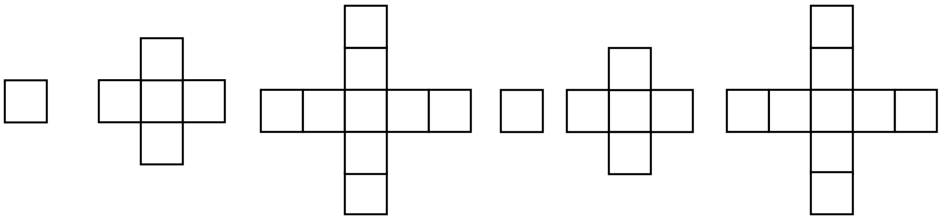
1 1+4x1 1+4x2

O sea en el segundo lugar se le agregan cuatro cuadraditos y en el tercer lugar se agregan otros cuatro. Es de suponer que en el cuarto lugar se le agregarán otros cuatros y así sucesivamente.

Esto implica que en el lugar 11 al 1 se le agregarían 10 veces un 4, o sea: 1 + 4x10 y en el lugar 50 sería 1 + 4x49.

Esta forma de encarar el problema para generalizar la situación en el lugar n: 1+4(n-1), o expresarlo no en lenguaje algebraico: a 1 le sumo el 4 multiplicado por el número que exprese el lugar anterior al que se tiene que hallar.

Esto no es tan obvio, puede haber otras interpretaciones igualmente correctas, por ejemplo:



Se podría plantear esta secuencia cíclica, en donde la figura ubicada en el lugar 11 y en el lugar 50 no tienen porqué coincidir con lo planteado anteriormente ¿Cómo resolver esta nueva situación?

Una tabla sería una manera interesante de buscar regularidades.

Lugares de la primera figura	Lugares de la segunda figura	Lugares de la tercera figura
1	2	3
4	5	6
7	8	9
10	11	12

En esta columna ya se puede concluir que es la segunda figura la que estará en el lugar 11, pero para responder la segunda pregunta sin tener que seguir con la tabla se tendrá que encontrar alguna regularidad que permita indicar en cada ubicación cuál es la figura que corresponde.

 ISSN 1688-9886

En la tercer columna vemos que se ubican los múltiplos de tres, en la primera los múltiplos de tres más uno y en la segunda los múltiplos de tres más dos (recordemos que 0 es múltiplo de tres así que 1 se puede tomar como múltiplo de tres más uno). ¿Cómo puedo saber en qué columna va el 50, u otro número más grande? Una posibilidad es plantear esta división:

$$\begin{array}{r|l} 50 & \underline{3\;\;} \\ 20 & 16 \\ 2 & \end{array}$$

Si el resto de la división es 2 esto implica que el 50 es un múltiplo de tres más dos, ya que lo puedo expresar como *16x3+2*, por lo tanto estará en la segunda columna también, ello implica que es la segunda figura.

Otra posibilidad es utilizar el criterio de divisibilidad por tres y encontrar el número más cercano a 50, menor, que sea múltiplo de tres y ver qué diferencia hay entre ambos para poder decidir qué figura es la que se debe ubicar en el lugar 50.

Varios alumnos en estos casos utilizan la multiplicación por tres y se van acercando lo más posible al 50.

También nos encontraremos con alumnos que siguen la secuencia dibujando hasta el lugar 50 para encontrar la figura, sin lograr hallar una regularidad. Por eso la gestión del maestro es tan importante, donde los alumnos puedan expresar lo que hicieron, cómo lo hicieron y las justificaciones que expresan para que se socialicen otras formas de pensar, de resolver, que pueden ser puntos de partida para posteriores trabajos.

En esta búsqueda de regularidades en una serie donde se dan algunos elementos que no determinan cómo sigue la misma, encontramos distintas formas de resolverlo, por tanto queda a un nivel de conjetura si no se posee más información.

Este trabajo de reconocimiento de patrones y regularidades en Matemática, así como hacer generalizaciones sobre ellas no se aprende de un día para el otro, se necesita experiencia y haber tenido contacto con situaciones que lo requieran, pero aportan al desarrollo del pensamiento algebraico en una educación temprana. También se deberá tener en cuenta que la utilización del lenguaje simbólico, las letras, ingresarán a la clase como una necesidad de expresar un número generalizado, o sea un expresarán un conjunto y no una cantidad en particular, sin apuro, dándole tiempo a los alumnos de ir realizando las rupturas necesarias para transitar, sin perder el sentido, del mundo aritmético a un mundo algebraico.

Para finalizar cito las palabras de Kaput y Blanton (2011):

"*La perspectiva es entonces que (…) las experiencias en construir, expresar y justificar generalizaciones matemáticas – para nosotros el corazón del álgebra y del pensamiento algebraico - debe ser un proceso ininterrumpido desde el inicio de la educación formal"*

Referencias bibliográficas

Blanton, M. L. & Kaput, J. (2011). *Functional thinking as a route into algebra in the selementar grades*. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), Early algebraization, 5-23. New York, NY: Springer.

Carraher, D; Schliemann, A y Schwartz, J. (2023) *¿Álgebra en la escuela primaria?* En *Matemática en la escuela primaria* [II]. Saberes y conocimientos de los niños y docentes, parte II, Capítulo 4, pp. 121 a 164. Buenos Aires: Cuestiones de Educación. Paidós.

Sessa, C. (2005). *Iniciación al estudio didáctico del álgebra. Orígenes y perspectiva.* Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Socas, M; Camacho, M; Palarea, M.; Hernández, J. (1996). *Iniciación al Álgebra*. *Matemáticas: cultura y aprendizaje*. Madrid: Síntesis