

MODELACIÓN MATEMÁTICA MEDIANTE LA SIMULACIÓN EN DINÁMICA DE SISTEMA

Daniel A. Montenegro Tobar

symmtecc@symmtec.cl; symmtec.investigación@gmail.com

Modeling and Simulation Mathematics and Estadistics Consulting, Chile

Tema: Modelización de la realidad.

Modalidad: Taller.

Nivel educativo: Terciario - Universitario.

Palabras clave: Modelos – Simulación – Dinámica sistemas – Tecnologías.

Resumen

En este taller se desarrollarán modelos matemáticos, utilizando la simulación discreta y continua con Dinámica de Sistemas, mediante plataformas informáticas, como Vensim y Arena, ambos libres para fines académicos. Se formulará y resolverá de forma rigurosa, modelos en sistemas de ecuaciones diferenciales y/o algebraicos, como las ecuaciones de Lotka – Volterra para la dinámica de poblaciones, los modelos SIR para la dinámica de enfermedades y las ecuaciones de Lanchester y modelos de optimización de investigación de operaciones, como los modelos de asignación, entre otros. Mediante las herramientas de Extrapolación, ajuste de distribución a datos estadísticos, matrices de criticidad y herramientas estadísticas de ingreso y proyección de datos (Lookup), incorporadas como complementos en los softwares de simulación, estudiaremos las soluciones obtenidas de los modelos matemáticos en diferentes escenarios, permitiendo además indagar sobre la optimización de estos sistemas. Finalmente, se analizarán relaciones entre algunos modelos estudiados y los modelos que gobiernan la propagación de la información.

Introducción

La construcción y generación del pensamiento lógico – deductivo para resolver problemas en ciencias, y con esto generar un aprendizaje significativo, en particular en el campo de las matemáticas, se debe concebir como un sistema formado por diferentes variables y experiencias, conceptos y principios de enorme aplicabilidad. Los alumnos resuelven problemas matemáticos sustituyendo números en ecuaciones para obtener el resultado correcto, sin embargo, la modelación de la ecuación, que desarrolla en el alumno una capacidad de abstracción fundamental en el área, el trabajo de conceptualizar un fenómeno, para luego sobre el modelo desarrollado, encontrar la solución a la

problemática abordada, generarían en el alumno un nivel superior de conocimiento y preparación. “De suerte que las oportunidades del estudiante para experimentar con ideas (contrastarlas y explorar sus consecuencias) son a lo sumo muy limitadas y por consiguiente la enseñanza tradicional estimula poco el entendimiento conceptual de la ciencia” (Joaquín Medin, 2007, p.1). Lo anterior, establece la idea de que el alumno pueda relacionar conceptos, modelos matemáticos canónicos, y establecer sus estructuras de comportamiento para con ello extrapolarlas a situaciones de la vida cotidiana, permitiéndose responder a preguntas tanto personales como sociales y su proyección en el tiempo. La Dinámica de Sistemas, es una metodología propuesta por Jay W. Forrester, profesor e investigador del Massachusetts Institute Technology (MIT), a fines de la década de los años 60, para analizar fenómenos dinámicos de sistemas de cualquier naturaleza. Esta metodología establece que existe una analogía entre un sistema dinámico y un sistema de vasos comunicantes. En la naturaleza y en la dinámica de nuestra sociedad, las diferentes variables que influyen sobre el comportamiento de un sistema, y sobre los agentes de estos sistemas (sistema de sistemas), generan cadenas de causa – efecto de acciones entre estos elementos. En los sistemas simples, la causa y el efecto suelen producirse cercanos en el tiempo y en lugar, sin embargo, en sistemas complejos, la causa puede estar muy lejana, lo que provoca un comportamiento poco intuitivo, además de desconocer de forma concreta, la medida en cómo se altera el comportamiento del modelo de un sistema como consecuencia de la variación de sus parámetros. Las relaciones en cadena, mencionadas anteriormente entre las variables y/o elementos del sistema en estudio aumentan la sensibilidad del mismo, respecto a sus parámetros. La metodología de Dinámica de Sistemas, propone la solución a estas dificultades. Richmond (2002) señala que todo comportamiento complejo que ocurre a nuestro alrededor, puede describirse y explicarse mediante una estructura de niveles, flujos y bucles de realimentación; stocks, flows and loops, utilizando la analogía hidrodinámica, conocidos como Diagramas de Forrester. La aplicación de este modo de pensar contribuiría en el alumno un aprendizaje significativo, pues requeriría en el estudiante la construcción de complejos mapas conceptuales, flujogramas y/o diagramas de causa – efecto (diagramas de Ishikawa), lo anterior para conocer las relaciones entre las variables

identificadas en la problemática y su jerarquización en el sistema, lo anterior motiva la educación centrada en el alumno y no en el profesor. Permitiría conocer modelos simples y complejos, con posibilidades de extrapolarlos a otras ciencias, aplicadas y sociales. En el prefacio del libro *Dynamic Modeling*, de Bruce Hannon, se señala: “La democratización del modelado del mundo real indica que estamos en los comienzos de una revolución en la educación y el pensamiento... que hará del modelaje un componente integral de la educación general junto a la literatura y numeracia”

Otra de las razones importantes de la propuesta para la modelación matemática mediante la dinámica de sistemas, es la posibilidad del uso de tecnologías de información y comunicación, esto es, el uso de plataformas informáticas. Autores como Batanero (2009), destaca cómo la tecnología ha influido en el campo de las estadísticas y su enseñanza. Para la simulación y modelización de sistemas dinámicos continuos y discretos podemos destacar los programas Vensim y Arena, permiten el trabajo tipo taller de los estudiantes y generan motivación en el aprendizaje mediante herramientas de nuestro siglo. “Asimismo, se destaca cómo la tecnología ha reducido el tiempo de cálculo, permitiendo trabajar con aplicaciones reales en clase”. (Espinoza y Fernández, 2014, p.90).

De acuerdo a lo expuesto anteriormente, se desarrolla este taller, que tiene por objetivos la modelación matemática de sistemas simples y complejos mediante la simulación en Dinámica de Sistemas, utilizando los softwares Vensim y Arena. Ambos, tienen versiones académicas gratuitas con algunas limitaciones, que para el contexto de trabajo en aula no provoca barreras de utilización. Ambos trabajan con un entorno Web, lo que facilita su uso.

El objetivo del taller es modelar matemáticamente un sistema dinámico, desde su formulación más simple hasta lograr un nivel de complejidad importante, desarrollando modelización y simulación mediante Dinámica de Sistemas y extrapolando a otras disciplinas, esperando así cautivar a la audiencia. Además en cada sistema en estudio,

analizaremos las diferentes variables que se relacionan en él, cálculo de parámetros y modelos funcionales de relaciones, estableceremos las hipótesis de cada modelo y sus alcances y soluciones.

Desarrollo del taller

El taller se iniciará con la presentación y discusión del modelo matemático de la dinámica de poblaciones, el modelo de crecimiento. Se identificarán las variables de estado, variables de flujo y auxiliares y sus relaciones causales entre ellas, se establecerá y discutirá sobre las hipótesis, problemas de valor inicial y restricciones asociadas de acuerdo a la metodología de la Dinámica de Sistemas. El modelo matemático será construido en el software Vensim. Para ello, se desarrollará una introducción a esta herramienta. En la nueva ventana de proyecto se establecerá la configuración del modelo, el tiempo (inicio, final, paso y unidad de medida), además del método numérico de integración (Euler o RK4). Sobre el modelo construido, de acuerdo a las relaciones causales, se establecerán el valor de los parámetros iniciales y las ecuaciones que gobiernan la dinámica del sistema. Para el caso de la determinación de la tasa de natalidad del modelo de crecimiento (o constante de proporcionalidad) se utilizará la herramienta de ajuste de datos, Input Analyzer, incorporada en el software Vensim. Como segunda actividad nos enfocaremos en la función Lookup, herramienta de recolección matricial de datos de Vensim, y la función Lookup Extrapolate, que permite proyectar en el tiempo mediante técnicas numéricas de extrapolación polinomial de Lagrange. Se iniciará la simulación en Vensim, analizando diferentes escenarios de acuerdo a la variación de los parámetros de entrada al modelo, y se interpretarán los gráficos obtenidos.

Como segunda parte del taller, se perfeccionará el modelo anterior, mediante la incorporación de muerte natural y posteriormente un modelo con limitaciones de crecimiento en el sistema, superando así algunas restricciones anteriores, el conocido modelo de crecimiento en S. Se utilizarán herramientas de modelación y simulación incorporadas en el software Vensim, algunas de ellas son: Pulse, Queue, Ramp, Random

(Beta, Binomial, Exponential, Beta, Binomial, Poisson, Weibull, entre otras), Step, IO Objects y Reference Mode.

La tercera parte del taller consiste en desarrollar el modelo de Desgaste de Lanchester, que modela la dinámica entre dos poblaciones que se enfrentan. Se estudiará el modelo general o ley cuadrática y se establecerán relaciones de este modelo con otras disciplinas, en particular, presentaremos la dinámica del campo de batalla mediante el estudio de la batalla de Iwo Jima (Primera guerra Mundial) y la dinámica de empresas, específicamente en el área de la teoría de Ventaja competitiva de Porter. Se desarrollará entonces la extrapolación de estos modelos mediante simulación en Dinámica de Sistemas y la herramienta de ajuste de distribución del software Arena (Input Analyzer) para obtener las funciones de entrada a los modelos de cada sistema.

Los modelos SIR (Susceptibles, Infectados, Recuperados) se estudiarán en la cuarta parte del taller en diferentes situaciones, con estudio analítico y numérico mediante el uso de herramientas de cálculo de los softwares de simulación propuestos. En esta parte del taller se relacionará los modelos de dinámica de poblaciones incorporando la variable epidemiológica, los modelos SIR que se analizarán tendrán las siguientes características generales: Sin nacimientos ni muertes, con nacimientos y muerte natural, con muerte por enfermedad y con población de tamaño variable. Las ecuaciones matemáticas que gobiernan la dinámica de estos modelos, son de carácter no lineal, por lo que se demostrará la potencialidad que entrega la simulación con Dinámica de Sistemas para el estudio y modelización de la realidad. De acuerdo a lo anterior, se extrapolará este modelo final con la propagación de la información en la población.

Finalmente, se presentará modelos de Investigación de Operaciones utilizando el software Arena, permitiendo optimizar el sistema de asignación en estudio mediante la herramienta incorporada Process Analyzer. Para la modelación y simulación se utilizarán de la barra de proyecto, Basic Process, Advanced Process y Flow Process.

Referencias bibliográficas

- Medin, J. (2007), Modelado de Sistemas Dinámicos y Educación en Ciencias e Ingeniería. Latin American and Caribbean Journal of Engineering Education, Vol. 1(2).
- Richmond, B. (2002). An Introduction to System Thinking, HPS
Disponible en:
<http://repositorio.upr.edu:8080/jspul/bitstream/10586%20/515/1/Modelado%20de%20Sistemas%20Dinamicos.pdf>.
Consultado el 30/1/2017.
- Hannon, B. & Ruth, M. (2001). Modeling Dynamic Systems. Springer
- Batanero, C. (2009). Retos para la formación estadística de los profesores. II encuentro de Probabilidad e Estadística na Escola Universidade do Minho, 2009, Braga Portugal.
<http://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/Formprofesores.pdf>.
Consultado el 23/2/2017.
- Espinoza C., Fernández J. (2014). Importance of statistical software teaching and learning at the University of Carabobo (Venezuela). Aula de encuentro 16(1), 89 – 102.