

CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS NO GEOGEBRA

José Carlos Pinto Leivas – Rosvita Fuelber Franke – Anne Desconsi Hasselmann Bettin
leivasjc@unifra.br – rosvitaf@unisinis.br – nanydh@yahoo.com.br

Centro Universitário Franciscano de Santa Maria – Brasil – Universidade do Vale do
Rio dos Sinos – Brasil – Rede Estadual de Ensino do RS - Brasil

Tema: Uso de tecnologias digitais

Modalidad: Taller

Nível educativo: terciário

Palabras clave: Banda de Moebius. Aplicações. GeoGebra

Resumo

A geometria de superfícies, em geral, é pouco explorada na formação do professor de Matemática e, nem sempre, são indicadas aplicações, como é o caso da Banda de Moebius, a qual apresenta inúmeras aplicações como na Psicanálise estudada por Lacan, nas obras literárias de Calvino, na Arquitetura em construção de pontes, casas, móveis, etc. É fato notável que o advento da Geometria Dinâmica, com os processos visuais, tornaram mais acessíveis para visualização objetos espaciais. Particularmente, surgiu e se consagrou no meio acadêmico o GeoGebra, o qual, na versão 5.0, apresenta a possibilidade de exploração 3D. Neste minicurso pretende-se trazer algumas considerações a respeito das aplicações da Banda a fim de utilizar as ferramentas do software para estudar orientabilidade, curvas obtidas sobre a mesma, o triedro móvel: vetor tangente, normal e binormal, em movimentos, permitindo visualização e variação da orientação. Por meio de atividades previamente elaboradas os participantes terão oportunidade de realizá-las em laboratório de informática, podendo vir a ser recurso para professores e futuros professores em diversas disciplinas como Cálculo, Geometria e Geometria Analítica, por exemplo. Durante o ano de 2016 o GEPGEO dedicou-se à aplicações da Topologia em nível de formação de professores de Matemática.

Desenvolvimento

O Grupo de Estudos e Pesquisas em Geometria – GEPGEO, coordenado pelo primeiro autor, tem se preocupado em desenvolver atividades de ensino que possam ser levadas à escola básica e à formação de professores, quer em ação continuada, quer na inicial. Os estudos recentes têm mostrado o potencial que a Topologia Geométrica oferece para a aprendizagem de seus participantes, os quais, na maioria das vezes não tiveram esse conteúdo na Licenciatura em Matemática e, quando a disciplina é cursada no bacharelado, é feita de forma abstrata sem conexão com os aspectos geométricos que se acredita devam estar envolvidos.

Atualmente, é indiscutível o uso do computador para o ensino de Matemática e, os *softwares* de Geometria Dinâmica são essenciais para desenvolver habilidades visuais e auxiliarem na compreensão de conceitos que, algumas vezes, se tornam complexos para o aluno e de difícil ensino ao professor. Neste sentido, encontra-se no GeoGebra um ambiente de aprendizagem atual e que produz efeito incentivador para os alunos construírem seus conhecimentos, uma vez que

[...] para fins educacionais, as aplicações iniciais do GeoGebra foram apoiadas por tarefas que convidavam os alunos a visualizar algum invariante geométrico ou outras propriedades matemáticas, e a interação desses alunos com as aplicações, com professores e colegas, estimulando-os a adquirir algum raciocínio geométrico e permitir a formulação de conjecturas. (Santos; Trocado, 2016, p. 3)

Portanto, o GEPGEO não poderia deixar de investigar um desses ambientes de aprendizagem no qual fosse explorada a versão 3D do *software* para abordar curvas e superfícies no espaço, especialmente aquelas que são importantes e se conectam ao Cálculo, algo que nem sempre é feito nesta área do conhecimento que se atém mais a procedimentos algorítmicos.

A proposta do minicurso surgiu a partir de estudos realizados sobre Topologia, em particular da Banda de Moebius, com aplicações em diversas áreas como Psicanálise, Literatura, Arquitetura, dentre outros. O uso do GeoGebra culmina com estes estudos, realizados no ano de 2016, uma vez que é possível desenvolver habilidades visuais, especialmente sobre a não orientabilidade da Banda.

Uma das grandes novidades em termos de Geometria pós Euclides foi a descrição, por René Descartes, de um objeto geométrico por leis matemáticas. Com o advento do Cálculo, por Leibnitz, funções passaram a desempenhar fator preponderante nesta descrição.

Considera-se I um intervalo aberto de números reais e f uma correspondência que associa a cada $t \in I$ um ponto de \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 , respectivamente, dado por $f(t) = (x(t), y(t))$ ou $f(t) = (x(t), y(t), z(t))$, a qual é denominada curva parametrizada no plano (ou no espaço).

No minicurso se explora alguns exemplos de curvas, com as ferramentas do GeoGebra, estabelecendo comparativos visuais e diferenças entre as representações plana e espacial.

Exemplo 1: Considere a equação paramétrica $f(t)=(2+ t, 3+2t, t)$, $t \in I$ (ou \mathfrak{R}).

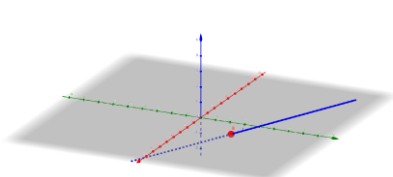


Figura 1-reta no plano

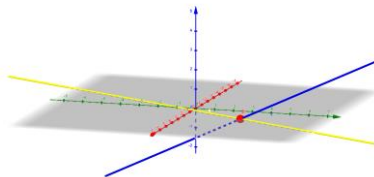


Figura 2-reta no espaço

Como se pode observar (Figura 2), a curva é uma reta no espaço atravessando o plano XOY no ponto $B=(2,3,0)$. Por sua vez, eliminando a terceira coordenada, tem-se a reta s no plano XOY, que corresponde à equação paramétrica $g(t)= (2+ t, 3+2t)$, $t \in I$ (ou \mathfrak{R}) (Figura 1).

Exemplo 2: Tome $t \in I \subset \mathfrak{R}$ para definir a função $X(t) = (1+3\cos(t), 2+3\sin(t), 0)$.

Esta parametrização representa uma circunferência C no plano XOY, com centro no ponto $(1,2,0)$ e raio igual a 3 unidades (Figura 3).

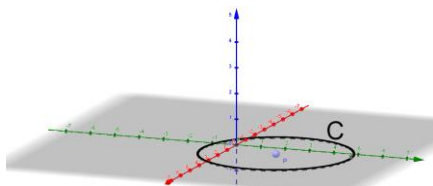


Figura 3 – circunferência no plano

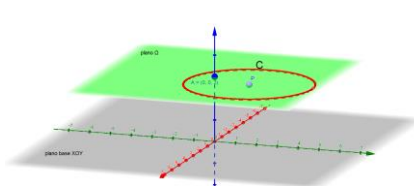


Figura 4 – circunferência no espaço

Con formato: Fuente: 10 pto, Negrita

Por sua vez a parametrização: $X(t) = (1, 2, 3) + (3 \sin(t), 3 \cos(t), 0)$ representa uma circunferência no espaço (Figura 4), localizada no plano Ω , $z=3$, com centro no ponto $P=(1,2,3)$ e raio igual a 3 unidades.

A partir dessas construções iniciais com curvas planas e espaciais, pretende-se explorar alguns aspectos sobre superfícies parametrizadas no espaço para a exploração posteriormente da Faixa de Moebius, objetivo principal do minicurso.

Considere $U=\{(u,v): u,v \in \mathfrak{R}\}$ um conjunto aberto do \mathfrak{R}^2 . A aplicação $f: U \rightarrow \mathfrak{R}^3$ é denominada de superfície. As variáveis u e v são denominadas parâmetros e a função $f(u,v)=(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ é sua forma parametrizada. No que segue é apresentado mais um exemplo obtido no GeoGebra.

Exemplo 3. Ao usar o comando curva no GeoGebra e entrar na janela algébrica com a expressão

$$\text{Curva}[(\cos(t), \sin(t), t), t, -5, 5] \quad (1)$$

se obterá uma curva no espaço, denominada hélice cilíndrica (Figura 5). Ao utilizar na janela de entrada, no mesmo arquivo onde já está representada a equação (1), o comando

$$\text{Superfície}[(\cos(u), \sin(u), v), u, -\pi, \pi, v, -5, 5] \quad (2)$$

verifica-se os dois lugares geométricos que o *software* oferece. O segundo comando apresenta a curva H envolta na superfície cilíndrica circular *R* (Figura 6).

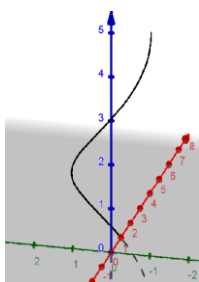


Figura 5 – hélice cilíndrica

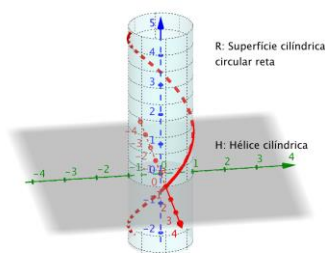


Figura 6 – hélice e superfície cilíndricas

Orientabilidade e a Banda de Moebius

Suponha que uma superfície, aberta ou fechada, possua faces, arestas e vértices. Intuitivamente, ela se diz conexa se toda face está unida ao resto da superfície por pelo menos uma aresta (Santaló, 1993). Para ele, “se orientamos cada face de maneira que a orientação das arestas deixe o interior à sua esquerda, cada aresta interior terá duas orientações opostas segundo as duas faces a que pertence. Se isto é possível, sem que haja contradição, se diz que a superfície é orientável” (p. 102).

Exemplos importantes de superfícies orientáveis são a da esfera e a do toro e uma não orientável é a da Banda de Moebius, a qual se irá explorar com alguns detalhes utilizando o GeoGebra como ferramenta.

Exemplo 4. Tome a parametrização da Banda de Moebius, com os parâmetros s e r variando em \mathfrak{R} :

No link <https://www.geogebra.org/m/WYw8Buxh> encontra-se a Banda pronta. O que se pretende no minicurso é apresentar a construção detalhadamente, explorando a questão da não orientabilidade dessa superfície, relacionando-a com o triedro móvel de Frenét-Serret.

Assim, considere a parametrização particular

$$S(s, r) = \begin{cases} \cos(s) \left(2 + r \cos \left(1, \frac{s}{2} \right) \right) \\ \sin(s) \left(2 + r \cos \left(1, \frac{s}{2} \right) \right) \\ r \sin \left(1, \frac{s}{2} \right) \end{cases}$$

Em que (s, r) é o par de parâmetros, sendo 's' o ângulo e 'r' a largura da faixa. Por sua vez,

$S = \text{Superfície}[\cos(s)(a+r\cos(m(s/2))), \sin(s)(a+r\cos(m(s/2))), r\sin(m(s/2)), s, 0, 2\pi, r, -ra, ra]$; é uma parametrização generalizada, sendo 'a' variável que indica o quanto mais aberta ou fechada ela se apresenta e 'm' o número de pontos de mudança de orientação ou de torções. A Figura 7 indica a Banda aberta em função da variação de 'a' e as flechas em sentidos opostos indicam a mesma se fechando. Já a Figura 8 mostra a mesma fechada, ou seja, com o valor $a=2$, como indicado na parametrização particular com $m=1$, ambos fixos para melhor visualização. Note que nela os valores de s estão variando de 0 a 2π , enquanto r varia de -1 até 1.

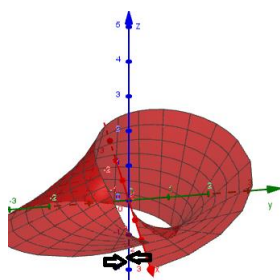


Figura 7 – Banda de Moebius aberta

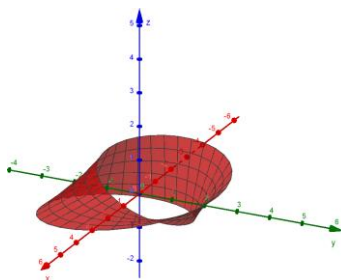


Figura 8 – Banda fechada

Determina-se o plano XOY a fim de se poder perceber mais facilmente quando a superfície passa para a parte inferior de tal plano e o ponto de torção correspondente.

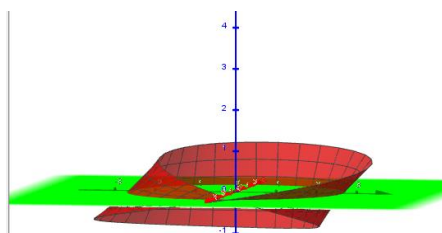


Figura 9 – Plano interseccionando a Banda de Moebius

No que segue criam-se duas curvas sobre a superfície:

Curva Paramétrica

$$\bullet \text{ C1: } \left. \begin{aligned} x &= \cos(s) \left(2 + 1 \cos\left(1 \cdot \frac{s}{2}\right) \right) \\ y &= \sin(s) \left(2 + 1 \cos\left(1 \cdot \frac{s}{2}\right) \right) \\ z &= 1 \sin\left(1 \cdot \frac{s}{2}\right) \end{aligned} \right\} 0 \leq s \leq 6.28$$

Essa curva representa uma das bordas da faixa antes de realizar a torção, a superior (Figura 10).

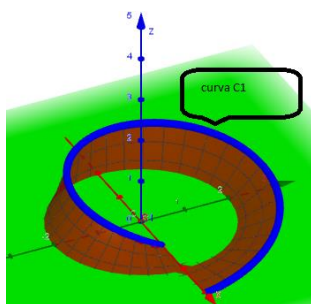


Figura 10 – Curva C₁

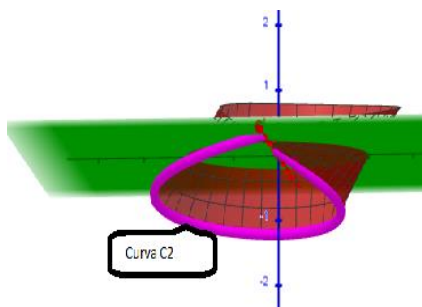


Figura 11 – Curva C₂

A curva parametrizada C₂

$$\bullet \text{ C2: } \left. \begin{aligned} x &= \cos(s) \left(2 - 1 \cos\left(1 \cdot \frac{s}{2}\right) \right) \\ y &= \sin(s) \left(2 - 1 \cos\left(1 \cdot \frac{s}{2}\right) \right) \\ z &= -1 \sin\left(1 \cdot \frac{s}{2}\right) \end{aligned} \right\} 0 \leq s \leq 6.28$$

representa a borda inferior (Figura 11).

Para a geração de tais curvas basta ingressar na janela Entrada com os comandos:

$$C_1 = \text{curva}[\cos(s) (2+r \cos(1.s/2)), \sin(s) (2+r \cos(1.s/2)), r \sin(1s/2), s, 0, 2\pi];$$

$$C_2 = \text{Curva}[\cos(s) (2-r \cos(1s/2)), \sin(s) (2-r \cos(1s/2)), -r \sin(1s/2), s, 0, 2\pi].$$

De imediato não se percebe o que ocorre mas, com a dinâmica do Geogebra, girando o plano, verifica-se, com a variação de parâmetro ‘a’, o ponto onde ocorre a inversão (Figura 12).

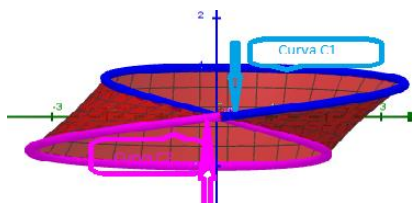


Figura 12. As bordas invertendo-se no

Delineando o Referencial Móvel

Crie controle deslizante, t, com variação de 1 a 12, por exemplo, o qual fará com que o ponto $A = (\cos(t)(2+\cos(t/2)), \sin(t)(2+\cos(t/2)), t \sin(t/2))$, esteja sobre a borda superior e o ponto $B = (\cos(t)(2-\cos(t/2)), \sin(t)(2-\cos(t/2)), -\sin(t/2))$, sobre a borda inferior. Conduza um plano perpendicular ao plano base passando por A e por B; o ponto médio C do segmento AB e o ponto $D=3(-\sin(t), \cos(t), 0) + C$. Criam-se u: Vetor[C,D] e v: Vetor [C,A]. O ponto $E=C+(y(u)z(v)-z(u)y(v), z(u)x(v)-x(u)z(v), x(u)y(v)-y(u)x(v))/3$ possibilita a construção do vetor w: vetor[CE].

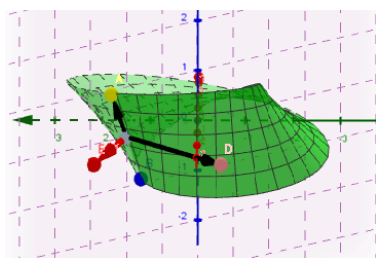


Figura 13 – Triedro de Frenét-Serret

A dinâmica do software permite a busca de melhor visualização do conjunto constituído pelo plano tangente à superfície (vetores $[C,D]$ e $[C,A]$) no ponto C e pelo vetor $[C,E]$, denominado vetor normal. Os três vetores constituem um referencial móvel, triângulo, sobre a superfície, denominado Triedro de Frenét-Serret

Facilmente, nota-se que o vetor CD é tangente à superfície em C, enquanto que CA aponta para a curva superior, sendo-lhe perpendicular. Por sua vez o vetor CE, ortogonal aos dois, está apontando para fora ou para o interior da superfície, conforme se anime o controle deslizante 't'.

O dinamismo, ao fazer o ponto C percorrer a faixa, mostra que os vetores irão mudando suas direções e, particularmente, o vetor CE irá mudar de sentido quando ocorrer a torção da superfície, identificando a continuidade dessa superfície, ou seja, ela perdeu sua **orientabilidade** uma vez que tal vetor retorna ao ponto inicial com o sentido oposto ao de partida. Durante o minicurso serão desenvolvidos outros elementos das construções que não caberiam neste curto espaço.

Referências bibliográficas

- [SANTOLÓ Santaló](#), L. A. (1993). *La Geometría en la formación de profesores*. Buenos Aires: Red Olímpica
- Santos, J., Trocadero, A. (2016). GeoGebra as a Learning Mathematical Environment. *Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo*, v.5 n.1, pp 05-22,.