O USO DO GEOGEBRA NA INVESTIGAÇÃO DA GEOMETRIA ELÍPTICA

Celina A. A. P. Abar
abarcaap@pucsp.br
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo- Brasil

Tema: Uso de tecnologías.
Modalidad: Taller (TA)
Nivel educativo: Formación y actualización docente
Palabras clave: GeoGebra, Geometrias Não- Euclidianas

Resumo
Esta oficina tem como proposta orientar os participantes para a utilização do GeoGebra e de um applet, já construído e disponível na internet, para a investigação das Geometrias Não-Euclidianas em especial a Geometria Elíptica.

Introdução

O nascimento das Geometrias Não Euclidianas (GNE) se deve a alguns matemáticos que desenvolveram uma teoria similar à Geometria Euclidiana, substituindo o Postulado das Paralelas por uma de suas negações.

Podemos negá-lo escrevendo:

1.“Existem uma reta r e um ponto P não pertencente a r, tal que por P passam duas retas paralelas a r” dando origem à à Geometria Hiperbólica, creditada a Lobachevski (1793-1856) e Bolyai (1802-1860),

2.“Existe uma reta r e um ponto P, tal que por P não passa reta paralela a r” dando origem, juntamente com a substituição de outros postulados de Euclides, à Geometria Esférica desenvolvida inicialmente por Riemann (1826-1866) e que proporcionou a construção por Klein (1849-1925) da Geometria Elíptica.

A exploração, destas afirmações, será realizada no GeoGebra por meio de atividades propostas.

Objetivo da Oficina

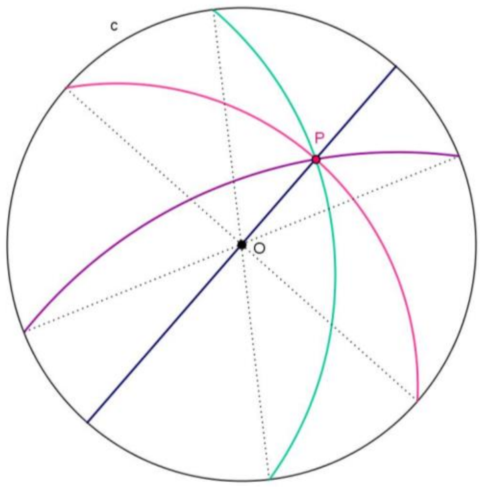
Identificar fatores que possam dificultar o conhecimento e a compreensão das GNE em particular da Geometria Elíptica. Com as atividades que serão desenvolvidas espera-se que, ao serem comparadas as propriedades da GE com a GNE, os participantes recuperem conceitos já adquiridos e os aprimorem por meio do GeoGebra.

Desenvolvimento da Oficina

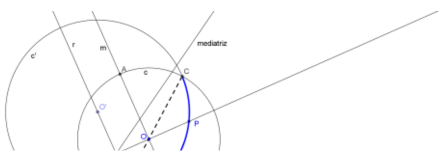
Uma das formas de negar o Postulado das Paralelas é dizer que por um ponto exterior a uma reta não existe paralela alguma (Geometria Elíptica); a outra consiste em dizer que por um ponto exterior a uma reta há mais de uma paralela (Geometria Hiperbólica)
Após a construção da Geometria Hiperbólica, desenvolvida principalmente por Lobachevski (1793-1856) e Bolyai (1802-1860), Riemann (1826-1866), com a finalidade de obter habilitação para ser professor na Universidade de Göttingen, desenvolveu a Geometria Esférica. Klein (1849-1925) construiu o que denominamos de Geometria Elíptica e também um modelo plano para tal geometria.
Nesse texto são indicadas construções no GeoGebra de alguns modelos para explorar vários resultados que são pertinentes às Geometrias Não Euclidianas como a Geometria Elíptica.

Modelo Elíptico Plano No Geogebra- Modelo De Klein

No universo da Geometria Elíptica fazem parte as geometrias Projetiva, Estereográfica e Hiperesférica (superfície esférica).
Para esse modelo podem ser construídos no GeoGebra macros ferramentas: reta elíptica, segmento elíptico e distância elíptica. O modelo a ser utilizado deve possuir tais macros como ferramentas. A base de construção das ferramentas Elípticas é a partir de uma circunferência.
Um modelo em Geometria Elíptica Plana (devido a Klein) é semelhante (mas não igual) ao modelo do Disco de Poincaré para Geometria Hiperbólica.
O modelo plano de Klein é um círculo unitário. Os “pontos” são os pontos euclidianos dentro do círculo unitário, bem como os pares de pontos antípodas no círculo que são identificados.
As “retas” são ou diâmetros do círculo unitário ou arcos das circunferências euclidianas que interceptam a circunferência do círculo unitário nas extremidades de um diâmetro como na figura a seguir.



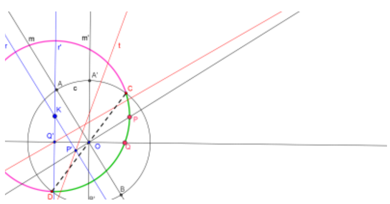
Para a construção desse modelo no GeoGebra considere C uma circunferência qualquer de centro O e P um ponto no seu interior. O Lugar Geométrico dos centros das circunferências que passa pelo ponto P e determina em C um diâmetro é uma reta r elíptica.



ATIVIDADE 1. Construção da ferramenta Reta_Elip por dois pontos.

	Abra um arquivo novo. Desabilite a opção “Exibir eixos” e feche a janela Algébrica
	Crie uma circunferência qualquer “c” renomeie o seu centro com a letra “O”. Esconda o ponto da circunferência.
	Tome dois pontos quaisquer no interior da circunferência e renomeie por P e Q
	Construa a reta “s” por P e O e a reta s’ por Q e O.

	Construa a reta “m” perpendicular à reta “s” pelo ponto O e a reta m’ perpendicular à reta “s’ ” pelo ponto O.
	Encontre a interseção da reta “m” com a circunferência “c” e os renomeie como A e B e a interseção da reta “m’ ” com a circunferência “c” e os renomeie como A’ e B’.
	Construa a mediatriz “t” de AP e a mediatriz “t’ ” de A’Q
	Encontre a interseção da mediatriz “t” com a reta “s”, e denomine-a por P’ e a interseção da mediatriz “t’ ” com a reta “s’ ”, e denomine-a por Q’.
	Construa a reta “r” perpendicular a “s”, que contém o ponto P’ e a reta “r’ ” perpendicular a “s’ ”, que contém o ponto Q’
	Encontre a interseção das retas “r” e “r’ ” e o renomeie por K
	Crie uma circunferência “c’ ” com centro em K e pelo ponto P (ou Q)
	Encontre os pontos de intersecção das circunferências “c’ ” e “c” e renomeie os pontos por D e C.
	Crie o segmento DC.
	Crie o arco circular com centro em K e pelos pontos D e C.
	Clique sobre o arco e modifique suas propriedades para cor verde e estilo 5. O arco criado por P e Q é uma **reta elíptica por dois pontos.**



Como criar a ferramenta macro Reta_Eliptica por dois pontos

1. Escolha, no menu “Ferramentas”, a opção “Criar uma Nova Ferramenta”.
2. Como Objeto Final, escolha o arco e clique em “Próximo”.
3. Como Objetos Iniciais, escolha “Ponto O” e “Ponto B_1”. Pressione “Próximo”
4. Como nome da ferramenta escolha “Reta_Elip_dois_pontos”. Pode ser escolhida uma imagem para representar a macro em Ícone.

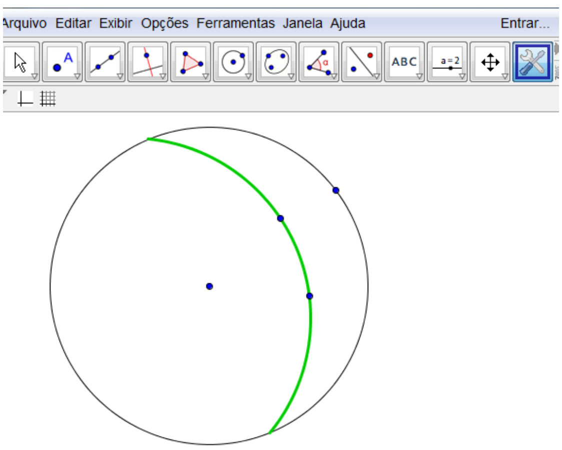
5. Deixe a caixa “Exibir na Caixa de Ferramentas” selecionada e clique em “Concluído”.
6. O GeoGebra criará a ferramenta e a adicionará um novo botão (com a imagem escolhida) no menu.

Como salvar a macro Reta_ Reta_Eliptica por dois pontos

1. Escolha, no menu “Ferramentas”, a opção “Gerenciar Ferramentas”.
2. Selecione a ferramenta recém criada, clique em “Gravar Como”, escolha o local no qual a ferramenta será gravada, escolha como nome “Reta_Eliptica_dois_pontos.ggt” e clique em “Gravar”.
3. Clique em “Fechar” para fechar a “Gerenciar Ferramentas”. O GeoGebra criará um arquivo que deverá ser gravado em uma pasta apropriada e será utilizado em atividades de geometria Elíptica.
4. Feche o GeoGebra para descarregar da memória a ferramenta recém criada.

Como utilizar a macro Reta_ Reta_Eliptica por dois pontos para criar retas elípticas

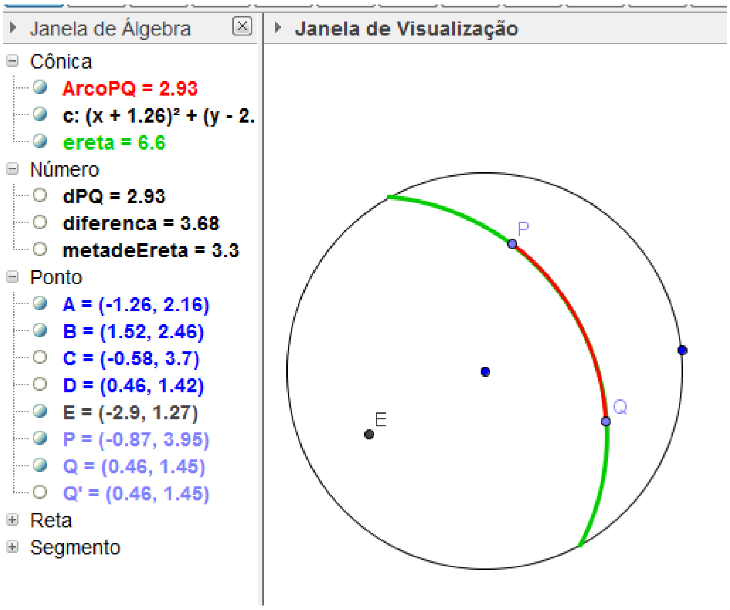
1. Inicie novamente o Geogebra e escolha “Arquivo→Abrir”, selecione o arquivo “Reta_Eliptica_dois_pontos.ggt” e verifique que a ferramenta foi “carregada”, olhe o botão no menu. É dessa maneira que “carregamos” macro ferramentas criadas no Geogebra.
2. Teste o uso da ferramenta. Crie um círculo qualquer. Clique na ferramenta “Reta_Eliptica_dois_pontos.ggt”
3. **Clique no centro do círculo, no ponto do círculo e depois em dois pontos interiores ao círculo**. O Geogebra traçará uma reta elíptica que passa pelos pontos interiores como na figura a seguir.



ATIVIDADE 2. Construção do segmento e distância Elíptica.

	Abra um arquivo novo. Desabilite a opção “Exibir eixos”
	Abra a ferramenta “reta-eliptica_dois_pontos.ggt”
	Crie uma circunferência qualquer “c” renomeie o seu centro com a letra “O”.
	Tome dois pontos quaisquer no interior da circunferência e renomeie por A e B
	Utilize a ferramenta para criar a reta elíptica por A e B
	Construa dois pontos P e Q sobre a reta elíptica
	Encontre o centro da circunferência que contém a reta elíptica.
	Para isso crie os segmentos AB e PQ
	Construa as mediatrizes de AB e PQ
	Encontre o ponto de intersecção das mediatrizes e renomeie por E
	Com centro em E, rotacione o ponto Q por 0.01° para obter o ponto Q’.
	Construa o arco circuncircular [Q, Q’,P] que é o segmento elíptico.
Entrada	Escreva na Entrada “metadeereta=ereta/2”
Entrada	Escreva na Entrada “diferença=ereta-arcoPQ”
Entrada	Escreva na Entrada “distPQ=Se[metadeereta < arcoPQ , diferença , arcoPQ] ” . Esse número é a distância entre P e Q do segmento elíptico PQ.
	Movimente os pontos P ou Q e verifique na janela algébrica as alterações da “distPQ” e compare com a “diferença” e com o “arcoPQ”

Para calcular distância entre dois pontos neste modelo, considerar que os extremos dos arcos são identificados, então quando P e Q são extremos a distância deve ser zero. Além disso, quando a partir da metade do comprimento do arco eles se aproximam do bordo, vão ficando mais próximos de novo, até se anular novamente. Por isso a distância é dada por distPQ=Se[metadeereta < arcoPQ , diferença , arcoPQ]



ATIVIDADE 3.

1. Construa uma reta segundo as orientações dadas no cenário http://www.pucsp.br/tecmem/OAs/reta_eliptica.html
2. Movimente um dos pontos da reta obtida em direção ao centro do plano e descreva o que você observa.
3. Quando a reta é semelhante ao segmento euclidiano?
4. Construa outra reta. Movimente seus pontos e tente fazer com que as duas retas não tenham nenhum ponto de intersecção.

a) É possível que as retas não se interceptem?

b) É sempre possível determinar a intersecção?

c) Quantas retas passam por esse ponto de intersecção?

Com essa atividade, espera-se que haja o entendimento de que, diferente da Geometria Euclidiana, duas retas sempre se interceptam e que por dois pontos podem passar infinitas retas. Espera-se, também, que haja a compreensão de que não existem retas paralelas neste modelo.

ATIVIDADE 4.

Construa um triângulo elíptico no modelo dado.

a) Qual a medida de cada ângulo interno do triângulo?

Orientações: A medida de um ângulo é dada pela medida em graus, entre 0º e 180º do ângulo formado pelas retas euclidianas que são tangentes às retas elípticas no ponto que é vértice do ângulo. Quando as retas elípticas formam um ângulo de 90º, elas são ditas retas perpendiculares.

b) Qual é a medida da soma desses ângulos?

Com estas atividades espera-se que os participantes comparem as propriedades da Geometria Euclidiana com a GNE e que verifiquem que a medida da soma dos ângulos internos de um triângulo elíptico é sempre maior que 180º.

Referências Bibliográficas

Abar C.(2014) *Cenários para o ensino e para a aprendizagem das Geometrias não Euclidianas*.ACTAS DA X CONFERÊNCIA INTERNACIONAL EUTIC 2014, pp 237-246- O Papel das TIC no Design de Processos Informacionais e Cognitivo, Lisboa, Portugal, 22-24 Outubro, CITI – Centro de Investigação para Tecnologias Interactivas, FCSH / UNL

Eves, H.(2002) Introdução à história da matemática. 3.ed. Campinas – SP: Unicamp.

Minayo, M.(2004). O desafio do conhecimento: pesquisa qualitativa em saúde. 8ª ed. São Paulo: Hucitec.

Ribeiro, R. e Gravina, M.(2013) Geometrias não-Euclidianas na Escola. Disponível em http://www.mat.ufrgs.br/ppgem/produto_didatico/rribeiro/livro.pdf

Coutinho, L. (2001) Convite às geometrias não-euclidianas. 2ª edição. – Rio de Janeiro: Interciência.

Souza, M.,(1998), UFRJ, 5º. Postulado de Euclides: a fagulha que desencadeou uma revolução no pensamento geométrico.