WIE? O! DIES π

Marcelo Astorucci – Gustavo Franco – Franco Mariani
chelo_489@hotmail.com – gfrancoc@hotmail.com – francomar_88@hotmail.com
Instituto de Profesores "Artigas" – Uruguay

Tema: Historia de la matemática
Modalidad: Mini curso
Nivel educativo: No específico
Palabras clave: π, historia de la matemática

Resumen

La historia de π comienza en un lejano pasado, cuando los seres humanos primitivos reconocen que en toda circunferencia la razón entre su perímetro y su diámetro es constante. En esta historia pueden distinguirse cuatro grandes momentos: (1) en el que se obtienen aproximaciones de π un tanto burdas por procedimientos poco sofisticados, (2) en el que se buscan aproximaciones de π utilizando polígonos regulares inscritos y circunscritos a una circunferencia (principio de exhausión), (3) en el que se expresa π a través de productos infinitos o a través de fracciones continuas y, por último, (4) en el que se expresa π a través de distintas series. En este mini curso proponemos recorrer estos grandes momentos de la historia de π a través de la resolución de problemas y actividades.

Introducción

La historia de π abarca tantos siglos y tantos personajes que podría servirnos de *leit motiv* para estructurar una historia de la matemática que diera a conocer diversos conocimientos matemáticos y diversos autores. Es difícil precisar el momento en que los seres humanos comienzan a saber sobre π. Pero, ¿qué significa "precisar el momento en que los seres humanos comienzan a saber sobre π"? Creemos que esta pregunta no admite una única respuesta. Podría responderse intentando ubicar el impreciso momento en que los seres humanos identifican que la razón entre el perímetro de una circunferencia y su diámetro es constante, o indicando la fecha precisa en que tiene lugar la demostración de la irracionalidad de π, o podría responderse que todavía no se sabe ya que no se ha podido establecer si π es o no normal.

Seguramente los seres humanos del neolítico hayan observado que existían pares de magnitudes que eran proporcionales, es decir que si una aumentaba el doble la otra también, que si una se triplicaba también lo hacía la otra, que si una disminuía a la mitad la otra corría con la misma suerte. A esto debió seguir la identificación de que si se tienen dos magnitudes proporcionales entonces existe una constante de proporcionalidad que las vincula. Llegado este punto solo fue cuestión de tiempo para que, a través de la observación, los seres humanos pudieran establecer que el perímetro de una circunferencia y su diámetro eran magnitudes proporcionales y que por tanto existía una constante de proporcionalidad entre ambas (Beckmann, 2006). Esta constante no fue notada como lo hacemos en la actualidad hasta el siglo XVIII d.C. El símbolo π lo empleó por primera vez William Jones (1675-1749) como abreviatura de la palabra inglesa *periphery* (periferia). Sin embargo, no adquirió aceptación general hasta 1737 cuando Euler comenzó a utilizarlo en su libro *Variae observationes circa series infinitas*. Nosotros utilizaremos desde el comienzo la notación introducida por Jones, con lo cual tenemos que el número π se define como:

$$\pi = \frac{P}{d}$$

donde P es el perímetro de una circunferencia y d su diámetro.

Primeras aproximaciones de π

Tanto babilonios como egipcios tenían ya en el año 2000 a.C. aproximaciones del número π. Los babilonios habían llegado al valor $3\frac{1}{8}$ y los egipcios a $4\left(\frac{8}{9}\right)^2$. Si bien no se sabe con certeza cómo llegaron a estos valores podemos realizar algunas especulaciones. Las primeras observaciones acerca de que la razón entre el perímetro de la circunferencia y su diámetro es constante son difíciles de desvincular de las mediciones directas utilizando instrumentos primitivos. Posiblemente el valor de π dado por los babilonios lo hayan determinado experimentalmente: tomaron una estaca y la ataron a una cuerda, luego, en un terreno espacioso y plano clavaron la estaca en el piso y trazaron una circunferencia. A continuación compararon la longitud de la circunferencia con su diámetro, es decir midieron el perímetro de la circunferencia considerando al diámetro como unidad. Esta comparación les permitió establecer que el diámetro entra tres veces y un poco más en la circunferencia. Ese “poco más” lo deben haber comparado con el diámetro y observado que entra aproximadamente ocho veces.

Por otra parte, podemos encontrar algún indicio de cómo los egipcios llegaron al valor de π indicado más arriba en el problema 48 del papiro de Ahmes. Este problema aparece acompañado de una figura en donde se representa un círculo de diámetro 9 inscrito en un cuadrado, cuyos lados se han dividido en tres y a partir de los puntos de división se ha formado un octógono (figura 1). El área del círculo se considera aproximada al área del octógono.

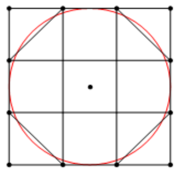

Figura 1

El área del octógono se puede calcular como la diferencia entre el área del cuadrado y cuatro veces el área de un triángulo rectángulo de base y altura 3 (un tercio del lado del cuadrado): $\text{Á}(\text{octógono}) = 9 \times 9 - 4 \times \frac{3 \times 3}{2} = 63$. El área del octógono es aproximadamente igual a 64, por lo tanto el área del círculo de diámetro 9 es también aproximadamente 64, por lo que: $r^2 \times \pi = 8^2$, entonces: $\left(\frac{9}{2}\right)^2 \times \pi = 8^2$, con lo cual se puede concluir que $\pi = 4\left(\frac{8}{9}\right)^2$. (Los antiguos conocían la expresión para hallar el área de un círculo aunque no sabemos cómo la descubrieron.)

> Es claro que Ahmes hace trampa dos veces: primero al afirmar que el área del octógono es igual a la del círculo, y después al tomar 63 ≈ 64. Sin embargo, vale la pena señalar que ambas aproximaciones se compensan, aunque no del todo. (Beckmann, 2006, p. 31).

La aproximación a través de polígonos regulares

El *principio de exhausión*, o su versión preliminar, fue planteada por Antifonte, un griego del siglo V a. C. Su idea era que si primero se inscribe un cuadrado y luego un octógono regular, y a continuación un polígono regular de 16 lados y así sucesivamente, al final se consigue un polígono cuyos lados son tan pequeños que coincide con el círculo.

> El principio de Antifonte es casi correcto; la reformulación de Euclides, más cauta, es completamente correcta: afirma que la diferencia entre el área del polígono y la del círculo puede hacerse menor que cualquier valor prefijado, sin importar cuán pequeño sea este (siempre que no sea cero). (Beckmann, 2006, p. 42).

Arquímedes fue el primero en utilizar el principio de exhausión, aplicado a perímetros, para encontrar aproximaciones de π con un grado variable de precisión. La idea que utiliza es la siguiente: si se considera un polígono regular de *n* lados inscrito en una circunferencia y luego un polígono regular de *n* lados circunscrito, el perímetro de la circunferencia estará acotado entre el perímetro de cada uno de estos polígonos, y haciendo *n* lo suficientemente grande, se conseguirá que los perímetros de estos polígonos estén tan próximos como se quiera del perímetro de la circunferencia. Arquímedes comenzó considerando un hexágono regular circunscrito a la circunferencia y luego, duplicando los lados, llegó a considerar un polígono regular de 96 lados circunscrito del que afirma que tiene un perímetro menor que $3\frac{1}{7}$ del diámetro. Como el perímetro de la circunferencia es todavía menor que el perímetro del polígono regular circunscrito, establece entonces que el perímetro de la circunferencia es menor que $3\frac{1}{7}$ de su diámetro. Por otro lado, Arquímedes considera un hexágono regular inscrito en la circunferencia y, nuevamente por duplicación, llega a considerar un polígono regular de 96 lados inscrito, del que afirma que tiene un perímetro mayor que $3\frac{10}{71}$ del diámetro. Como el perímetro de la circunferencia es aún mayor que el perímetro del polígono regular inscrito, termina por concluir que el perímetro de la circunferencia es mayor que $3\frac{10}{71}$ de su diámetro. Es así que Arquímedes llega a establecer que $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$, lo que permite afirmar que: $3{,}1408 < \pi < 3{,}1429$, con lo cual tenemos una aproximación de π con dos cifras decimales seguras (Heath, 1953).

Un nuevo resultado con un enfoque antiguo

Durante el renacimiento se lograron aproximaciones más precisas del número π siempre a través de los polígonos de Arquímedes. Pero los matemáticos del renacimiento tenían mejores herramientas de cálculo: contaban no solo con los números indoarábigos y las fracciones decimales, sino también con la trigonometría y los logaritmos. (Aunque la trigonometría ya había sido utilizada por Ptolomeo y otros científicos de la escuela de Alejandría, ahora se daban a conocer tablas cada vez más exactas.)

Si bien Viète sigue enfrentándose a buscar aproximaciones de π a través del método de Arquímedes, podríamos decir que inaugura un nuevo enfoque. En vez de comenzar con un hexágono, Viète comienza con un cuadrado, lo que lo lleva a obtener la primera expresión analítica para π:

$$\pi = \frac{2}{\sqrt{{}^{1}/_{2}} \times \sqrt{{}^{1}/_{2} + ({}^{1}/_{2}) \times \sqrt{{}^{1}/_{2}}} \times \sqrt{{}^{1}/_{2} + ({}^{1}/_{2}) \times \sqrt{{}^{1}/_{2} + ({}^{1}/_{2}) \times \sqrt{{}^{1}/_{2}}}} \ldots\ldots}$$

"Este resultado representa uno de los grandes logros en la historia de π, y también representa el cenit de las matemáticas del renacimiento en lo que se refiere a nuestro número" (Beckmann, 2006, p. 88).

Expresiones para π a través de series

En 1671 Gregory encontró el siguiente resultado:

$$\text{Arctan } x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

a través del cual, se tiene que:

$$\text{Arctan } 1 = 1 - \frac{1^3}{3} + \frac{1^5}{5} - \frac{1^7}{7} + \cdots$$

de donde se concluye que:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

o también:

$$\pi = 4 \times \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\right)$$

En otras palabras, Gregory descubre la primera serie que converge a π (aunque esta serie adolece de converger muy lentamente, con lo cual no resulta útil al momento de obtener aproximaciones de π).

Otra serie vinculada con π que tiene una historia muy interesante, es la serie de los inversos de los cuadrados perfectos:

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\cdots$$

Jacob Bernoulli estaba muy interesado por las series. En su libro de 1689, *Tractatus de seriebus infinitis*, presenta los últimos avances del conocimiento para su época en lo que tiene que ver con este tema. Bernoulli se propuso estudiar la serie mencionada anteriormente y fracasó al igual que otros que lo habían intentado como Pietro Mengoli o nada menos que Leibniz, uno de los inventores del Cálculo. Después de mucho esfuerzo, Bernoulli admitió su derrota y "desde Basilea escribió e incluyó en el *Tractatus* su petición de ayuda: 'Grande sea nuestra gratitud si alguien encuentra y nos comunica lo que hasta ahora ha escapado a nuestros esfuerzos.'" (Dunham, 2000, p. 99). De este modo Bernoulli plantea el que será llamado *problema de Basilea*, que sobrevivirá a su autor y no encontrará solución hasta bien entrado el siglo XVIII.
En 1731 Euler, con 24 años, trabajaba ya en el desafiante problema propuesto por Bernoulli, problema que logra resolver recién cuatro años después. Euler escribió con ostensible felicidad: "Sin embargo, he encontrado ahora y contra todo pronóstico una expresión elegante para la suma de la serie $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\cdots$, que depende de la cuadratura del círculo... He encontrado que seis veces la suma de esta serie es igual al cuadrado de la longitud de la circunferencia de un círculo cuyo diámetro es 1." (Dunham, 2000, p. 103).

Lo que con la simbología actual se podría escribir:

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

Es así que el problema de Basilea había quedado resuelto. Cuando nos encontramos por primera vez con el resultado alcanzado por Euler podemos pensar que hay algún tipo de error: ¿cómo es posible que aparezca el número π —la razón entre el perímetro de una circunferencia y su diámetro— en la suma de los inversos de los cuadrados perfectos?

Esto nos recuerda una anécdota recogida por Kasner y Newman (1951):

> En su obra *Budget of Pardoxes*, Augustus de Morgan da un ejemplo de cuán poco sugiere acerca de su origen la definición usual de π. El autor nombrado explicaba a un actuario cuáles eran las probabilidades para que, al cabo de un tiempo dado, cierta proporción de un grupo de personas siguiera viviendo y citó la fórmula empleada por los actuarios, que, como es sabido, involucra a π. Explicando el significado geométrico de π, el actuario, que lo había estado escuchando con interés, lo interrumpió exclamando: “Mi querido amigo, allí debe haber un error. ¿Qué tiene que ver un círculo con el número de personas sobrevivientes al cabo de un tiempo dado? (p. 97).

Palabras finales

Seguirle el rastro a π desde ese lejano año 2000 a. C. nos permite aprender, no solo sobre la historia de la matemática, sino acerca de las dificultades y vicisitudes que entraña la construcción del conocimiento; construcción, colectiva y humana, que se ha desarrollado a lo largo de muchos siglos.

La historia de π también nos enseña sobre obsesiones: muchos fueron los que han ido a la *caza de dígitos* de π. Pero, ¿es relevante desde el punto de vista de las aplicaciones a los fenómenos físicos? Asimov (1993) explica que si trazamos una circunferencia de dieciséis mil millones de kilómetros de diámetro, con el Sol en el centro (que encierre a todo el sistema solar en su interior), utilizando una aproximación de π con treinta y cinco cifras decimales (marca alcanzada por el holandés Ludolph van Ceulen alrededor del 1600), el error cometido al calcular su perímetro sería de una longitud equivalente a la millonésima parte del diámetro de un protón. ¿Cuál es entonces la motivación para obtener más y más cifras decimales de π? Quizás una aproximación a la respuesta podría ser la dada por Beckmann (2006):

> … sospecho que en gran parte lo que impulsó a la gente a hacer estos cálculos es aquello que lleva a otros a cruzar las cataratas del Niágara en un barril o superar

en 20 minutos la marca mundial de permanecer parado en lo alto de un poste. (p. 94)

Referencias bibliográficas

Asimov, I. (1993). *El secreto del universo y otros ensayos científicos*. Recuperado de http://bz.otsoa.net/Libros%20de%20Divulgacion%20Cientifica/Isaac%20Asimov/Isaac%20Asimov%20-%20El%20secreto%20del%20universo.pdf

Beckmann, P. (2006). *Historia de* π. México: Conaculta.

Dunham, W. (2000). *Euler*. *El maestro de todos los matemáticos*. España: Nivola.

Heath, T. L. (1953). *The Works of Archimedes with the Method of Archimedes*. New York: Dover Publications, Inc.

Kasner, E. y Newman, J. (1951). *Matemáticas e imaginación*. Argentina: Librería Hachette S.A.