GRAFOS CON GEOGEBRA

Teresa Braicovich – Patricia Caro – Nayén Yobrán

teresabraicovich@gmail.com – caropatriciaj@yahoo.com.ar - zoi_yob@hotmail.com

Universidad Nacional del Comahue. Argentina

Tema: Teoría de Grafos
Modalidad: Taller
Nivel educativo: Medio y Universitario
Palabras clave: grafos – voronoi – delaunay – cierre convexo

Resumen

En el marco del Proyecto de Investigación "Teoría de Grafos", financiado por la Universidad Nacional del Comahue (UNCo.), estamos trabajando en la enseñanza de grafos en los distintos niveles educativos desde hace varios años. A lo largo de este tiempo se trabajaron diversos temas, recorridos eulerianos, recorridos hamiltonianos, árboles, planaridad y coloreo, y con distintos niveles de complejidad.

En un principio se consideraban a los grafos como parte de la topología pero actualmente se considera que es una rama de la Matemática Discreta, este tema ha tenido un gran auge en las últimas décadas asociado en gran medida a los importantes avances que se han dado en informática.

Las herramientas computacionales brindan una posibilidad interesante para el trabajo con grafos y en particular se puede trabajar, entre otros, con el software GeoGebra. En particular, en las últimas versiones de este software se observa la aparición de un mayor número de herramientas avanzadas relacionadas con el campo de la Matemática Discreta y dentro de esta rama se consideran algunos temas de la teoría de grafos. Es importante aclarar que esto tiene utilidad en investigación y también en docencia.

El objetivo de este taller es que los asistentes, ya sean docentes en formación o en ejercicio, trabajen algunos temas muy actuales de la teoría de grafos mediante el software GeoGebra, además son temas que tienen un amplio campo de aplicaciones.

Cuerpo del trabajo

1. Introducción

En este taller se buscará que los asistentes conozcan algunos temas muy actuales de la teoría de grafos, pero que lo hagan a partir del trabajo con el software, ya que no se darán definiciones, propiedades y condiciones, sino que se buscará que sean los propios asistentes quienes las encuentren, conjeturen, justifiquen y relacionen con otros temas.

Los conceptos centrales a trabajar serían los Grafos o Diagramas de Voronoi y la Triangulación de Delaunay, temas en los que de manera implícita se recuperan los conceptos de circuncentro y circunferencia circunscripta al triángulo y envolvente convexa o cierre convexo. También se pedirá que planteen situaciones cotidianas en las que podría ser beneficioso el uso de estos conceptos.

2. Pertinencia de la propuesta.

En todos los ámbitos durante las últimas décadas hubo un gran impacto de las tecnologías, en particular en la enseñanza de la matemática. Esto llevó a que fueran cambiando muchas cuestiones, entre ellas, el trabajo con modelización, pues permiten una gran capacidad y rapidez en el cálculo, y brindan mucha facilidad para lograr representaciones gráficas.

Debemos estar atentos y pensar el tema de la inclusión de las TIC con suma atención y cuidado, sin creer que son la solución a la complejidad e infinidad de problemáticas que conlleva el aprendizaje de la matemática, pero sí que son una herramienta, en algunos temas, fundamentales para una mejor comprensión de parte de los estudiantes, favorecen un aprendizaje activo y significativo.

Existen distintos softwares que permiten el trabajo con grafos, pero ya que entre ellos se encuentra el GeoGebra, que es sencillo, libre, gratuito, potente y fácil de utilizar, lo hemos elegido para esta propuesta.

3. Contenidos a desarrollar.

3.1. Triangulación de Delaunay

Es una red de triángulos que cumple la condición de Delaunay, esta condición dice que la circunferencia circunscripta de cada triángulo de la red no debe contener ningún vértice de otro triángulo. En este caso los puntos son los vértices del grafo y los lados de los triángulos serán las aristas.

La circunferencia circunscripta de un triángulo es la que contiene a los 3 vértices del mismo, se dice que la circunferencia es vacía cuando contiene a los 3 vértices pero no contiene a ningún otro de los puntos. Dado un conjunto de puntos se puede triangular, pero lo importante es determinar si esta triangulación cumple la condición de Delaunay para saber si es útil.

Una propiedad importante es que la triangulación forma la envolvente convexa del conjunto de puntos.

Se usan triangulaciones de Delaunay en geometría por ordenador y en gráficos 3D por computadora sobre todo. Esta triangulación fue inventada, en el año 1934, por el matemático ruso Boris Nikolaevich (1890-1980).

3.2. Grafos de Voronoi.

Recientemente, los grafos (o diagramas) de Voronoi están siendo estudiados por distintas comunidades científicas, tan dispares como las surgidas alrededor del análisis y el desarrollo de redes de sensores inalámbricos como del estudio de la evolución de los bosques, entre otras. El nombre de este diagrama se debe a su descubridor, Georgi Voronoi (1868-1908).

Es una de las estructuras fundamentales dentro de la Geometría Computacional, esta estructura captura la información de proximidad de un conjunto de puntos P descomponiendo al plano en regiones poligonales convexas. Se basa fundamentalmente en la proximidad, suponemos dado un conjunto de puntos en el plano con al menos dos elementos, a cada uno de estos puntos se le asocian aquellos puntos del plano que están más cerca suyo que de los demás puntos. Si el cardinal de P es *n*, entonces el plano quedará separado en *n* regiones, cabe aclarar que existen puntos que se encuentran a igual distancia de más de un punto de los contenidos en el conjunto P, dichos puntos determinan la frontera

3.3. Relación entre Grafos de Voronoi y Grafos de Delaunay

Los grafos de Voronoi y el grafo de la triangulación de Delaunay son grafos duales, el decir el dual de Voronoi es el de triangulación y viceversa.

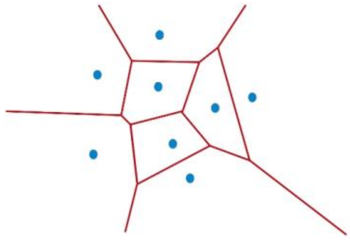
Las aristas del grafo de Voronoi de un conjunto de puntos P son porciones de mediatrices de pares de puntos, y pueden ser de tres tipos:

a) Rectas, si los puntos de P están alineados.

b) Semirrectas, si los dos puntos que determinan la arista son consecutivos en la envolvente convexa de P.

c) Segmentos, si al menos uno de los puntos que determina la arista es interior a la envolvente convexa de P.

La siguiente figura muestra los dos últimos tipos de aristas, ya que los puntos no son colineales.



4. Algunas actividades a proponer:

A continuación se presenta, sin perder de vista la flexibilidad del proceso de enseñanza-aprendizaje, una guía en la que se mencionan ciertos momentos que se tiene la intención de que se produzcan:

- Se comenzaría el taller mencionando distintos escritos de matemáticos donde se manifieste la importancia de mantenerse actualizado con los temas a enseñar, entre otros se citará a Adrián Paenza (2007 y 2008) y a Claudi Alsina (2011).
- Se pediría que a partir de un conjunto de puntos en la vista gráfica de GeoGebra se use la sentencia de Voronoi y se analice que propiedades tienen los puntos de cada una de las regiones, se espera que ellos se den cuenta que en cada región se hallan los puntos del plano más cercano al punto del conjunto P que se encuentra en dicha región. Para este tipo de actividades es importante el uso del software, ya que permite conjeturar a medida que se vayan cambiando de posición algunos de los puntos y de esa manera ir analizando qué sucede en los distintos casos.
- Se pediría que utilicen la triangulación de Delaunay y la envolvente convexa del mismo conjunto de puntos y relacionen ambos conceptos con el grafo de Voronoi, cabe aclarar que triangulación de Delaunay y cierre convexo son dos de las sentencias que se encuentran en el apartado de Matemática Discreta de GeoGebra.
- Se intentaría, siempre mediante el trabajo con GeoGebra, que logren relacionar los contenidos anteriormente mencionados con las circunferencias circunscriptas de los triángulos y a partir de esta relación puedan determinar cómo construir las regiones de Voronoi.
- Se propondrá a los asistentes que encuentren situaciones de distinta índole para las cuales sería útil trabajar con el grafo de Voronoi.

Durante el encuentro se hará que los docentes trabajen de manera individual en algunas situaciones y de manera grupal en otras, consultando todo aquello que consideren necesario.

5. REFLEXIÓN FINAL

Estamos convencidos de la importancia que tiene trabajar con temas de punta de la matemática y si este trabajo se hace utilizando las nuevas tecnologías creemos que es muy interesante. Para concluir presentamos la siguiente cita: "*Un grafo es una construcción extraordinariamente simple: unos puntos y las líneas que los unen. Son grafos desde el mapa del metro hasta la ruta de un mensajero, y en general, las redes de todo tipo que cimentan el mundo contemporáneo. La observación cuidadosa de estas simples estructuras nos abre los ojos a un universo de enlaces y conexiones donde las matemáticas reinan supremas*". Claudi Alsina, 2011.

Referencias bibliográficas

Alsina, C. (2011). *Mapas del metro y redes neuronales*. Ed. Rodesa. Villatuerta, Navarra

Falcón Ganfornina, R.; Ríos Collantes, R. (2013) Usando GeoGebra en teoría de grafos. II Encuentro de GeoGebra en el Aula. Córdoba.

Moreno Durán, J.; Ordóñez Pérez, S. (2009). Tesis de Ingeniería Informática. Capturado el 20/2/2016. http://www-ma2.upc.edu/~geoc/DVALon/MemoriaDVALon.pdf

Paenza, A. (2007). "*Matemática…¿estás ahí*? *episodio* 3". Siglo XXI. Editores Argentina, Buenos Aires.

Paenza, A. (2008). "*Matemática…¿estás ahí*? *episodio* 100". Siglo XXI. Editores Argentina, Buenos Aires.