

Uso de Elipsógrafos virtuales para motivar la demostración en Geometría

Analítica

José Carlos Cortés Zavala

jcortes@umich.mx

Universidad Michoacana, México.

Tema: Demostración Matemática.

Modalidad: Comunicación Breve.

Nivel Educativo: Bachillerato.

Palabras Clave: Demostración, Geometría Analítica, Artefactos matemáticos.

RESUMEN

En este artículo se exponen la descripción, el modelo matemático y la construcción del modelo virtual a través de software de geometría dinámica de cinco elipsógrafos. La idea central es usar estos dispositivos virtuales para que el estudiante explore las propiedades de la elipse y para que realice la demostración matemática del modelo matemático subyacente en el modelo virtual, en este sentido se expone también la hoja de trabajo que se da a los estudiantes para que trabajen con el elipsógrafo de palanca y colisa de Kleiber.

1. INTRODUCCIÓN

Los Artefactos Matemáticos para hacer curvas geométricas se han construido desde hace mucho tiempo; Meneachmus (~380 - ~320 A.C.) tenía un dispositivo mecánico para construir cónicas que usó para solucionar el problema de la duplicación del cubo; Proclus (418-485) menciona a Isidoro de Mileto quien tenía un instrumento para trazar una parábola. [Dyck, p.58]. Es importante entender la importancia de dichos artefactos puesto que los geómetras griegos estaban buscando y encontrando soluciones a

problemas geométricos por medios mecánicos. Estas soluciones en su mayoría eran necesarias para los propósitos prácticos.

Leonardo Da Vinci (1452-1519) inventó un torno para realizar partes de sección elíptica, usando un mecanismo de articulación cuatro, un elipsógrafo con un movimiento invertido de la conexión fija. Los dispositivos mecánicos para dibujar curvas fueron utilizados también por Albrecht Dürer (1471-1528). Véanse dos imágenes de sus “cuatro libros de proporciones”

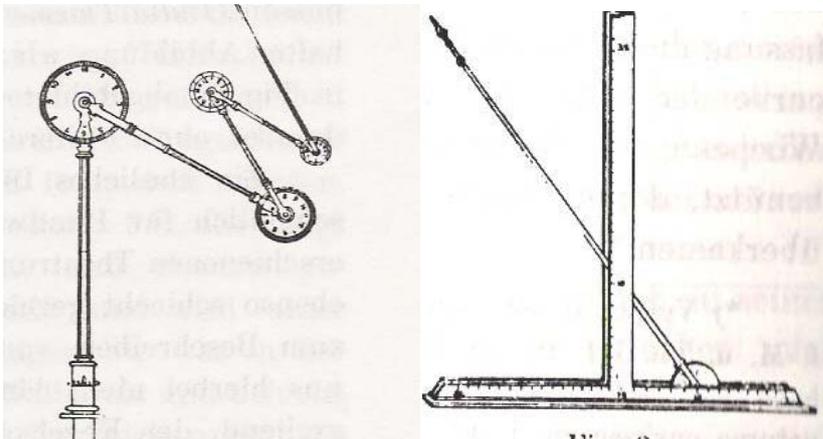


Figura 1. Dispositivo del dibujo de la curva de [Dürer]

Cuando René Descartes (1596-1650) publicó su *Geometría* (1637) no creó una curva trazando puntos de una ecuación. Siempre había dado métodos geométricos para dibujar cada curva con algunos aparatos, y estos aparatos eran a menudo articulados. Véase la figura 2.

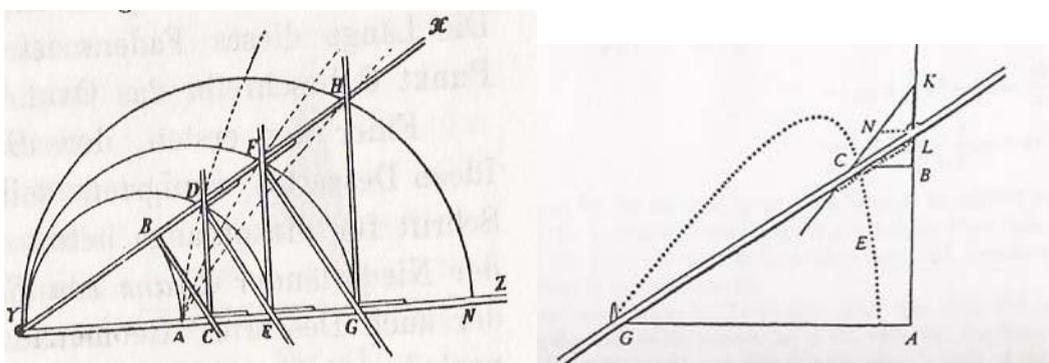


Figura 2. Aparato del dibujo curvas de [Descartes]

La más sistemática y completa discusión del tratamiento de las cónicas se encuentra en la “*Elementa Curvarum Linearum*”, de Johan de Witt, que apareció como apéndice de

la Segunda Edición en latín de Van Schooten de la “*Geometrie*” de Descartes, 1659-1661. [Easton]. Johan de Witt (1625-1672) fue un político holandés con considerables habilidades como matemático. Mientras estudiaba leyes en la universidad de Leiden se hizo amigo de Francis van Schooten, el más joven (1615 - 1660) y recibió de él una excelente preparación en matemáticas cartesianas. Van Schooten fue el principal divulgador de R. Descartes *Geometrie* en Europa. Según van Schooten, el tratado de De Witt fue escrito unos diez años antes de su publicación. De Witt describe dos construcciones más de una elipse. Una de ellas es la construcción del trasmallo, que fue descrita por Proclus pero también se atribuye a Arquímedes (287-212 A.C.). Esta construcción con imágenes de la colección del modelo cinemático de Reuleaux se describe en el tutorial de F. Moon. “cómo dibujar una elipse” [Moon]. Véase la figura 3.



Figura 3. Modelo del trasmallo de la colección cinemática de Reuleaux (Foto del profesor D.W. Henderson)

En el año de 1657, Van Schooten publicó su “*Exercitationum mathematicarum libri quinque*”. Como el título sugiere, la obra se divide en cinco “libros” de un centenar de páginas cada uno. El libro I es una revisión bastante estándar de la aritmética y la geometría ordinaria. El libro II contiene construcciones con regla. En el Libro III, van Schooten trata de reconstruir algunas de las obras de Apolonio en lugares geométricos. Este fue un importante tema de investigación de la época. El libro IV contiene la obra

más conocida de Van Schooten. Su título es "*Orgánica conicarum sectionum*", o "Los instrumentos de las secciones cónicas." La palabra "orgánica" está más estrechamente relacionada con el órgano como instrumento musical que a la "orgánica" a veces encontramos en la química o la agricultura. Como sugiere el título, el capítulo describe una variedad de artefactos para la elaboración de las diferentes secciones cónicas.

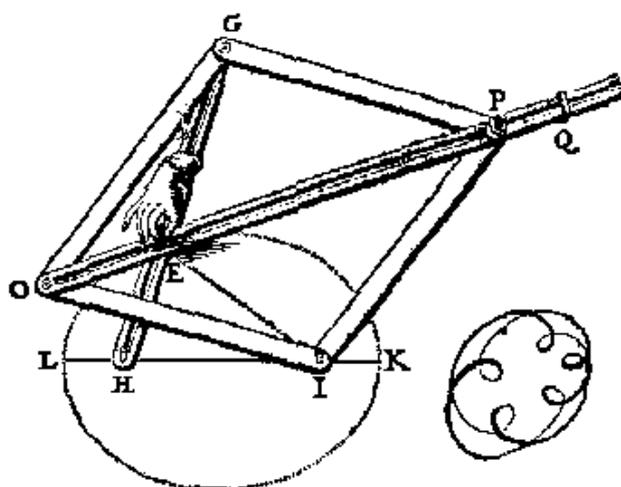


Figura 4. Mecanismo de Van Schooten para dibujar elipses

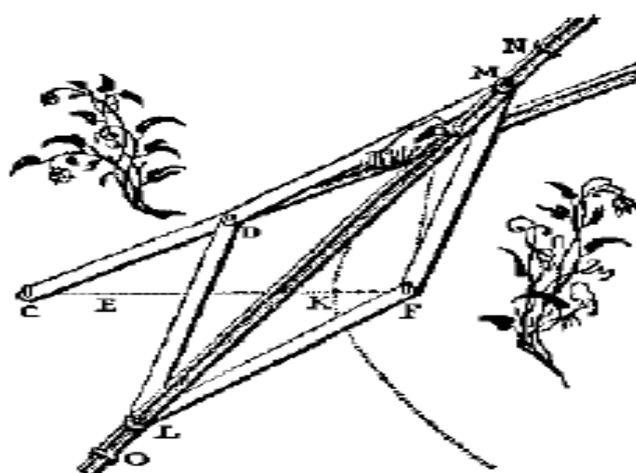


Figura 5. Mecanismo de Van Schooten para dibujar hipérbolas.

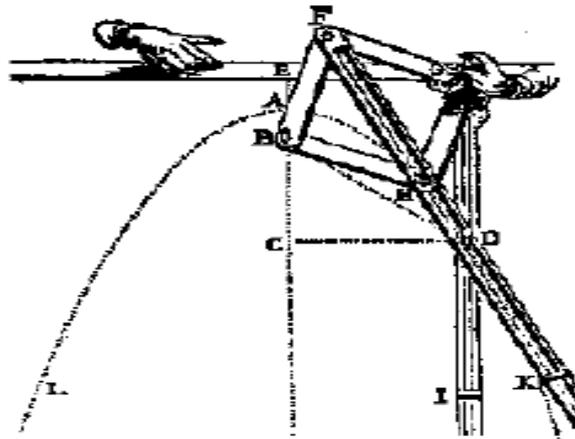


Figura 6. Mecanismo de Van Schooten para dibujar parábolas.

Por último, el Libro V se titula "Sectiones triginta miscellaneas", o Treinta secciones diversas. En estas secciones, van Schooten cuidadosamente desarrolla los principios combinatorios del conteo.

Examinando la teoría de curvas algebraicas del tercer grado, Isaac Newton (1643-1727) propuso un mecanismo para la generación de curvas circulares uni-cursivas de tercer grado, usando una conexión de cuatro cadenas con dos pares de deslizaderas. En la figura 7, vea la realización de esta idea en el conico-grafo de Boguslavskii [Artobolevski] P. 70.

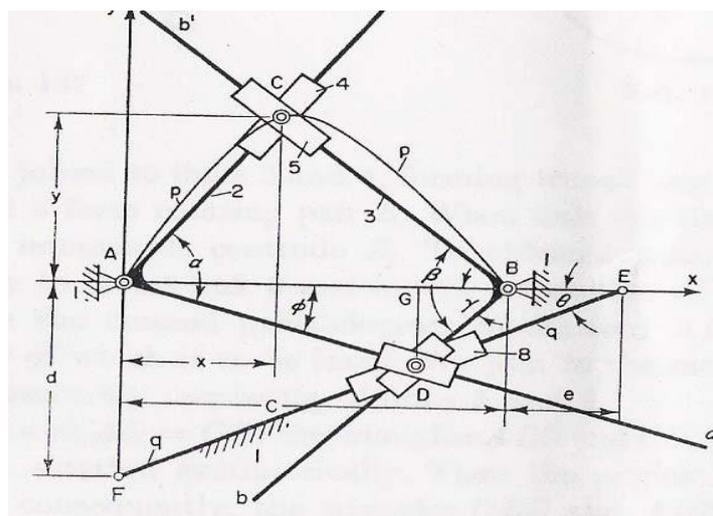


Figura 7. Conicografo de Boguslavskii [Artobolevski]

Alfred Bray Kempe (1849-1922) también formuló un famoso teorema, cualquier curva algebraica puede ser generada por un artefacto apropiado o puede decirse simplemente:

es posible diseñar un artefacto, que firme con su nombre (mientras su firma sea la unión de curvas continuas). Bosquejo de una demostración del teorema de Kempe: Deje la ecuación de la curva algebraica en forma implícita, teniendo la forma general $f(x, y) = 0$ se expresa de la siguiente forma $\sum_{i,j} A_{ij} x^i y^j = 0$ donde A_{ij} son constantes fijas.

La generación de la curva que representa esta ecuación dada se reduce a la serie de operaciones matemáticas cumplido por los mecanismos individuales, que se ensamblan juntos en la cadena cinemática desconocida en general. Esos mecanismos individuales son:

1. mecanismo para transmitir un punto a lo largo de la línea recta dada;
2. mecanismo para proyectar un punto dado a una línea determinada;
3. mecanismo para cortar segmentos iguales en el eje O_x y el O_y ;
4. mecanismo para pasar una línea recta a través de un punto dado y ser paralela a una línea dada;
5. mecanismo para obtener segmentos proporcionales en dos líneas rectas que pasan a través de un punto dado (que multiplica el mecanismo);
6. mecanismo para la adición de dos segmentos dados (mecanismo sumador). Vea [Artobolevski, p.8-12].

En 1877 A. B. Kempe publicó un pequeño libro: *Cómo dibujar una línea recta: Una conferencia sobre artefactos articulados*. Mencionó a J. Watt(1736-1819) y también el trabajo de J.J. Sylvester (1814-1897), Richard Roberts (1789-1864), P.L. Chebyshev (1821-1894), Harry Hart (1848-1920), William Kingdon Clifford (1845-1879), Jules Antoine Lissajous (1822-1880), Samuel Roberts (1827 - 1913), y Arthur Cayley (1821-1895). Más sobre esto ver en [Kempe].

Esta tradición de considerar curvas como resultado de acciones geométricas se puede encontrar también en trabajos de Roberval (1602-1675), Pascal (1623-1662), y de Leibniz (164-1716). Los dispositivos mecánicos para dibujar curvas han desempeñado un papel fundamental en la creación de nuevos lenguajes simbólicos (por ejemplo, el cálculo) y establecer su viabilidad. Las tangentes, las áreas y la longitud de arco

asociada a muchas curvas eran conocidas antes de que cualquier ecuación algebraica fuera escrita. Experimentos críticos usando curvas permitieron la coordinación de representaciones algebraicas con resultados independientemente establecidos de la geometría [Dennis, 1995].

Franz Reuleaux (1829-1905), quién a menudo es llamado "el padre del diseño de las máquinas modernas", tenía muchos mecanismos de líneas rectas en su colección del modelo cinemático. La Universidad Cornell tiene una colección con cerca de 220 modelos cinemáticos distintos de F. Reuleaux y 39 de ellos son mecanismos sobre el movimiento rectilíneo. Vea [KMODDL].

2. MATERIALES Y METODOS

Parte de este trabajo consiste en realizar la demostración matemáticas de cada uno de los artefactos que van a ser utilizados por los estudiantes. Al tener la demostración nos permite construir hojas de trabajo que sirvan de guía para que el estudiante explore el artefacto virtual o físico y que al realizar esta exploración guiada pueda descubrir el modelo matemático adyacente al artefacto, es decir que el estudiante puede responder de forma matemática la pregunta ¿Porqué este artefacto dibuja una elipse?.

Realizar una demostración matemática no es una tarea fácil para los estudiantes y por lo general siempre se ha intentado enseñar de una manera mecánica, memorista y sin un sentido contextual. Creemos que tomando como base el modelo geométrico de diversos artefactos que dibujan curvas geométricas, podemos apoyar a los estudiantes para que encuentren un significado y den sentido a la demostración matemática, con el objetivo de que los alumnos de bachillerato tengan una mejor visión de cómo es la demostración matemática en un entorno geométrico (elipse, parábola e hipérbola).

Iván Ivánovich Artobolevski, (1905 – 1977) fue un ingeniero mecánico, y científico ruso en el campo de la Teoría de Mecanismos y Máquinas. Fue miembro de la Academia de Ciencias de la Unión Soviética desde 1946. Artobolevski propuso una clasificación de los mecanismos espaciales y desarrolló métodos para su análisis estructural, cinemático y cinetostático. Recopiló en "*Les mécanismes dans la technique*

moderne” (1975, Artobolevski) varios artefactos mecánicos cuya finalidad era trazar alguna cónica. Esta obra estuvo dividida en 5 tomos.

Es precisamente de esta colección descrita por Artobolevsky que para este artículo se toman 2 dispositivos graficadores de elipses: 1) Elipsógrafo de palancas y colisa de Artobolevski y 3) Elipsógrafo de doble palancas y colisa de Kleiber.

En la obra de Artobolevski para cada uno de los artefactos la información que de ellos se da es muy limitada y existe muy poca evidencia literaria que permita extender la información.

A continuación se expone la descripción del artefacto, la demostración matemática y el modelo virtual realizado en software de Geometría Dinámica (Geogebra); Sólo para el elipsógrafo de palanca y colisa de Kleiber se muestra la hoja de trabajo que se presentó a los estudiantes y algunos resultados.

2.1.1 Descripción del Elipsógrafo de palancas y colisa de Artobolevski

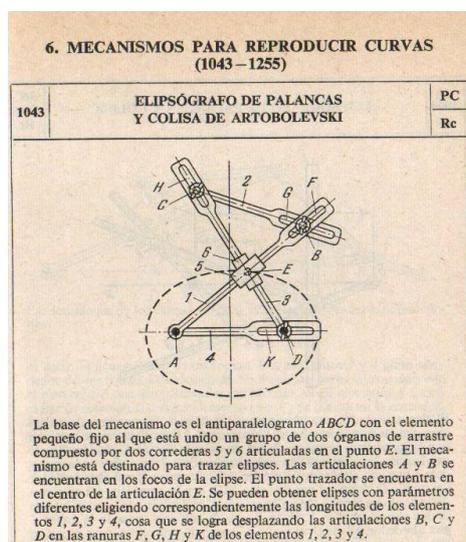


Figura 8. Hoja del libro “*Les mécanismes dans la technique moderne*”.

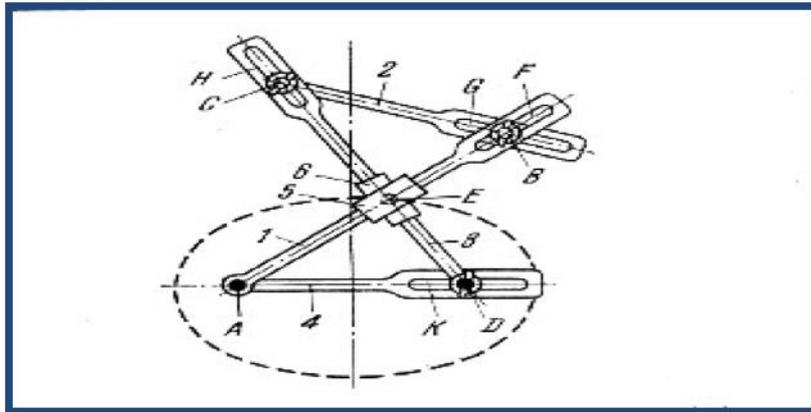


Figura 9. Elipsógrafo de palancas y colisa de Artobolevski

La base del mecanismo es el anti-paralelogramo $ABCD$ con el elemento pequeño fijo al que está unido un grupo de dos órganos de arrastre por dos correderas 5 y 6 articuladas en el punto E . El mecanismo está diseñado para trazar elipses. Las articulaciones A y B se encuentran en los focos de la elipse. El punto trazador se encuentra en el centro de la articulación E . Se pueden obtener elipses con parámetros diferentes eligiendo correspondientemente las longitudes de los elementos 1, 2, 3 y 4, cosa que se logra desplazando las articulaciones B , C y D en las ranuras F , G , H y K de los elementos 1, 2, 3 y 4.

2.1.2 Demostración Matemática.

Tomando como base la figura 10 tenemos:

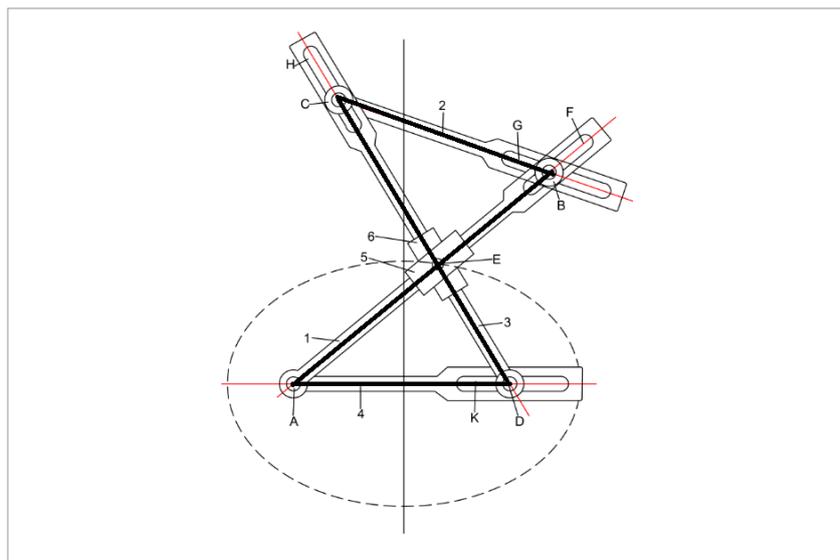


Figura 10. Resalte de elementos importantes para la demostración

Como $ABCD$ es un anti-paralelogramo:

$$\overline{AB} \cong \overline{CD}$$

$$\overline{AD} \cong \overline{CB}$$

Al trazar los segmentos AC y BD , se obtiene

el trapecio isósceles $ADBC$, ya que sus lados opuestos CB , AD y BC son congruentes y sus diagonales son iguales ($AB = CD$).

Sea t el eje de simetría del trapecio isósceles, el cual corta a los lados AC y BD en los puntos M y N , respectivamente.

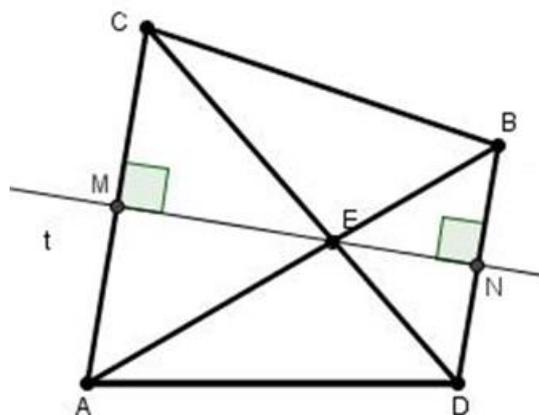


Figura 11. Trazo de eje simetría t

Notemos lo siguiente:

Al ser t un eje de simetría, M y N son puntos medios de los segmentos AC y BD , respectivamente, entonces:

$$CM = MA$$

$$DN = NB$$

Así mismo:

$$\angle CME = \angle AME = 90^\circ$$

$$\angle DNE = \angle BNE = 90^\circ$$

Ahora podemos afirmar que $\triangle CME$ es congruente con el $\triangle AME$ por el criterio LAL , ya que ME es un lado común a ambos triángulos:

$$\triangle CME \cong \triangle AME \quad (1)$$

También $\triangle BNE$ es congruente con el $\triangle DNE$ por el criterio LAL :

- EN es un lado común a ambos triángulos
- $BN = ND$
- $\angle BNE = \angle DNE = 90^\circ$

$$\triangle BNE \cong \triangle DNE \quad (2)$$

2.2.1 Descripción del Elipsógrafo de doble palancas y colisa de Kleiber.

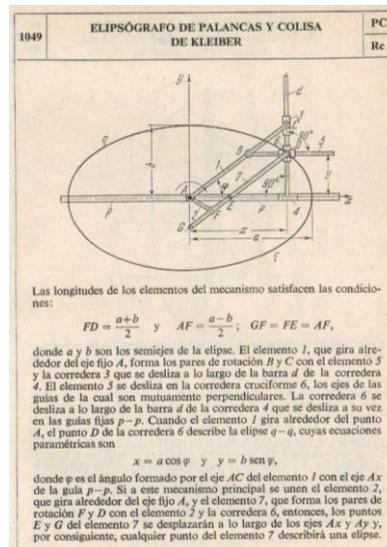


Figura 13. Hoja del libro “*Les mécanismes dans la technique moderne*”.

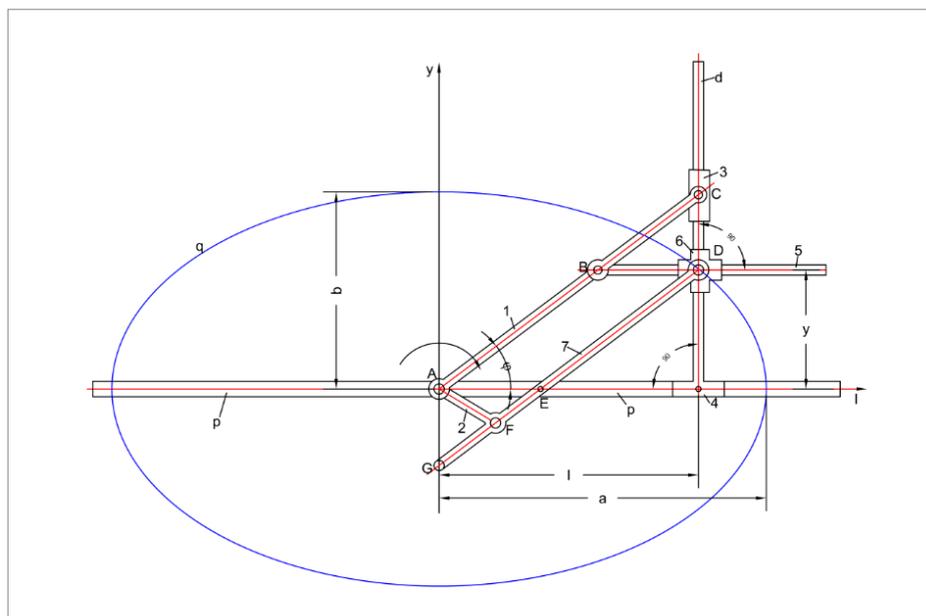


Figura 14. Elipsógrafo de doble palancas y colisa de Kleiber.

En la figura 14, las longitudes de los segmentos FD , AF , FE y GF satisfacen las siguientes condiciones:

$$FD = \frac{a+b}{2}; \quad AF = \frac{a-b}{2}; \quad GF = FE = AF,$$

donde a y b serán los semiejes de la elipse. El segmento AC , que gira alrededor del eje fijo A , forma los pares de rotación B y C con la semirrecta BD y la corredera 3 que se desliza a lo largo de la barra d de la corredera 4. Las semirrecta BD se desliza en la corredera cruciforme 6 ; la semirrecta BD con la barra d son perpendiculares; y, la corredera 6 se desliza a lo largo de la barra d de la corredera 4 que se desliza a su vez en las guías fijas $p-p$. Cuando el segmento AC gira alrededor del punto A , el punto D de la corredera 6 describe la elipse $a-b$, cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$x = a \cos \varphi \quad y = b \sin \varphi,$$

donde φ es el ángulo formado por el eje AC con el eje Ax de la guía $p-p$. Si a este mecanismo principal se unen el segmento AF , que gira alrededor del eje fijo A , y el segmento GD , que forma los pares de rotación F y D con el segmento AF y la corredera 6 entonces, los puntos E y G del segmento GD se desplazarán a lo largo de los ejes Ax y Ay y, por consiguiente, cualquier punto del segmento GD describirá una elipse.

2.2.2 Demostración Matemática.

Tomando como base la figura 15 y 16 tenemos:

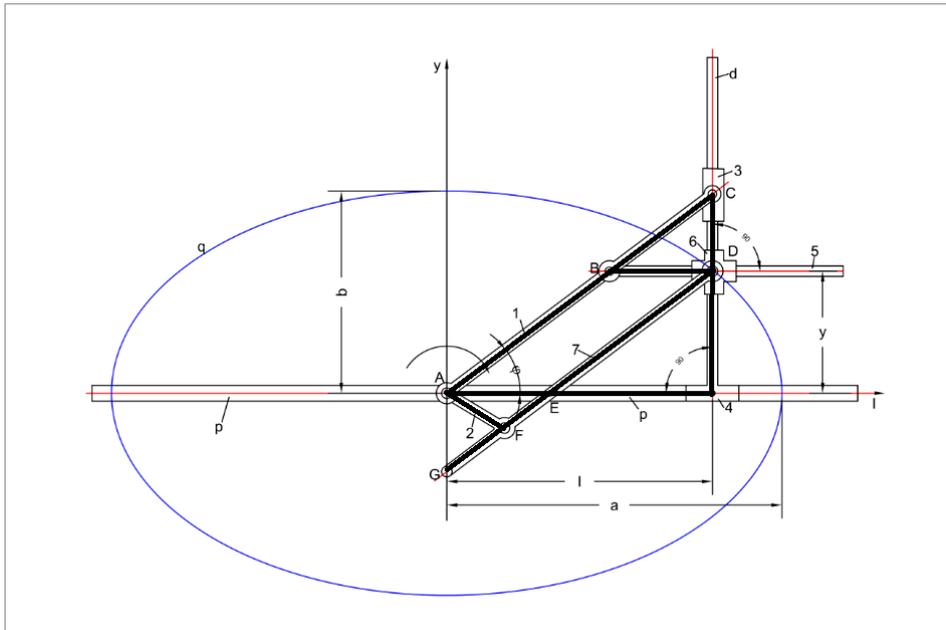


Figura 15. Resalte de elementos importantes para la demostración del elipsógrafo de doble palancas y colisa de Kleiber

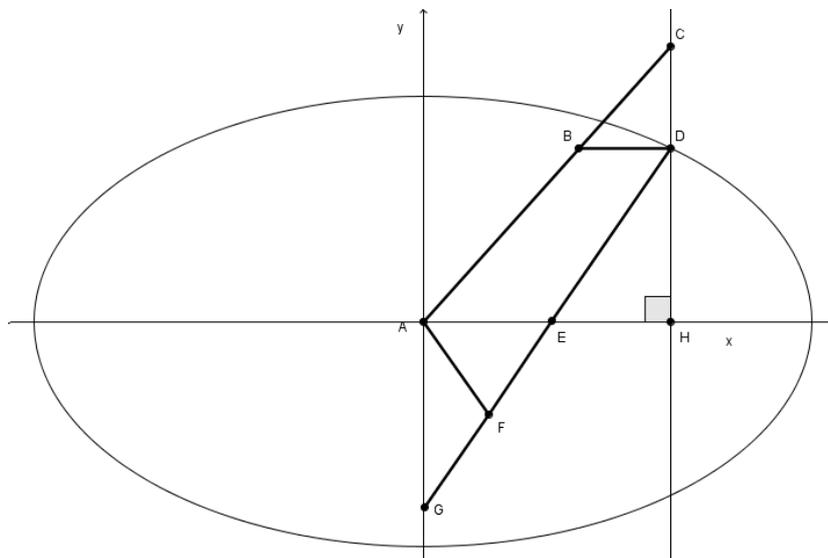


Figura 16. versión geométrica del mecanismo del elipsógrafo de doble palancas y colisa de Kleiber

Sea el punto D de coordenadas (x, y) , un punto cualquiera sobre la curva, donde:

$$x = AH$$

$$y = HD$$

Como

$$\angle AEG = \angle HED \text{ por ser opuestos por el vértice}$$

y

$$\angle GAE = \angle DHE = 90^\circ$$

Entonces, por el criterio de semejanza AA:

$$\triangle GAE \sim \triangle DHE$$

De aquí:

$$\frac{AE}{HE} = \frac{GE}{DE}$$

$$AE \cdot DE = GE \cdot HE \quad (5)$$

Notemos que:

$$FD = FE + ED$$

De aquí tenemos que:

$$ED = FD - FE \quad (6)$$

Y como

$$FD = \frac{a+b}{2}$$

$$GF = FE = AF$$

$$AF = \frac{a-b}{2}$$

Entonces, la ecuación (6) nos queda:

$$ED = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}$$

$$ED = b \quad (7)$$

Del triángulo rectángulo DHE tenemos que:

$$DE^2 = HE^2 + DH^2$$

Pero como $y = HD$ y sustituyendo la ecuación (7) obtenemos

$$b^2 = HE^2 + y^2$$

De donde:

$$HE = \sqrt{b^2 - y^2} \quad (8)$$

Notemos que:

$$AE = x - HE \quad (9)$$

Sustituyendo la ecuación (8) en (9) obtenemos:

$$AE = x - \sqrt{b^2 - y^2} \quad (10)$$

También notemos que:

$$GE = GF + FE$$

Y como $GF = FE = AF$ y $AF = \frac{a-b}{2}$, entonces, $GE = 2 \left(\frac{a-b}{2} \right)$

$$GE = a - b \quad (11)$$

Sustituyendo las ecuaciones (7), (8), (10) y (11) en la ecuación (5), obtenemos:

$$\left(x - \sqrt{b^2 - y^2} \right) b = (a - b) \sqrt{b^2 - y^2}$$

Simplificando:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Que es la ecuación general de una elipse con semiejes a y b, como se quería mostrar.

Esto es, el mecanismo de la figura 17 describe a una elipse.

2.2.3 Modelo virtual.

Construcción de Kleiber



1. Mueve el punto C y observa los segmentos de la construcción.
Cuando moviste el punto C ¿Cuáles fueron los segmentos que no cambiaron su longitud durante el movimiento?
2. ¿Cuáles son los segmentos que cambiaron su longitud durante el movimiento?
3. Cuando moviste el punto C ¿Qué longitudes de segmento son iguales?
4. Cuando moviste el punto C ¿Qué figura trazó el punto D?
5. Modifica la longitud del segmento AC y coloca el segmento KD de tal manera que sea igual que AC. Mueve después el punto C.
Al ser $AC=KD$ ¿Qué figura trazó el punto D? Puedes explicar ¿Por qué se forma?
6. Mueve el segmento AC y coloca el segmento KD a la mitad de la longitud de AC. Mueve ahora el punto C.
Al medir KD la mitad de AC ¿Qué figura trazó el punto D? Puedes explicar ¿Por qué se forma?
7. ¿Puede esta construcción trazar otra curva diferente a las que mencionaste en las preguntas anteriores?, dibuja cuales serian.
8. Traza una recta perpendicular a la recta EB que pasa por D y corta a AC en un punto (nombra ese punto).
¿Cómo es el segmento del punto que nombraste a K con respecto al segmento KC?
¿Cómo lo puedes justificar?

9. En la figura trazada por el punto D existen elementos que la conforman. El punto A al punto que nombraste determina uno de ellos ¿Qué nombre recibe este elemento?
10. La distancia AC determina otro elemento en la figura trazada por el punto D ¿Qué nombre recibe este elemento?
11. ¿Qué tipo de triángulo forman los puntos ACB?
12. ¿Qué trazo harías para formar un triángulo donde el segmento del punto A al punto que nombraste sea semejante a uno de los lados del triángulo ABC? (ver anexo 1)
13. Escribe la proporción de semejanza de los triángulos formados en el punto anterior.
14. Toma la igualdad de dos proporciones, en donde una de ellas este formada por $\frac{AP}{AC}$, donde AP es la distancia de A al punto que nombraste.
¿Puedes llegar a la ecuación de la elipse con centro en el origen por medio de esta proporción? ¿Cómo lo harías?

Referencias Bibliográficas y Bibliografía consultada.

Artobolevski, I. (1964). Mechanisms for the Generation of Plane Curves. Pergamon Press, New York.

Artobolevski, I. (1975). Mecanismos en la técnica moderna. Tomo 2, parte 1. Ed. Mir.

Bartolini Bussi, M. (2007) Experimental mathematics and the teaching and learning of proof. Research funded within the PRIN 2005019721 on "Meanings, conjectures, proofs: from basic research in mathematics education to curricular implications.

Bartolini, Maria G. et al. (2004). The MMLAB: a laboratory of geometrical instruments. Comunicazione orale all'interno del minisimposio Applicazioni della Matematica all'industria culturale.

Bartolini Bussi, M. et al. (2003). Learning Mathematics with tools. U.M.I. (the association of school and university teachers of Mathematics), The paper is a part of the book that is presented at ICME.

Coolidge, J. (1945). A history of the conic sections and quadric surfaces. The Clarendon press, Oxford.

Dennis, D. (1995). Historical Perspectives for the Reform of Mathematics Curriculum: Geometric Curve Drawing Devices and Their Role in the Transition to an Algebraic Description of Functions. PhD Dissertation, Cornell University.

Descartes, R. (1637). LA GEOMETRÍA, Traducida por Pedro Rossell Soler. Profesor de la Universidad de Buenos Aires. Espasa - Calpe. Argentina. S.A. Buenos Aires - México. 1947. P. 49 - 60

Dürer, A. (1605). Institutionum geometricarum libri quatuor. Arnheimiae in Ducatu Geldriae : Ex officina Iohannis Iansonii.

Dyck, W. (1994). Katalog mathematischer und mathematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente. Georg Olms Verlag, Zurich, New York.

Easton, J.B. (1963). Johan de Witt kinematical constructions of the conics. The Mathematics Teacher, pp. 632-635.

Horsburgh, E. M., editor, Modern Instruments and Methods of Calculation, A Handbook of the Napier Tercentenary Exhibition, G. Bell and Sons and The Royal Society of Edinburgh, London.

Jill, Vincent, et al. (2002). Mechanical linkages as bridges to deductive reasoning: a comparison of two environments. PME 26. Pp 313-320.

Kempe, A. B. (1877). *How to Draw a Straight Line*. London, England: Macmillan and Co.

Mariotti, M.A., Bartolini Bussi, M., Boero, P., Ferri, F. y Garuti, R. (1997). *Approaching Geometry Theorems in Contexts: From History and Epistemology to Cognition*, en Proc. XXI PME Int. Conf., 1, pp.180-195, Finlandia: Lathi.

Maschietto, M. y Martignone, F. *Activities with Mathematical Machines Pantographs and curve drawers*. Research funded by MIUR (PRIN 2005019721).

Schooten, F. van (1657). *Exercitationum mathematicarum liber IV, sive de organica conicarum sectionum in plano descriptione*. Lugd. Batav ex officina J. Elsevirii.

Schooten, F. van (1659-60). *Mathematische oeffeningen : begrepen in vijf boecken*. Amsterdam : Gerrit van Goedesbergh.

Taimina, Diana. *Historical Mechanism for Drawing Curves*. Supported by National Science Foundation grant DUE-0226238.

Verillon, P. y Rabardel, P. (1995). *Cognition and Artefacts: A Contribution to the Study of Thought in Relation to Instrumented Activity*. *European Journal of Psychology of Education*, 10(1), pp. 77-101.

Witt, J. (16...). *Elementa Curvarum Linearum*. Apéndice de la edición latina de la *Géométrie* de René Descartes, a cargo de Franz van Schooten