CREAR EN GEOMETRÍA EUCLIDIANA:
DIARIO DE UNA EXPERIENCIA PERSONAL

Mario Dalcín
mdalcin00@gmail.com
Instituto de Profesores 'Artigas', Uruguay

Tema: Formación de profesores y maestros
Modalidad: Comunicación breve
Nivel educativo: Formación y actualización docente
Palabras clave: Crear, conjeturar, demostrar

Resumen

La presente comunicación busca dar cuenta de una experiencia individual, personal, de creación en el ámbito de la geometría euclidiana. se asume el término 'crear' en la acepción 'producir algo de la nada' (RAE). El punto de partida geométrico es un cuadrilátero completo que posibilita -y de alguna manera también acota- un conjunto de preguntas a las que se busca dar respuesta trabajando en un ambiente dinámico. El diario es la forma usada en el intento de captar dicho proceso.

Pero no creo que solamente deba escribir lo que sé, sino también lo otro.
Por los tiempos de Clemente Colling, Felisberto Hernández

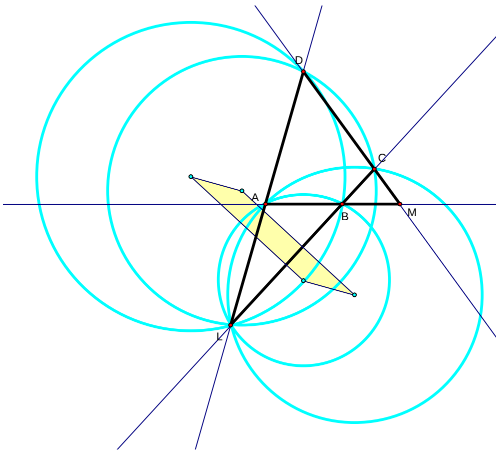
Introducción

El diario que sigue es la adaptación a ocho páginas de la parte inicial de un extracto de unas treinta páginas de un diario más amplio y que sigue en construcción. La intención del mismo es comunicar algunos aspectos de una experiencia propia de creación en el ámbito de la geometría euclidiana. Considero que gran parte de la enseñanza de la geometría euclidiana hace hincapié en la comunicación de resultados –axiomas, definiciones, clasificaciones, teoremas- pero difícilmente encontremos mención a cómo se llegó a dichas conclusiones, a los procesos individuales o colectivos que les dieron origen. Este diario busca captar parte de un proceso –en este caso individual- que se dio previo a la formulación de una propiedad.

Es importante aclarar que la experiencia se desarrolló en un clima de ocio prolongado, sin consultar ningún texto de geometría ni Internet y el ambiente dinámico es el de *The Geometer's Sketchpad*.

11 de febrero

La verdad es que no sé cómo se dio el enganche de lo anterior con esto que sigue. Lo que sí sé es que ayer volví a enredarme con un cuadrilátero ABCD –consideré uno convexo- y los puntos L y M de corte de sus lados opuestos. No recuerdo por qué construí las circunferencias circunscritas a algunos –no se decir cuáles ni por qué- de los triángulos determinados por los seis puntos. Y me llamaron la atención cuatro de estos centros, los que se pueden ver en la figura que sigue, figura de la cual se eliminaron otras circunferencias y sus centros que no vienen al caso para mostrar lo que me llamó la atención.

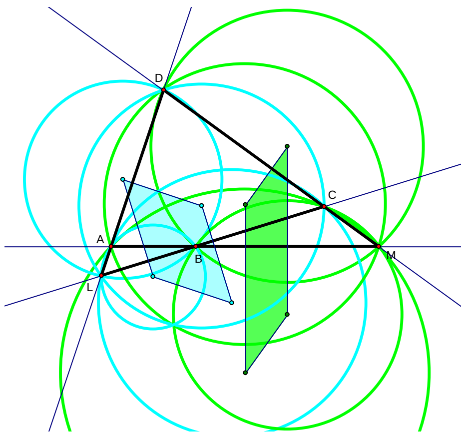


¿Había visto esto antes? No lo creía. La verdad es que en caso de haberlo visto antes no lo recordaba para nada. Ayer fue un día en el que hice varias vueltas fuera de casa, algunas más por obligación, otras más por placer, y en la tarde tuve un rato en el que estuve haciendo esta figura. Me alegré de encontrarle una explicación al por qué surgía el paralelogramo que se veía. Me fui aclarando al ir escribiéndolo en un papel. (Anexo 1) ¿Habría otros paralelogramos? Ahí fue que me surgió la pregunta de cuántos triángulos había en la configuración Traté de anotar esos triángulos. (Anexo 1) Tenía que volver a salir a la noche así que dejé el asunto ahí. La lista me pareció bastante extensa, mucho más de lo que había supuesto originalmente, pero estaba seguro que habría triángulos que se repetirían (como ABC y BCA, por ejemplo) y eso haría disminuir un poco la cantidad de triángulos, pero claro, tenía que encontrar cuál era el mismo que cuál y tenía que salir. Por otro lado no estaba para nada seguro que en la lista confeccionada estuvieran todos los triángulos posibles, más bien intuía que no.

12 de febrero

Hoy de mañana, al retomar el asunto, no tuve en cuenta lo hecho ayer y confeccioné otra lista. (Anexo 2) Este proceder sí me daba tranquilidad de que había nombrado a todos los triángulos posibles. (Anexo 3) Voy a ir construyendo las circunferencias teniendo como guía el orden en que están en la lista, en algún momento se empezarán a repetir y en ese caso marco en la lista que ese triángulo ya está y sigo con el siguiente de la lista. Tenía un plan. ¡Al fin tenía un plan! E hice otra cosa.

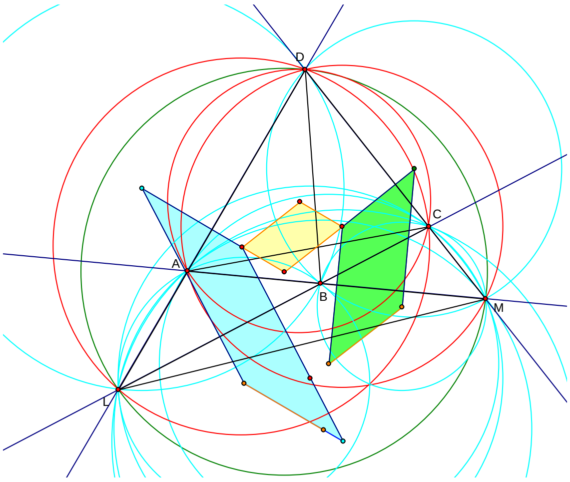
En cuanto abrí *Sketchpad* pudo más el buscar otro paralelogramo, y procediendo por analogía con el que ya tenía hecho –después de algunos fracasos que oculto- lo obtuve, lo hice aparecer:



Me resistía a seguir la lista y… (Anexo 4) Pero a su vez me intrigaba la idea de si habría un nuevo paralelogramo determinado por centros de circunferencias circunscritas a triángulos cuyos vértices fueran tres de los seis puntos iniciales.

Veo una nueva posibilidad con los puntos D, A, L y D, C, M. Pero tengo que salir un rato de casa así que me quedo con la intriga.

Ya de vuelta, buscando concretar la idea con los puntos mencionados previamente, idea que me parecía análoga a la que me había permitido construir los dos paralelogramos iniciales, pienso que los triángulos a considerar tendrían que ser DAC, DAM y DCA, DCL. Veamos si ahora sí surge un tercer paralelogramo. Recurro a *Sketchpad*. ¡Puta madre! Estos triángulos no me sirven de nada. Pero eso significa que estuve pensando mal qué triángulos eran los que servían. Vuelvo a observar atentamente la figura de donde surgió el primer paralelogramo. Ah!, ok, ok, efectivamente estaba pensando mal. Los triángulos tendrían que ser DAC, DAM y DLC, DLM. Veamos:

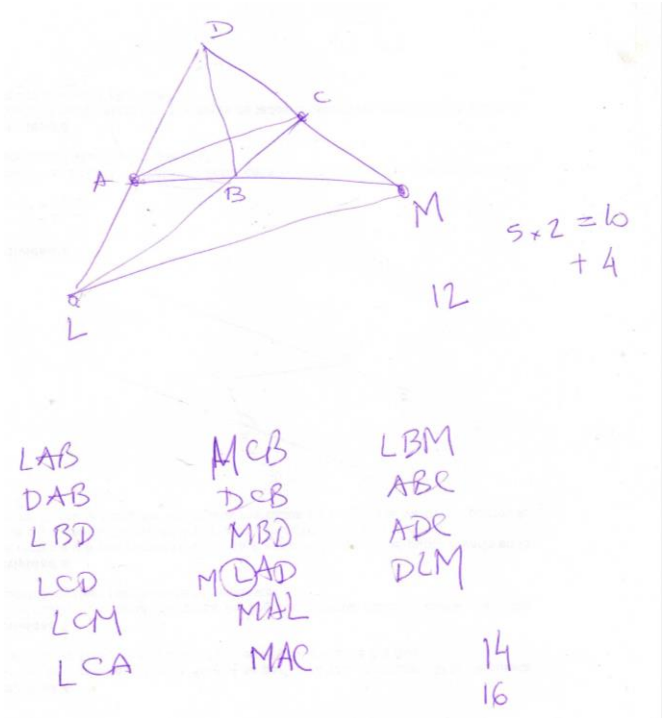


¡Siiiii! ¡Qué lindo cómo se veía el tercer paralelogramo!

¿Habrá llegado la hora de pensar en ‘todos’ los triángulos posibles y en construir ‘todas’ las circunferencias circunscritas a esos triángulos y sus respectivos centros? Así como estaba la figura contaba con 12 centros, lo que significaban 12 circunferencias circunscritas y también que ya había considerado 12 triángulos distintos con los seis puntos A, B, C, D, L, M. Uno de mis pronósticos había predicho 8 triángulos. Quedaba claro que le había errado fiero. Pero más tentador que pensar en ‘todos’ los triángulos me resultaba tratar de hallar un cuarto paralelogramo. Claro que ahora no tenía ningún indicio que existiera.

Por otro lado veía algunos triángulos que aún seguían sin su circunferencia circunscrita, como LBM, DAB, BCD, ABC. Decidido: prefería construir los centros de sus circunferencias circunscritas y ver si surgía algo interesante. Lo hice. Y lo único que me llamó la atención fueron cuatro centros alineados en la mediatriz de LM. Seguí arrastrando los puntos A, B, C, D y al rato me di cuenta que habían otros cuatro puntos alineados en la mediatriz de BD. Seguí haciendo variar la figura y al ratito me percaté de otros cuatro puntos alineados en la mediatriz de BM.

Era tarde en la noche, eso de la 1:30, así que me fui a acostar. Estuve leyendo un rato, como hasta las 3:00. Ahí fue cuando me surgió una idea. Me levanté a conseguir unas hojas –lápiz y lapicera tengo en la cabecera de la cama- y me volví a acostar a hacer la siguiente figura:



Al hacer la figura tomé conciencia de la 'simetría' de la configuración. Con 'simetría' me refiero a que lo que pasa de un lado de DB también pasará del otro. Empecé a nombrar los triángulos que figuran en la primera columna y de esta manera conseguí los cinco primeros. Procedí de manera análoga, teniendo en cuenta la simetría mencionada, con los primeros cinco de la segunda columna. Finalmente nombré los cuatro triángulos de la tercera columna, que tenían todos una parte de un lado, y otra del otro de BD. Tenía 5 x 2 = 10, más 4, total 14 triángulos. Para mi estaban todos los posibles triángulos. A continuación partí de cada triángulo nombrado y lo confronté con la figura. Empecé por la primera columna y después de verificar hasta el quinto triángulo me di cuenta que no había visto el triángulo LCA. Así que en la segunda columna también debería haber otro triángulo: el MAC.

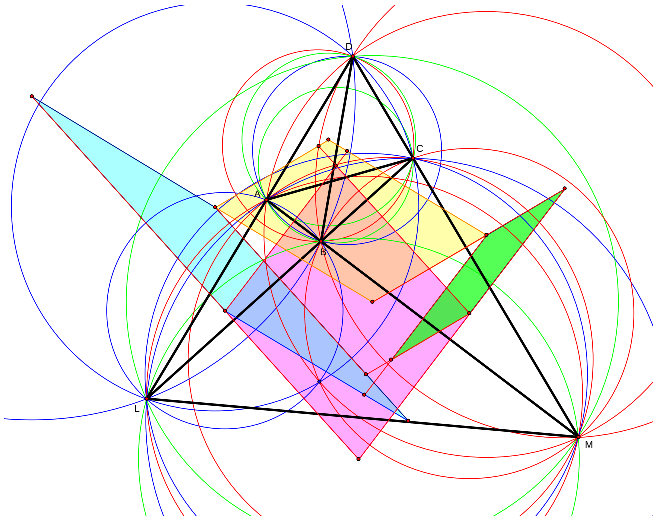
13 de febrero

A la mañana, enseguida de desayunar, abrí *Sketchpad* y con la lista de la noche anterior presente, me puse a revisar si ya tenía construidas todas las circunferencias de la lista. Y ya las tenía.

Consideré el cuadrilátero cuyos vértices eran los centros de los paralelogramos y el punto por donde pasaban las cuatro circunferencias circunscritas a LAB, LCD, MBC, MCD. No le vi nada especial.

Fantaseé que el área del paralelogramo del medio fuese el promedio de las áreas de los otros dos. Hice las mediciones y constaté que lo mío era pura fantasía.

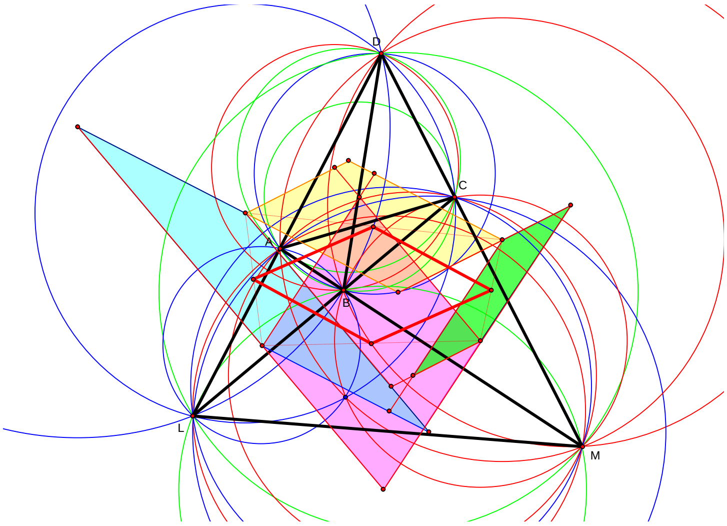
Antes había visto tres casos de cuatro puntos alineados y también algunas situaciones de tres puntos alineados. ¿Podría marcar todas las posibilidades que se presentaban de tres puntos alineados? Me puse a la tarea y fui consiguiendo algunas ternas. Estaba en esto cuando ¡vi un cuarto paralelogramo!



Sabía que la tarea de señalar todas las situaciones donde hubieran tres puntos alineados todavía no estaba concluida, posiblemente habían casos que todavía no había visto. Pero me surgía una nueva pregunta: ¿pasa algo interesante con los centros de los cuatro paralelogramos? Lo que fantaseaba es que podían determinar un nuevo paralelogramo.

Arrastrando los vértices de ABCD y pensando por dónde estarían ubicados esos centros de paralelogramo ya se me terminó la fantasía. No me parecía que determinara ningún paralelogramo.

De todas maneras construí los centros de los paralelogramos. Para ello consideré una diagonal de cada uno de los cuatro paralelogramos y construí sus puntos medios. De las dos diagonales –de cada uno de los cuatro paralelogramos- elegí construir la que unía vértices comunes a dos paralelogramos. De esa manera surgió un nuevo cuadrilátero cuyos puntos medios eran los centros que necesitaba. Los construí. Y ahí pensé: ¡pero qué tarado!



Si los centros de los paralelogramos eran puntos medios de un cuadrilátero, entonces era segurísimo que determinaban un paralelogramo. Esto de que los puntos medios de cualquier cuadrilátero determinaran un paralelogramo era algo que había creado Varignon hacia como 300 años y era una propiedad que yo conocía muy bien y por eso me molestaba no haberla tenido presente en esta ocasión. Me quedó una sensación ambigua. ¿Era interesante que surgiera ese quinto paralelogramo? Inicialmente me pareció que no. La sensación fue generada por no haber predicho que ese paralelogramo necesariamente iba a surgir, por haberlo visto primero con los ojos antes que con el pensamiento siendo la propiedad de Varignon tan conocida por mí.

Pero un rato después, buscando aclarar mi sensación ambigua, me di cuenta que al intentar construir los centros de los cuatro paralelogramos de esa manera había elaborado sin querer una demostración de por qué sí o sí el quinto cuadrilátero era un paralelogramo. En ese momento el quinto paralelogramo me pareció doblemente interesante, primero por ser paralelogramo y segundo porque tenía una demostración de por qué lo era. Además este quinto paralelogramo surgía de los cuatro paralelogramos anteriores pero a su vez los unía de una manera nueva a la unión que ya tenían de tener un vértice en común. Sentía que este quinto paralelogramo le daba a la configuración cierta unidad, cierto equilibrio, cierta simetría. Y a mí cierta tranquilidad, cierta paz.

Reflexiones finales

Los resultados matemáticos –axiomas, definiciones, clasificaciones, demostraciones, teoremas- son el final exitoso de diversos procesos –axiomatizar, definir, clasificar, conjeturar, demostrar, conjeturar-. El hincapié puesto en la enseñanza de resultados suele esconder los procesos de su creación, procesos llenos de vaivenes, de éxitos parciales pero también de fracasos, de moverse a tientas en la incertidumbre, de andar a ciegas ante lo desconocido, de formularse preguntas atinadas algunas e inconducentes otras, de vivir alegrías y desilusiones, sentirse insuflado y al instante un bobo. Tomar conciencia de estos procesos centralmente creativos -que puede presentarse ante toda actividad geométrica genuina- tanto por parte de profesores como de estudiantes, y buscar hacerlos explícitos en el aprendizaje de la geometría, podría ser una vía fructífera de desarrollo de los involucrados en dichos procesos, donde lo irracional, racional y emocional conviven entrelazados.

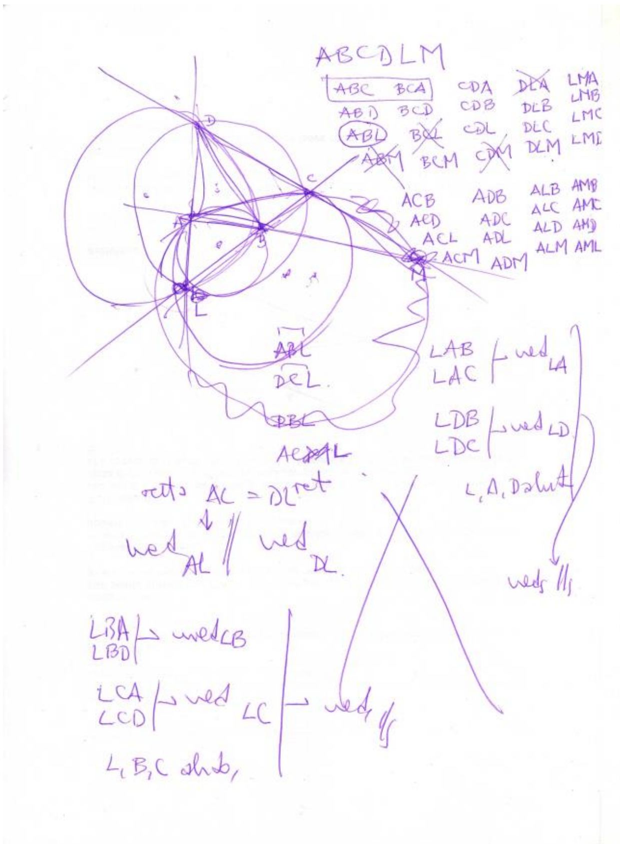
Es posible que los cinco paralelogramos con los que termina este diario hayan sido creados reiteradas veces en distintos tiempos y lugares. Esto para nada invalida la experiencia y las emociones vividas (ambas necesariamente únicas). La invitación es a la reflexión sobre la viabilidad de tener en cuenta los procesos matemáticos, procesos eminentemente creativos, a la hora de enseñar y aprender geometría.

Tanto el libro de Hadamard (1865-1963) como la conferencia de Poincaré (1854-1912) pronunciada hace más de un siglo en la Sociedad Psicológica de París que incluyo en las referencias, si bien los había leído hace muchos años y tengo los textos en casa, preferí no volver a leerlos para evitar posibles influencias en mi diario. En el mismo sentido y mientras este diario siga en construcción he optado por no buscar nuevas referencias.

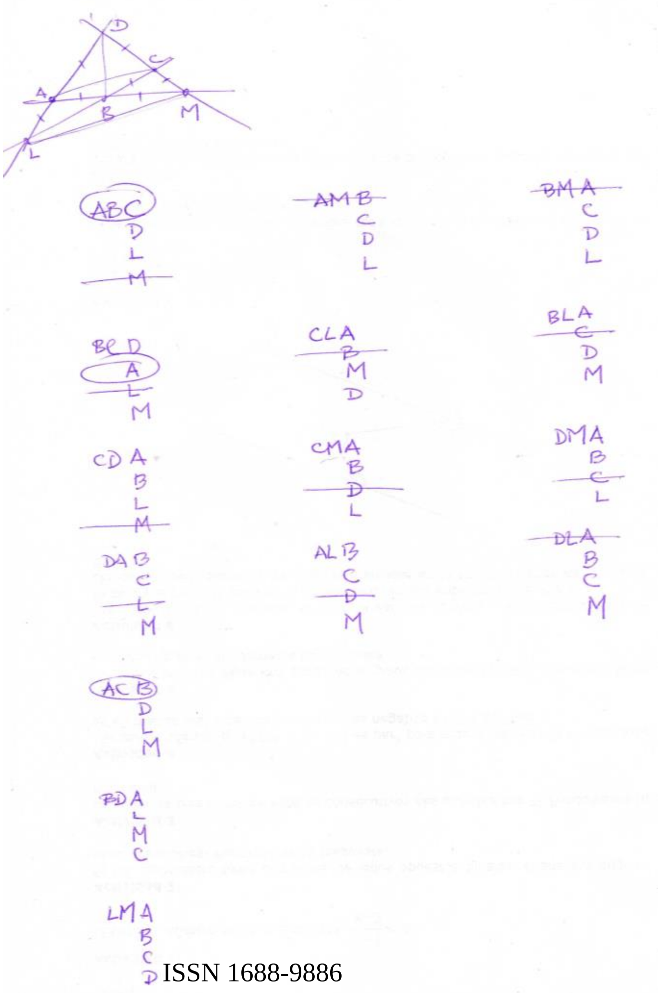
Referencias bibliográficas

- Hadamard, J. (1947). *Psicología de la invención en el campo matemático*. Buenos Aires: Espasa-Calpe.
- Poincaré, H. (1995). La creación matemática. En *Investigación y ciencia*, número especial Grandes matemáticos, pp. 2-4. Barcelona: Prensa científica.

Anexo 1



Anexo 2



Anexo 3

Al confeccionarla incluso había ido tachando los casos en que tres puntos no formaban un triángulo por estar alineados. Claro que se mantenía en esta lista la dificultad de encontrar cuáles eran los triángulos que se repetían. Dudaba entre ponerme a hacer esa búsqueda o pasar directamente a hacer las circunferencias circunscritas en la figura. Lo primero me resultaba aburrido, lo único que me motivaba en esa vía era la de finalmente tener todos los triángulos posibles –lo que me facilitaría construir sus circunferencias circunscritas y sus centros- y saber cuántos eran. Pero lo que me interesaba realmente era ver esas circunferencias y sus centros de una vez, ya, y así ver si surgían nuevos paralelogramos. Debo confesar que detesto, siempre detesté, los problemas de contar como era este de saber cuántos triángulos había. Desconfiaba, estaba casi seguro, que habría alguna fórmula que daría la respuesta a cuántos triángulos se pueden formar con seis puntos y que yo debería saberla pero la verdad es que nunca me interesó. En este caso, además, esa fórmula se vería alterada por los casos de tres puntos que quedaban alineados así que tampoco serviría mucho. ¿Qué hacer? Porque así eran 15 por 4, es decir 60 posibles triángulos de los cuales solo había tachado 12 imposibles por estar tres puntos alineados. Quedaban 48 posibles triángulos que suponía deberían terminar siendo 48 dividido 3, es decir 16 –ya que hay tres maneras de nombrar un mismo triángulo-. ¿Tres maneras? No, no, más. Por ejemplo, con los puntos A, B, C se puede formar un solo triángulo que puede nombrarse como ABC, BCA, CAB, ACB, BAC, CBA. Así que los triángulos terminarían siendo 48 dividido 6, es decir 8. Pero no estaba seguro que en la última lista hubiera anotado todas las variantes de cómo nombrar un triángulo, así que intuitivamente más bien me inclinaba porque los triángulos fueran 16.

Anexo 4

…observando la figura me di cuenta que las cuatro primeras circunferencias pasaban por L y que las otras cuatro pasaban por M. ¿Cuántas circunferencias que pasaran por L se podían construir? En la figura veía cinco: las cuatro primeras y una de las segundas (LAM). Pensé: son seis puntos y estoy parado en L así que parece sensato que hayan cinco circunferencias pasando por L, la misma cantidad de puntos que no son L. ¿Qué significaba eso? Nada, era la primera intuición explicativa que me había surgido, pero ahora ya me parecía que no tenía mucho sentido. La idea servía para darme cuenta que con extremo L habían cinco segmentos cuyos extremos eran L y cada uno de los otros cinco puntos. Pero si bien la idea original no servía me llevaba a esta otra: para cada punto habían cinco segmentos posibles y para cada segmento ¿cuántos puntos libres quedaban? Tres o cuatro, dependía del segmento. Por ejemplo, para AB quedaban libres tres C, D, L para los que se formaban triángulos (ya que M quedaba alineado con A y B), para AC quedaban libres cuatro B, D, L, M. Me doy cuenta en este instante que la figura que estoy observando (la anterior) no es la más adecuada para mis fines, ya que no tengo construida en ella los segmentos AC, BD, LM y por lo tanto no estoy viendo un montón de triángulos que se deben formar al trazarlos. Construyo los segmentos que me estaban faltando y surge una nueva dificultad: las diagonales AC y BD me hacen ver cuatro triángulos al interior de ABCD que no son triángulos que me interesen, son triángulos que no debo considerar y sin embargo los estoy viendo, se me imponen de alguna manera. Lo importante son los seis puntos originales y los triángulos que pueda considerar a partir de ellos. ¿A ver si puedo volver a retomar el hilo del argumento? No, creo que no.

Lo que me impulsa en este momento es una búsqueda de claridad, sí, de clarificar finalmente una situación que por el momento no estoy viendo en su conjunto, en su globalidad. Bueno, veo que hay un montón de triángulos, por otro lado albergo la esperanza de que surjan nuevos paralelogramos –aunque ahora lejanamente ya que los dos que conseguí son de alguna manera ‘simétricos’, análogos en la figura, que de alguna manera es partida al medio por la recta DB.

El primer paralelogramo surgió de considerar mediatrices de LA, LD y de LB, LC o también de dos ternas de puntos alineados L, B, C y L, A, D con uno en común L y los cuatro triángulos que se pueden formar.

¿Me sirve esto para buscar un nuevo paralelogramo? Tratando de hipnotizar la figura y después de un rato de no ocurrírseme nada doy con A, B, M y C, B, L, dos ternas de puntos que están alineados y tienen a B en común. Veamos si pasa algo interesante. Nada, no veo nada interesante

Aunque sí veo tres puntos alineados, tres centros que están en la mediatriz de LA, circuncentros de LAB, LAC, LAM. ¿Pero por qué no veo tres puntos alineados con mediatriz MC? Pensando por analogía puedo construir la circunferencia que me está faltando y surgen los tres puntos esperados, alineados en la mediatriz de MC.

No veo paralelogramo por ningún lado. ¡Pero sí me llegan de regalo otras dos ternas de puntos alineados que no esperaba!