

## COMO ATAJARLE UN PENAL A SUAREZ

Leonardo Moreno  
mrleo@iesta.edu.uy

DMMC, IESTA, Facultad de Economía, Udelar, Montevideo, Uruguay

Tema: Pensamiento probabilístico estadístico.

Modalidad: Comunicación Breve.

Nivel educativo: Terciario.

Palabras clave: Cadenas de markov, estimación de densidades, modelos de regresión.

### Resumen.

La estadística matemática ha tenido un desarrollo vertiginoso a partir de principios del siglo XX. En particular su aplicación transversal a las ciencias y en diversos sectores productivos y sociales. No escapa a esta realidad las actividades deportivas, entre ellas el fútbol. Las altas exigencias para el deportista profesional, han llevado a la búsqueda de una mejora en su rendimiento a través del uso de diferentes tipos de información y su tratamiento estadístico. El objetivo del trabajo es introducir y observar la necesidad de distintos conceptos probabilísticos y estadísticos a través de una aplicación concreta, el lanzamiento de penales en un partido. Conociendo información histórica sobre los tiros desde el punto penal realizados por un jugador, posición donde fue la pelota, velocidad del balón, posición inicial del lanzador y otras variables cuantitativas, como esto puede coadyuvar a la toma de una decisión del arquero rival. La finalidad del trabajo es por tanto proponer un discusión sobre el manejo de determinados niveles de información y plantear distintas herramientas estadísticas para su manejo. Se introducen de forma heurística los conceptos de cadenas de markov, test de rachas, estimación de densidades, modelos de clasificación y regresión.

### 1. Introducción.

La idea del trabajo es el poder introducimos en diversos conceptos de probabilidad y estadística a través de un tema como hilo conductor, el fútbol, y en particular los lanzamientos de tiros penales. Es sabido la pasión que despierta este deporte en gran parte del mundo, abarcando todas las edades y clases sociales, lo que permite una motivación inicial al momento de involucrarse en los procesos del aprendizaje. Esta actividad puede ser realizada en un contexto multidisciplinario donde los datos pueden ser recolectados

por los mismos estudiantes. Si bien la concepción matemática formal de algunos de los conceptos tratados escapan a la formación secundaria, a modo personal creemos que la introducción heurística de algunos de ellos permite al estudiante involucrarse a nuevas formas de razonamiento, el acercamiento a estos conceptos posibilita la comprensión de determinados algoritmos que se encuentran estrechamente ligados a como el cerebro humano procesa la información.

## 2. Desarrollo.

El desarrollo del trabajo se divide en 5 partes, cada una de las cuales utiliza una herramienta estadística particular según la información espacio-temporal disponible. Los información la agruparemos en distintos niveles o escenarios,

- a) Número de lanzamientos hacia el sector izquierdo o derecho del arco.

Tiros hacia el arco y tiros errados.

- b) Distancia sobre la horizontal donde fue el balón.

Medida angular del destino del balón en referencia a la horizontal

Coordenadas cartesianas del destino del balón .

- c) Sucesión de penales lanzados a la izquierda y a la derecha.

Si el penal fue gol o no en cada lanzamiento.

- d) Posición del lanzador respecto al balón.

Marcador del partido a la hora de lanzar el penal

Minutos de juego del partido.

En el nivel a), se introducen los conceptos de pruebas de Bernoulli, independencia, probabilidad condicional y estimación puntual. En el nivel b) se realiza la construcción de histogramas, la estimación univariada y bivariada de una densidad, y la estimación de la densidad angular. En el nivel c) se comienza por observar la dependencia en sucesiones aleatorias, se realiza un test de rachas y se observa como nuestra mente no procesa de manera independiente al pasado. Se modela el problema mediante cadenas de Markov homogéneas de orden 1, con 2 o 4 estados según la información disponible. Y por último en el escenario d) se proponen modelos de clasificación y regresión, se mencionan conceptos de aprendizaje automático como lo son el de muestra de entrenamiento y muestra de testeo.

## 2.a Pruebas de Bernoulli.

Comencemos sólo teniendo como disponible la cantidad de lanzamientos hacia la derecha del arquero y la cantidad de lanzamientos a la izquierda del arquero (Figura 1)

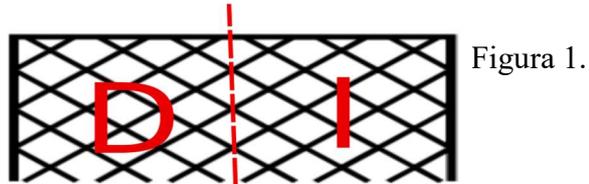


Figura 1.

A modo de ejemplo, un determinado jugador tiro 80 penales, 50 fueron lanzados a la derecha del arquero. Podemos modelar esta situación de la siguiente manera. Llamemos  $x_i$  a una variable que vale 1 si el tiro  $i$ -ésimo fue a la derecha y 0 si fue al sector izquierda. Por tanto en el ejemplo,

$$\text{Número de penales a la derecha} = \sum_{i=1}^{80} x_i = 50$$

Supongamos entonces que el jugador lanza el disparo a la derecha con probabilidad constante  $P$ , de forma independiente de los tiros anteriores. Como puedo aproximarme al valor de  $P$ , a esta estimación de  $P$  la anotaremos  $\hat{P}$ .

En nuestro caso,

$$\hat{p} = \text{proporción de tiros a la derecha} = \frac{\sum_{i=1}^{80} x_i}{80} = 0.625$$

Ciertos teoremas de la teoría asintótica de la probabilidad (leyes fuertes de los grandes números), permiten concluir que bajo los supuestos marcados, para una secuencia de penales suficientemente larga,  $\hat{P}$  es una buena aproximación de  $P$ .

Si ahora también conocemos si el penal fue errado o no, ¿cambiaría esto la decisión del arquero?. Para analizar esto consideremos la tabla siguiente,

Tabla 1.

	Errado	Acertado
$D_{lanzador}$	25	25
$I_{lanzador}$	4	26

Podríamos argumentar la decisión del arquero en el siguiente calculo probabilístico.

Tomemos como supuesto que si arquero acierta el palo entonces no es gol,

$$P\left(\frac{\text{No sea Gol}}{D_{arquero}}\right) = P(D_{lanzador}) + P(I_{lanzador} \cap \text{Errado}) = \frac{50}{80} + \frac{4}{80} = \frac{54}{80}$$

$$P\left(\frac{\text{No sea Gol}}{I_{arquero}}\right) = P(I_{lanzador}) + P(D_{lanzador} \cap \text{Errado}) = \frac{30}{80} + \frac{25}{80} = \frac{55}{80}$$

Por tanto, en este caso, el arquero cambiaría su decisión anterior. Uno podría realizar un razonamiento similar si conoce la información, en caso de que el penal fuese al arco, si fue atajado o no.

**2.b Estimación de densidades.**

También podemos conocer la distancia al centro del arco, sólo en la dirección horizontal.

Esta información se puede agrupar en intervalos según la tabla siguiente,

Tabla 2.

$[x_{i-1}, x_i)$	Número de penales $n_i$
$[-4.00, 3.15)$	8
$[-3.15, -2.50)$	12
$[-2.50, -2.00)$	10
$[-2.00, -1.50)$	7
$[-1,50, -1.00)$	6
$[-1.00, -0.50)$	4
$[-0,50, 0.00)$	3

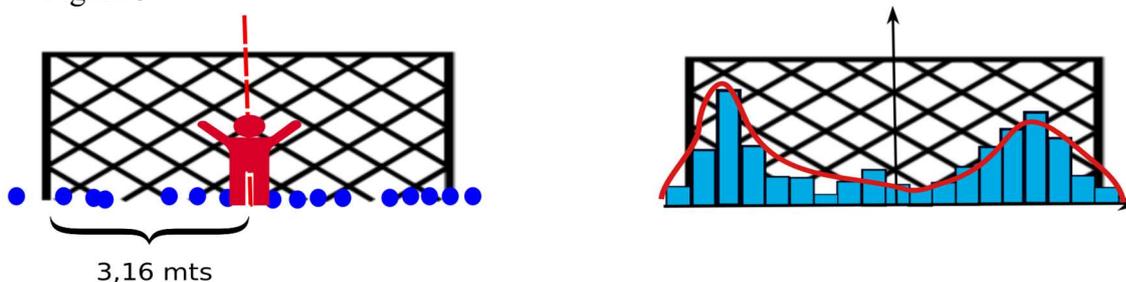
[0.00, 0.50)	1
[0,50, 1.00)	1
[1.00, 1.50)	3
[1.50, 2.00)	7
[2.00, 2.50)	8
[2.50, 3.15)	8
[3.15, 4.00)	2
	n=80

A partir de ella es posible construir la función histograma  $h$ , tal que si  $x \in [x_{i-1}, x_i)$ ,

$$h(x) = \frac{n_i}{n(x_i - x_{i-1})}.$$

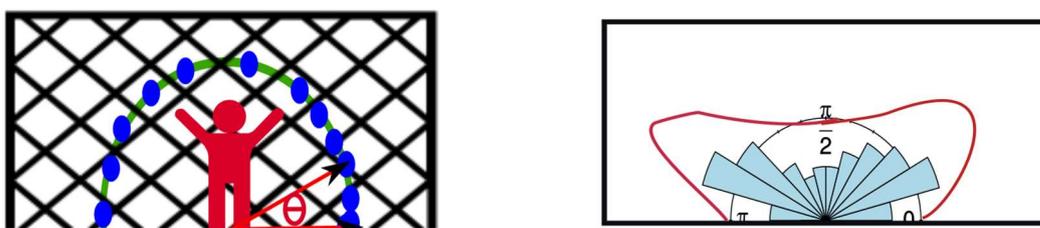
Esta función es una primera aproximación a la función de densidad, cuya área debajo de la curva entre a y b es la probabilidad que el tiro sea lanzado entre esos valores, como lo ilustra la figura siguiente.

Figura 3.



De la misma forma, podríamos tener sólo el ángulo respecto a la horizontal del destino de la pelota.

Figura 4.



Esta información nos indica en que dirección se tendría que lanzar el arquero y no la distancia a que se debería apartar del origen. Al igual que en el caso anterior es posible la estimación de una función de densidad pero sobre la semicircunferencia, ver figura 4.

A través por ejemplo de una cámara de video, es posible identificar las coordenadas del destino del balón. En este caso es posible construir una función de densidad bivariada, donde el volumen debajo del gráfico en una determinada zona nos informa la probabilidad de que la pelota vaya dirigida hacia ese sector,

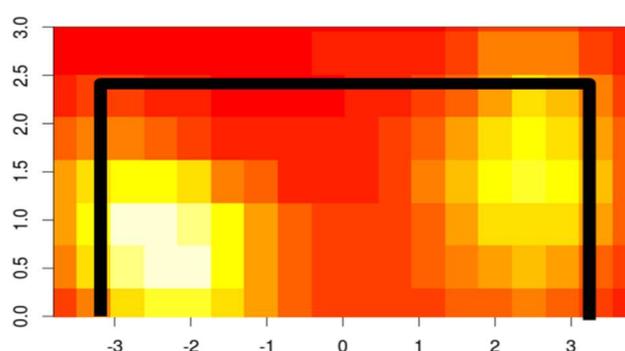


Figura 5.

### 2.c Test de Rachas y cadenas de markov

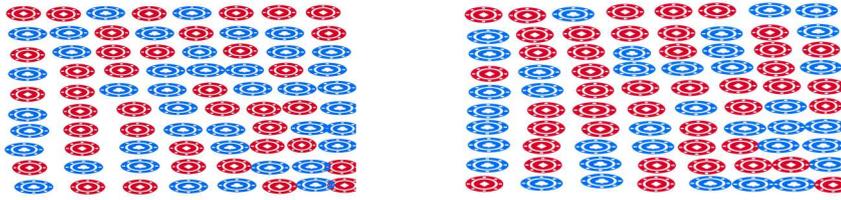
Podríamos también, además de saber si el penal fue lanzado a la derecha o la izquierda, conocer el orden con que fueron lanzado los penales. Cabe ahora preguntarnos, la elección por parte del jugador es independiente de los tiros anteriores. Si miramos los resultados obtenidos en 80 disparos, es posible testear por ejemplo si fueron hechos de forma independiente con probabilidad 0.5.

Un posible respuesta es mirar el número de rachas, es decir, el número de aciertos consecutivos. Si los tiros hubieran sido efectuados de forma independiente, la probabilidad de obtener una racha de al menos 6 en 80 disparos es aproximadamente el doble de obtener una racha de a lo sumo 4 aciertos,

Figura 6.

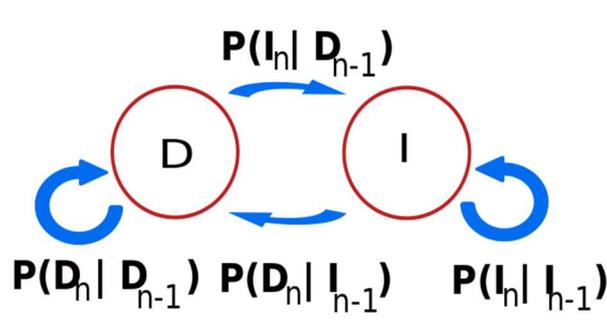
Marcas de una persona  
simulando azar.

Marcas al lanzar  
una moneda.



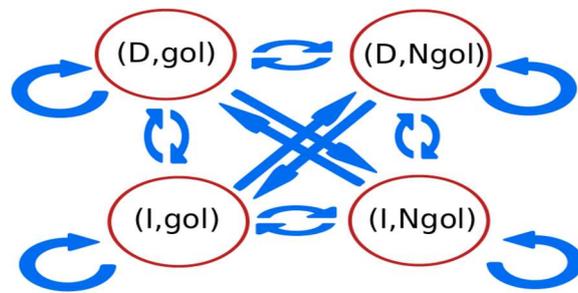
Podemos pensar que la elección derecha o izquierda (diremos en este caso que tenemos dos estados) del penal va a depender de lo que lanzo en el penal anterior. En este caso a partir de la información disponible en la figura 6 es posible estimar las probabilidades condicionales de la figura 7 y de esta forma la elección de palo del arquero.

Figura 7.



También podemos construir modelos donde la dependencia no es sólo del penal anterior sino de una secuencia mas larga de penales. Lo mismo sucede con el número de estados, si conocemos por ejemplo si fue gol o no, se podría pensar en un problema con 4 estados.

Figura 8.

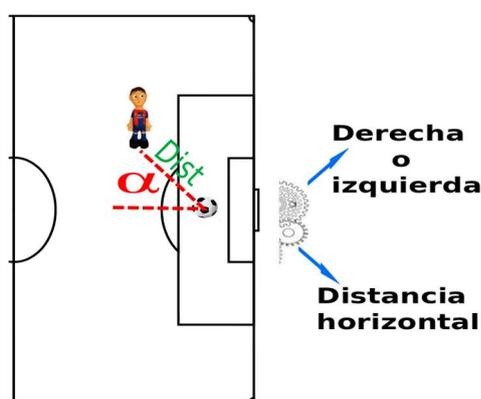


En ambos casos para poder estimar las probabilidades condicionales es necesario una sucesión de penales de gran tamaño.

## 2.d Modelos de clasificación y regresión.

Si por ejemplo conocemos la distancia del jugador a la pelota y el ángulo bajo el cual se posiciona, marcador del partido, minutos de juego transcurridos, podemos pensar en un modelo que tome como insumo esa información y tenga como output, por ejemplo, la velocidad con la que sale el balón (modelos de regresión), o si sale dirigido hacia la derecha o hacia la izquierda (modelo de clasificación).

Figura 8.



## 3. Conclusiones.

En el trabajo se intenta mostrar como distintos conceptos de probabilidad y estadística pueden ser introducidos de manera natural aplicados a un tema en concreto. La búsqueda de asociaciones y relaciones entre los distintos niveles de información para la posterior toma de una decisión son la base del pensamiento estadístico. Creemos en la estadística como una ciencia que puede brindar al estudiante un nexo entre teoría matemática, otras ciencias y diversas aplicaciones al mundo real.

## Referencias bibliográficas.

- Baillsberry, J. y Nelson, P. (2007). Alternatives to the penalty shootout. *Journal of Sports Science and Medicine*, 6 (10), 96.
- Gorroochurn, P. (2016). *Classic topics on the history of modern mathematical statistics: from Laplace to more recent times*. Ed. Wiley.
- Sadovskii, L. y Sadovskii, A. (1993). *Mathematics and Sports*. Ed. Mathematical World.
- The British Broadcasting Corporation (2016). What makes the perfect world cup shootout penalty? . <http://www.bbc.co.uk>. Consultado 15/02/2016.