LAS ESTRATEGIAS ARITMÉTICAS COMO RECURSO EN EL PRIMER ACERCAMIENTO A LA RESOLUCIÓN DE ECUACIONES: LA TRANSICIÓN DE LA ARITMÉTICA AL ÁLGEBRA.

Teresa Pérez - Nora Ravaioli
tperezan@gmail.com - nravaioli@gmail.com
IPA – Uruguay

Tema: Investigación Didáctica
Modalidad: Comunicación Breve
Nivel educativo: Medio
Palabras clave: Algebra, Ecuaciones, Fluidez procedimental, Comunicación.

Resumen

En nuestra práctica, hemos constatado las dificultades que presenta la enseñanza del álgebra y particularmente la resolución de ecuaciones. Esta experiencia, nos motivó a investigar si una propuesta de enseñanza sustentada en los conocimientos aritméticos de los alumnos, promueve la construcción del conocimiento algebraico, favoreciendo tanto el desarrollo de estrategias variadas y significativas de resolución de ecuaciones, como su forma de comunicarlas.
La investigación se llevó a cabo con alumnos de 13-14 años un liceo público y otro privado. Se realizó una intervención a nivel de aula en primer año y una prueba en segundo año de educación media.
Los resultados sugieren que una introducción que rescate los conocimientos aritméticos favorece el desarrollo de estrategias flexibles dependiendo del tipo de ecuación, promueve el desarrollo de formas de comunicación de estas estrategias y mejora considerablemente los resultados. El análisis de los datos permite realizar recomendaciones didácticas y deja abiertas líneas de investigación sobre las cuales profundizar en el futuro.

Cuerpo del trabajo

La finalidad de este estudio fue indagar el papel que juegan los conocimientos aritméticos de los alumnos, en el desarrollo de estrategias de resolución de ecuaciones. Con la motivación de no quedarnos solo en la descripción de las prácticas habituales de aula, diseñamos una breve secuencia didáctica. Esta se centró en actividades que promovieran la recuperación de las estrategias naturales que los alumnos tienen incorporadas a partir de sus conocimientos aritméticos y que pudieran emerger autónomamente o con escasa participación del profesor. Finalmente describimos la variedad de estrategias que se pusieron en juego y los cambios en la forma de comunicación de las mismas.

El aprendizaje de la resolución de ecuaciones, implica la puesta en juego de dos aspectos centrales en relación al conocimiento algebraico: la manipulación de expresiones simbólicas y la contextualización mediante diferentes representaciones en la construcción de conceptos. El marco teórico de sustento (Kaput, 1996; Kieran 1992 y 2013) plantea que estos dos enfoques no deben considerarse como antagónicos, sino ser tenidos en cuenta en forma simultánea desde el inicio de la enseñanza del álgebra, como forma de contribuir a generar sentido en relación a los conceptos que se están aprendiendo.

Como afirma Kaput (1996, p.89) "si algo carece de sentido cuando se aprende, la sensación permanece a lo largo del tiempo".

El tema de estudio – resolución de ecuaciones – es central en el curso de 2° año de Ciclo Básico (13-14 años) y su enfoque de enseñanza involucra un tratamiento transversal a lo largo de todo el año lectivo. Por ese motivo, la consideración de grupos de control y de aplicación sincrónicos hacía muy difícil el manejo de algunas variables intervinientes. Resultaría muy complejo, extenso y costoso controlar la aplicación de dos propuestas diferenciadas a cargo de un mismo docente, en un mismo centro, a lo largo de todo un curso lectivo. Se decidió entonces una propuesta de intervención acotada, fuera del curso de 2°año y se controló en forma diacrónica.

La investigación se llevó a cabo en dos centros educativos.

En 2013:

Se propuso una prueba a todos los alumnos de 2° año. La prueba consistió en una serie de ecuaciones que los estudiantes debían resolver registrando el proceso seguido, con el propósito de hacer explícitas las estrategias de resolución utilizadas.

Se realiza simultáneamente una intervención en los grupos de 1° año. Esta intervención consistió en una secuencia didáctica de 10 sesiones e incluyó diferentes actividades, algunas con lápiz y papel y otras con applets. Los applets permitieron avanzar a los alumnos según su ritmo personal, además de experimentar y recibir retroalimentación sin necesidad de intervención directa del docente. Como instrumento de recogida de datos complementario se utilizó un instrumento novedoso en nuestro medio, la captura de videos de pantalla, que brindó importante información al disponer del registro visual y de audio del proceso que siguieron los alumnos al trabajar con los applets en la resolución de ecuaciones.

En 2014:

Se propone la misma prueba aplicada en 2013 a los alumnos que en 2014 cursan 2° año y que en 2013 participaron de la intervención en primero.

Se realiza el análisis a partir de los datos recogidos en ambas pruebas.

La metodología de análisis se realizó en base a redes sistémicas, (Bliss, Monk & Ogborn, 1983) las que permitieron organizar una gran cantidad de datos y facilitaron la construcción de categorías a partir del marco teórico y del análisis de las producciones escritas de los estudiantes. Estas mostraron una importante variedad de estrategias, de registros y de errores que obligó a reformular varias veces la clasificación original.

Resultó entonces relevante:

1.- definir claramente el significado que se daría en la investigación a: resolver una ecuación, solución de una ecuación, estrategia de resolución, explicación[1].

2.- delimitar como se categorizaron las respuestas a partir de estos registros escritos que constituyen la única evidencia de la estrategia de resolución puesta en juego por el estudiante.

En términos de lo propuesto por Lins (1994), este registro escrito constituye, en nuestra investigación, la justificación del alumno sobre su creencia-afirmación.

Para la operacionalización de las variables trabajamos con dos tipos de redes:

*<u>Red de explicaciones</u>- Se realizaron dos categorías: Sin dato y Con dato. Dentro de las últimas se discriminó en función de la solución (implícita o explícita) y en función de la posibilidad o no de inferir la estrategia utilizada en la resolución.

*<u>Red de estrategias</u>- En los casos en que la estrategia era inferible se categorizó la misma en función de su dependencia de la intervención desde la enseñanza en:

1.- Emergente- cuando el alumno la utiliza aún sin haber recibido instrucción específica

2.- No emergente- cuando su aparición en el repertorio de estrategias del alumno probablemente requeriría de una intervención explícita desde la enseñanza.

Dentro de las emergentes establecimos dos subcategorías:

[1] En Anexo se encuentran las definiciones adoptadas.

1.1.- Experimental- en aquellos casos que existe evidencia de que sustancialmente el alumno realiza pruebas, experimenta, para obtener la solución, lo que habitualmente se conoce como tanteo

1.2- Aritmética- en aquellos casos en los que en la resolución se evidencia que lo sustancial es el uso de conocimientos aritméticos relacionados con las operaciones involucradas en la ecuación

Dentro de las no emergentes consideramos las siguientes categorías:

2.1.- Traspone- cuando el alumno explicita la transformación de la ecuación en una equivalente haciendo uso de lo que comúnmente se conoce como "trasposición de términos" involucrando la operación inversa

2.2.- Balanza- cuando el alumno explicita de alguna forma que debe realizar la misma operación en los dos miembros de la ecuación en el proceso de resolución.

Finalmente, si bien no es el objetivo principal de esta investigación, interesó de todos modos saber si los alumnos cometen menos errores en 2014 que en 2013 al resolver las ecuaciones.

Conclusiones y recomendaciones. (Perez,T. Ravaioli,N., 2015)

En relación a los resultados, obtuvimos evidencia de que el reconocimiento, por parte del docente, de la validez de las estrategias aritméticas en el trabajo de aula, amplia la posibilidad de respuesta de los alumnos al resolver ecuaciones tanto en la variedad de estrategias puestas en juego como en el repertorio de ecuaciones a las que pueden dar respuesta, no limitándose únicamente a las lineales. Observamos también cambios en la forma de comunicar los resultados. Encontramos evidencias que nos hacen reflexionar sobre la necesidad de analizar con mayor profundidad el carácter de emergentes de algunas de las estrategias incluidas en esa categoría.

Los resultados ponen en evidencia algunos aspectos que consideramos pueden resultar de utilidad a los docentes de nuestro país.

En cuanto al trabajo con applets, se pudo constatar que su uso permitió a los estudiantes avanzar a su ritmo, en forma autónoma, trabajando colaborativamente, tanto en clase como en su casa, sin depender exclusivamente del docente para verificar el acierto o el error de sus procedimientos. También les dio la oportunidad de resolver un mayor número de ecuaciones de las que resolverían sin la mediación del applet.

En el caso de los applets orientados a la resolución de ecuaciones presentan además la ventaja de permitir una secuenciación de la resolución, a la vez que sugieren una forma de registro del razonamiento que hay detrás de la misma. Todo ello a partir de ejemplos visuales en los cuales está presente el fundamento conceptual que los sustenta.

En relación al tipo de ecuaciones, la experiencia indica, que la inclusión de ecuaciones de variados tipos y estructuras, no solamente lineales, generó la necesidad de poner en práctica variadas estrategias, favoreciendo la fluidez procedimental. De este modo, se consolida el concepto de ecuación a la vez que se fomenta la flexibilidad de elección de la estrategia más adecuada a cada caso.

No debemos temer al inicio temprano de este tipo de actividades, el trabajo realizado en la intervención en 1°año, nos permitió corroborar que no genera dificultades serias en la medida se realice a partir de los conocimientos aritméticos que los estudiantes disponen. Estas actividades se constituirían en verdaderas situaciones a-didácticas en el sentido de Brousseau (2007) en la medida que el estudiante se enfrenta a la tarea de resolver algo que desconoce, pero para lo cual dispone de herramientas, siendo la estrategia óptima el objetivo del aprendizaje. La búsqueda de estrategias artesanales de resolución es un ámbito fundamental para dar sentido tanto a la aritmética como al álgebra.

Creemos además que la concepción que tenemos arraigada respecto a la dificultad de una ecuación como relacionada con el tipo de ecuación (lineal, cuadrática, etc.), no es adecuada, ya que ésta parece tener mayor relación con la estructura y el conjunto numérico en el cual están definidas.

Si bien somos conscientes que hay ciertas estrategias que a la larga deben automatizarse, creemos que una temprana o “apresurada” automatización no es conveniente. Si los estudiantes no disponen del tiempo necesario para explorar y constatar por ellos mismos las ventajas y desventajas del uso de una u otra estrategia, tenderán a automatizar la que creen “es más fácil” o “les permita resolver más casos” olvidando prontamente su sustento conceptual y retaceando el desarrollo de su fluidez procedimental.

Por otra parte si una vez conseguido que los estudiantes resuelvan con soltura ecuaciones, dejamos por completo de interrogarlos acerca del por qué o de proponerles actividades que los desafíen en relación a la aplicación automática, estaremos favoreciendo aun sin quererlo el manejo mecánico de la resolución.
Otro elemento que creemos apoya y fortalece el conocimiento de lo que se denominan restricciones de equivalencia, es la consideración, en esta primer aproximación al tema, del involucramiento de la verificación como parte de la resolución de una ecuación. Esto lleva a que los estudiantes sean conscientes de que un valor que es solución de la ecuación "da origen a valores equivalentes para las dos expresiones en cualquiera de las ecuaciones de la cadena que resuelve la ecuación" (Kieran& Filloy,1989, p.233)

Grenno citado por Kieran & Filloy (1989) afirma que las dificultades de los estudiantes (aun los expertos) en la resolución de ecuaciones se da en relación al desconocimiento de las restricciones de equivalencia que determinan si una transformación está o no permitida. Sin embargo, de lo analizado parece surgir que las mayores dificultades que se presentaron con las diversas estrategias no devienen de este hecho, sino de la necesidad de fluidez operatoria que siempre los estudiantes tienen. Nos parece importante rescatar entonces la posibilidad que da el trabajo con estrategias variadas de resolución de ecuaciones para reflexionar sobre la operatoria, hacer visible lo automatizado y reestructurar la técnica.

Referencias bibliográficas

Amerom, B.A. van (2002). *Reinvention of early algebra. Developmental research on the transition from arithmetic to algebra*.(Thesis, Utrecht University). ISBN 90-73346-48-7.

Bliss, J., Monk, M. & Ogborn, J. (1983). *Qualitative Data Analysis for Educational Research.* London: Croom Helm. (Consultado en: Calvo Pesce, C. (1997).
Bases para una propuesta didáctica sobre Integrales. (Tesis de Maestría, Universitat Autónoma de Barcelona)).

Brousseau, G.(2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Buenos Aires: Libros del zorzal.

Filloy, E. & Rojano, T. (1989). *Solving equations: The transition from arithmetic to algebra*, en The Learning of Mathematics, 9, (2), 19-25.

Kaput, J. (1996). *¿Una línea de investigación que sustente la reforma del álgebra?* Revista UNO, Parte I: 9, 85-97.Parte II: 10, 89-103. Barcelona: Graó.

Kieran, C. & Filloy, E. (1989). *El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica.* Enseñanza de las ciencias, 7, (3), 229-240.

Kieran, C. (1992). *The Learning and Teaching of School Algebra*, en D.A. Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning. New York: Macmillan, pp. 390-419. (Consultado en: Mesa, V. (1995) *Investigar y Enseñar*. Una empresa docente. Capítulo 17. Universidad de los Andes)

Kieran, C. (2013). *The false dichotomy in mathematics education between conceptual understanding and procedural skills: an example from algebra.* en Leatham, K. (Ed.), Vital directions in mathematics education research (pp. 153-171). New York: Springer.

Lins, R. C. (1994). *Campos semánticos y el problema del significado en álgebra.* Revista UNO, 1, 45 – 56. Barcelona: Graó.

Perez,T. y Ravaioli,N. (2015). *Las estrategias aritméticas como recurso en el primer acercamiento a la resolución de ecuaciones: La transición de la aritmética al álgebra.* (Tesis de maestría, UCU, Uruguay)

ANEXO

Definiciones utilizadas.

<u>Resolver una ecuación</u>

Determinar el o los valores de la incógnita que transformen la ecuación en una identidad numérica.

Somos conscientes de que esta forma de definición no implica la existencia de una estrategia formal y algebraica de determinación de la incógnita, lo que permite una variación muy amplia de posibilidades y modos de resolución.

La constatación de que ese valor, sustituido en la ecuación debe transformarla en una identidad numérica, implicaría de alguna forma la necesidad de la verificación. Al explicitar “él o los valores” dejamos abierta la posibilidad de que en ecuaciones cuadráticas los estudiantes den como solución un solo valor y no dos.

<u>Solución de una ecuación</u>

Llamaremos solución de una ecuación a cada uno de los valores que se determinan en la resolución y conjunto solución al conjunto de todas las soluciones.

Somos conscientes de que en este aspecto hay diversas posiciones pero a los efectos de este trabajo creemos que es la más adecuada.

<u>Estrategia de resolución</u>

Procedimiento seguido por el estudiante para encontrar alguna solución de la ecuación.

Explicación

Es el registro escrito del trabajo del alumno que puede permitir o no inferir la estrategia utilizada en la resolución de la ecuación.

Todas las ecuaciones propuestas se enmarcan en lo que en la literatura (Kieran, 1992, Amerom, 2002, Kieran & Filloy, 1989, Filloy & Riojano, 1989) caracterizan como resolubles por métodos aritméticos ya que en su estructura la incógnita aparece una sola vez. Sin embargo adoptaremos el punto de vista de Amerom (2002), respecto a que lo que convierte a una tarea en algebraica o aritmética no es la tarea en sí, sino la naturaleza del método de resolución.

Como la inferencia surge únicamente a partir del registro gráfico de lo realizado por el alumno, lo que obtenemos es una justificación parcial y no podemos discriminar con certeza todos los tipos de razonamientos que puede haber detrás de ese registro.