

LA CONCEPTUALIZACIÓN DE LA NOCIÓN DE FUNCIÓN EN ESTUDIANTES DE CICLO BÁSICO

Alejandra Pollio

apole3@gmail.com

Universidad Católica del Uruguay - Uruguay

Tema: Investigación en Didáctica

Modalidad: Conferencia Regular

Nivel educativo: Medio

Palabras clave: Conceptualización, comprensión, función

Resumen

La noción de función es un objeto complejo del saber matemático cuya conceptualización no resulta una cuestión sencilla ni evidente para los estudiantes.

Ruiz Higuera (1998) hace referencia al concepto de función, como un objeto muy elaborado como consecuencia de numerosas generalizaciones realizadas a través de una evolución de más de 2000 años.

“La apropiación de la noción de función está lejos de resultar del aprendizaje de la definición y de las nociones asociadas al concepto”. (Guzman, 1990, p.5) Esto supone el dominio de las distintas representaciones semióticas

Sierpinski (1992) destaca que comprender un concepto significa ser capaz de contestarse las preguntas: ¿Qué dice la definición de función? ¿De qué trata esa definición?

Esta conferencia se propone mostrar qué es lo que un grupo de alumnos al comenzar el Primer año de Bachillerato han logrado conceptualizar del concepto de función

Para ello se mostrará un análisis de un cuestionario propuesto a los alumnos el cual permitió detectar cuáles son las definiciones personales de los estudiantes y evidenciar, en sus producciones, los registros de representación priorizados por ellos.

Los análisis y las interpretaciones conducen a sospechar que la conceptualización del concepto de función está en una etapa preliminar

La conceptualización de una noción matemática no se produce en forma inmediata. Si se concibe la matemática como una construcción social compartida creada por personas que ven oportunidades de hacer matemática, tal como lo plantea Ian Stewart (2006) y que un objeto matemático va emergiendo y evolucionando del conjunto de problemas y en la búsqueda de sus soluciones, se puede decir que la definición de un concepto no resulta fácil.

En el desarrollo de la construcción de una noción, ésta se presenta en diferentes registros semióticos e intervienen un conjunto de nociones auxiliares que la dotan de significado y sin las cuales la noción *no vive*.

La noción de función es un objeto complejo del saber matemático cuya conceptualización no resulta una cuestión sencilla ni evidente para los estudiantes.

Ruiz Higuera (1998) hace referencia al concepto de función, como un objeto muy elaborado como consecuencia de numerosas generalizaciones realizadas a través de una evolución de más de 2000 años.

Sierpinska (1992) destaca que comprender un concepto significa ser capaz de contestarse las preguntas: ¿Qué dice la definición de función? ¿De qué trata esa definición?

Se propone mostrar qué es lo que un grupo de alumnos al comenzar el Primer año de Bachillerato han logrado conceptualizar del concepto de función

Para ello se mostrará el análisis de alguna de las actividades del cuestionario propuesto a los alumnos el cual permitió detectar cuáles son las definiciones personales de los estudiantes y evidenciar, en sus producciones, los registros representación priorizados por ellos.

Una tarea nada fácil e importante es distinguir entre el concepto y su proceso de construcción. D'Amore (2005) plantea que la parte más rica del significado del concepto se encuentra entre el concepto que se halla continuamente en fase de construcción y en esta construcción. A esta construcción el autor la llama "*conceptualización*".

Según Vergnaud (citado por D'Amore, 2005) el punto decisivo en la conceptualización es el pasaje de los *conceptos como instrumento* a los *conceptos como objetos* y una operación lingüística esencial en esta transformación es la *nominalización*. A esta apropiación consciente, el autor la entiende por "*conceptualización*"

Se podría concluir entonces que el apropiarse de un concepto (independientemente de lo que eso signifique) siempre requiere algo más que *nombrarlo*. Todo concepto matemático remite a "no-objetos"; por lo que la conceptualización no es y no se puede basar sobre significados que se apoyen en la realidad concreta; en otras palabras en matemática no son posibles reenvíos ostensivos.

Por otra parte la Didáctica de las Matemáticas estudia los fenómenos didácticos, éstos son los que se producen en situaciones de aprendizaje o enseñanza e involucran al saber escolar, al profesor en su gestión de una propuesta de enseñanza, al alumno en situación

de aprendizaje, a la interacción entre los actores en el aula .Al considerar la problemática del aprendizaje de la matemática en término de proceso cognitivos además de la adquisición de las competencias y habilidades, este estudio se centra en los procesos de representar y conceptualizar. Ambos procesos son los que se debiera trabajar para que los estudiantes de ciclo básico logren apropiarse de los conceptos matemáticos.

Sierpiska (1990) relaciona el significado de un concepto a la comprensión: "Comprender el concepto será entonces concebido como el acto de captar su significado. Estos significados particulares tienen que ser captados en actos de comprensión" (p. 27).

Esta autora entiende que comprender es una experiencia mental y sugiere que se ha comprendido un concepto si se pueden identificar ciertas características del concepto. Los conceptos no pueden considerarse aisladamente del conjunto de todos conceptos asociados que lo dotan de significado y constituyen su entorno natural. Por lo que se entiende que un concepto no se puede comprender si no se comprenden y conocen los conceptos de su entorno. Se puede decir que se ha comprendido un concepto si se han visto ejemplos y contra- ejemplos del objeto definido, si se puede decir lo que es y lo que no es, si se ha captado la posición que el objeto tiene en el interior de una teoría y cuáles son sus posibles aplicaciones.

Finalmente, Sierpiska (1990) concibe la comprensión de un concepto como verdaderas y posibles experiencias mentales a las que ella llama actos de comprensión. Para que estos actos de comprensión puedan emerger es necesario que se lleven a cabo tres operaciones mentales: identificación, discriminación y síntesis.

La identificación del concepto de función tiene que ver con los cambios observados en el mundo que nos rodea y los objetos que cambian; las relaciones entre ellos y sus regularidades y en el estudio de los mismos. Estos cambios implican ver a la matemática involucrada en problemas prácticos lo que puede presentarse como una dificultad. La organización y relevamiento de los cambios se pueden llevar a cabo a partir técnicas computacionales para la elaboración de tablas. Esto también podría convertirse en una dificultad ya que las tablas pueden no ser consideradas como

objetos dignos de estudio en matemática, a pesar de ser reconocidas como uno de los caminos más antiguos para representar una relación.

En cuanto al concepto de función, la discriminación tiene que ver con dos modos de pensamiento: uno que tiene que ver con las cantidades conocidas y desconocidas y el otro que tiene ver con las variables. El obstáculo al cual se enfrentan los estudiantes es que están más acostumbrados a pensar en términos de incógnitas y ecuaciones, lo que les hace difícil pensar en términos de variables. La discriminación entre las variables dependiente e independiente resulta indispensable.

También hay que discriminar entre la función y las herramientas analíticas que se usan para describirlas. La dificultad que se puede presentar es una fuerte creencia en que sólo las relaciones descritas por fórmulas analíticas sean dignas de ser llamadas funciones.

Sierpinski plantea como una dificultad que el gráfico de una función pues puede ser visualizado como un modelo geométrico de una relación funcional. Es importante, destacar que los puntos del gráfico de una función abarcan las nociones de preimagen, imagen y una posible ley de asignación. Esto lleva a que se debe discriminar entre las diferentes representaciones de la función, del significado de cada una de ellas y la propia función.

La síntesis implica tomar todas las ideas del entorno al concepto de función para luego organizarlas en un todo coherente.

Otro elemento a tener en cuenta en la enseñanza y aprendizaje de un concepto es *la imagen conceptual* que cada alumno ha elaborado en su mente, en una situación determinada, en un momento determinado.

Tall y Vinner (1981) usan el término *imagen conceptual* para describir la estructura cognitiva de un individuo, que se asocia con el concepto, que incluye todas las imágenes mentales (cualquier clase de representación: forma simbólica, diagrama, gráfica, etc) y las propiedades y los procesos que le caracterizan. La imagen conceptual es algo no verbal que está en la mente de un individuo asociado al nombre del concepto. En el caso de los estudiantes, la imagen conceptual es el resultado de su experiencia frente a ejemplos y contraejemplos del concepto. Es decir, ponen en juego el acto de discriminación. Esto implica que en la mente del estudiante existen un

conjunto de imágenes mentales asociadas al nombre del concepto, y que este conjunto de imágenes mentales no tiene por qué coincidir con las nociones matemáticas que determinan la definición del concepto y con la propia definición del concepto.

En el caso del concepto de función Tall y Dreyfus (1989) muestran en su estudio que algunos aspectos que son importantes para identificar una función pueden transformarse en un obstáculo por no tenerlos incorporados en su imagen conceptual. Entre los que ellos mencionan están que dos elementos del dominio tienen la misma imagen, funciones definidas por intervalos, puntos de la función que no se hallan con una regla. Estos aspectos, además de las nociones de dominio, conjunto de llegada, variables, variable independiente, unicidad de la imagen son todas nociones que a la hora de apropiarse de la noción de función puede resultar un obstáculo.

Por lo que se puede ver que el concepto de función es un objeto complejo del saber matemático cuya aprehensión conceptual no resulta una cuestión sencilla ni evidente para estudiantes. Es por esto que para que los estudiantes se apropien de dicho concepto se requiere, además de los procesos de los actos de comprensión y la formación de la imagen conceptual, el conocimiento y la utilización de los diferentes registros de representación, entre ellos: gráfico, algebraico, tabular, lenguaje verbal.

Raymond Duval (1995), quién ha llevado adelante un enfoque cognitivo, manifiesta que los objetos matemáticos no son directamente accesibles por la percepción, sino por sus representaciones semióticas. Además, la distinción entre un objeto matemático y su representación es un punto estratégico para la comprensión en matemática y puede garantizar la aprehensión conceptual del objeto matemático en cuestión. La noción de representación semiótica presupone, pues, la consideración de sistemas semióticos diferentes y una operación cognitiva de conversión de las representaciones de un sistema semiótico a otro. También las representaciones semióticas cumplen la función de comunicación, así como también cumplen las funciones tan primordiales de transformación de la información y de objetivación o toma de conciencia.

La apropiación del concepto de función exige que la articulación entre los registros gráfico, algebraico y tabular estén previamente bien asegurados. Se puede conjeturar que una mejora importante en las performances en los

diferentes pasajes entre registros se acompañaría de un éxito casi total en las tareas que se sitúan al interior de un mismo registros (Guzman, 1990, p.169)

Presentación del cuestionario El cuestionario consta de 6 actividades y cuyos objetivos son:

- Detectar los conceptos en torno a la noción de función que los alumnos al comenzar Primer año Bachillerato se han apropiado: Dominio, Recorrido, imagen, preimagen, correspondencia/relación, variable independiente, variable dependiente, unicidad de la imagen.
- Analizar la manera en que los estudiantes utilizan tratamiento y la conversión de Registros de Representación en la resolución de las tareas asociadas al concepto de función.
- Explorar si los alumnos identifican cuando una correspondencia no es una función.
- Explorar las dificultades que presentan los conceptos en torno a la noción de función a partir de las argumentaciones de los alumnos.
- Analizar la interacción entre la *definición personal* y la *imagen conceptual*

Algunos resultados de las actividades En las actividades 1 y 2 las representaciones gráficas y algebraicas son las más asociadas por los alumnos a la hora de evocar el concepto de función. Hay algunos alumnos que han ido construyendo el concepto en forma más consolidada que otros. La mención de las nociones de dependiente e independiente, dominio y condominio estarían mostrando un buen camino a la conceptualización del concepto de función.

De los 36 alumnos que dieron definiciones incompletas o equivocadas hay 22 en los que hay una coherencia entre por lo menos una de las palabras y a la definición.

Esto conduce a deducir que hay una cierta coherencia entre las imágenes conceptuales y las definiciones personales de los alumnos, aunque éstas no sean correctas.

Una primera conclusión de la actividad 5 es que el concepto de función está asociado a la representación gráfica como una curva. Este tipo de acción es uno de los planteos que hace Sierpinska (1992) sobre la función “como un curva” que puede constituir un obstáculo para la comprensión del concepto. Esta concepción no ve al concepto como relacionado con otras nociones que lo dotan de significado como ser la dependencia entre variables, la unicidad de la imagen, los conjuntos dominio y de llegada.

En esta actividad se evidencia la dificultad del trabajo en el registro tabular, según Guzmán se requiere relevar los elementos relativos a cada uno de los registros, que están relacionados con los aspectos conceptuales expresados por la relación. También, Sierpinska plantea que existe dificultad en interpretar las tablas de valores cuando se quiere trabajar el concepto de función, que es lo que en esta actividad se puede evidenciar. Esta autora plantea que esta habilidad se logra trabajando justamente la interpretación de tablas y de gráficas cuando se va encaminado a la definición del concepto de función.

Una primera conclusión general es la evidencia que el proceso de construcción de la definición de función, en este grupo de estudiantes en su mayoría, está en una etapa preliminar.

Las definiciones personales de los estudiantes son algo así como conclusiones personales, de acuerdo a lo que manifiestan Vinner y Dreyfus (1989).

Estas definiciones muestran un marcado énfasis en lo operacional y gráfico, que se detecta al utilizar términos en los registros numérico, gráfico y algebraico y las palabras gráfica, ecuación, incógnita.

La mayoría de la definiciones personales evidencian conocer algunas nociones que permiten definir el concepto pero luego lo que escriben no muestran ningún proceso de construcción. Esto hace pensar que evocan algunas nociones vinculadas al concepto de función simplemente porque lo recuerdan pero sin ningún significado para ellos. Como por ejemplo en el caso que evocan la función como una gráfica sucede que cuando se les presenta la gráfica no la pueden interpretar.

La unicidad de la imagen y la idea de variación prácticamente no se destacan en las definiciones. Con respecto a la idea de variación, tal como lo plantea Sierpinska (1992), los estudiantes piensan más en términos de incógnitas que de variables lo que puede constituir un obstáculo para la comprensión del concepto. Estas ausencias permitirían concluir que el significado del concepto de función quede un poco débil.

Con respecto a la imagen conceptual y la definición personal se destaca una cierta coherencia entre ellas, aunque están bastante alejadas de la definición formal.

Los registros gráfico y algebraico son los priorizados en sus definiciones, lo que no llama la atención pues estos mismos registros son los priorizados en los textos y en los programas.

En suma la conceptualización de la noción de función en este grupo de estudiantes se encuentra una etapa preliminar, un tanto estancada.

Las nociones que dan *vida* al concepto son para ellos ideas aisladas lo que confirma en planteo de Sierpinska que la síntesis del concepto de función no resulta fácil.

Bibliografía

- Azcárate, C., & Camacho, M. (2003). Sobre la investigación en Didáctica del Análisis Matemático. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, X(2), 135-147
- Brousseau G., (1994): “Los diferentes roles del maestro” en *Didáctica de Matemáticas. Aportes y reflexiones*, C. Parra; I. Saiz (comp.) Buenos Aires: Paidós Educador.
- Chevallar, Y., Bosh, M., & Gascón, J. (1997). *Estudiar Matemática. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. Barcelona: Horsori.
- D’Amore, B. (2005). *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la Didáctica de la Matemática*. Barcelona: Reverté
- Dreyfus, T ; Vinner, S, (1989). Images and definitions for the concept of function, *Journal for research in Mathematics education*, Vol20, N°4, 356 -366
- Duval, R. (1995). “*Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*”. Suisse: Peter Lang.
- Godino, J. (2002). Competencia y comprensión matemática: qué son y cómo se consiguen? *Uno, Revista de Didáctica de las Matemáticas* (29), 9-19.
- Guzmán R, I (1990). “Le rôle des représentations dans l’appropriation de la notion de fonction”. Tesis de Doctorado. Universidad Louis Pasteur. Francia
- Ruiz Higuera, Luisa (1994). *La Noción de función: análisis epistemológico y didáctico*. Universidad de Jaen. Servicio De Publicaciones e Intercambio Científico.
- Sierpinska, A (1992). On understanding the notion of function. En E. Dubinsky y G. Harel(Eds) *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (Mathematical Association of America Notes Vol.25, p. 25- 58.

Vinner, S; Dreyfus, T.(1989).Images and definitions for the concept of function. Journal for Research in Mathematics Education.Vol.20.Nº4, p356-366.

Vinner, S(2002) .The Role of Definitions in teaching and learning. *Advanced Mathematical Thinking*. 65-81. Netherlands: Kluwer Academic Publishers

Anexo

A continuación se presentan tres de las 6 actividades propuestas en el cuestionario

Actividad 1

Si en la clase de matemática te hablan de función, con qué dos palabras asociarías este concepto

Esta actividad pretende hacer ver con qué imagen conceptual identifican los estudiantes el concepto cuyo nombre es “función”.

Actividad 2

Escribe con tus palabras lo que es para ti una función matemática

En esta actividad deben expresar con sus palabras cual es el significado para ellos de la noción de función. No se espera que los alumnos presenten definiciones muy acabadas ni rigurosas pero que si nombren algunos de los conceptos secundarios de la noción, como ser dominio, imagen, preimagen, relación o correspondencia, conjunto de partida, conjunto de llegada, variable.

Actividad 5

La tabla siguiente representa la relación entre dos variables P y M ; en la que M depende de P . La variable P toma únicamente los valores que aparecen en la tabla

P	-3	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	2	3
M	1	-2	3.5	4	-4	1	0

- Graficar la relación.*
- La relación entre P y M ¿Puede ser una función? Explica.*

Esta actividad está formulada en el registro tabular pero también hay información importante dada en el registro verbal. El objetivo es identificar una función a partir de una tabla de valores, como una posible representación de la función pero identificando

las variables independientes y dependientes, conjunto de partida y de llegada. Otro objetivo es la conversión del registro tabular y registro verbal al registro gráfico