GRUPOS ORNAMENTALES: LA GEOMETRÍA Y EL ÁLGEBRA SUBYACENTES EN FRIZOS, MOSAICOS Y ROSETONES

Ramón Sellanes– Ana Laura Nuin
proferamon1@gmail.com – analauranuin@gmail.com
Facultad de Arquitectura Diseño y Urbanismo de la Universidad de la República
Uruguay

Tema: Formción de profesores y maestros

Modalidad: Mini curso
Niveleducativo:Terciario
Palabras clave: Matemática y Arte, Geometría en el plano, Estructuras Algebraicas

Resumen

El objetivo de este curso es poner de relieve la matemática presente en figuras que se caracterizan por ser simétricas y que han formado parte importante de los diseños artísticos de diversas culturas a lo largo de la historia; tal es el caso de los frisos, mosaicos y rosetones.
En este curso realizaremos una somera revisión de las simetrías de algunas figuras geométricas, estudiaremos algunos Subgrupos del Grupo de Isometrías del Plano relacionados con las mismas y presentaremos el uso del programa GeCla para la clasificación y diseño de frisos, mosaicos y rosetones; el cual consideramos de interés para las actividades de aula con estudiantes de Educación Primaria y Secundaria.
Al finalizar este curso se espera que los participantes cuenten con nuevos elementos para apreciar los vínculos entre la matemática y el arte, las relaciones entre la geometría y el álgebra y algunas aplicaciones didácticas de la temática desarrollada.

INTRODUCCIÓN

El desarrollo del pensamiento humano a lo largo de la historia y más recientemente: el desarrollo de las disciplinas en las que parcelamos sus creaciones, nos han llevado a concebir a la matemática y al arte como formas expresión de naturaleza muydiferenteyquizás antagónicas, en cuánto a sus métodos; pero si nos detenemos a observar cómo trabajan artistas y matemáticos podemos encontrarnos con más similitudes que diferencias. Creemos que las coincidencias pueden serobservadas no solo en la actividad de los centros de producción científica o en los talleres de los grandes artistas sino también en la actividad de un niño o de un joven que se enfrenta a un desafío que lo motiva a crear: ciencia o arte...o ambas...

La Geometría es la rama de la matemática que generalmente hallamos más vinculada con el arte. Los patrones que reconocemos en los mosaicos, frisos y rosetones realizados por diversas culturas en diferentes épocas y lugares son un claro ejemplo de armonía, belleza, destrezas manuales, técnicas y conocimiento matemático. Sus creadores en su tiempo quizás no recibieron denominaciones tales como: "artista", "geómetra", "especialista en cálculo" o "tallador de piedras"...quién sabe...la creación y transmisión por vía de la tradición tal vez no fueron contrapuestas entonces; sino que se complementaron, retroalimentando y enriqueciendo el proceso creativo.

Consideramos que evidenciar la matemática presente en el arte y el arte en la matemática, es una tarea a ser desarrollada en el ámbito educativo en todos sus niveles. En ese sentido nuestra propuesta, que ha sido pensada para participantes de nivel terciario, puede ser trabajada con estudiantes de todas las edades; quiénes partiendo de una apreciación estética y de un acercamiento intuitivo en la búsqueda y descubrimiento de regularidades, construyan conceptos tales como el de Isometría o el de Grupo. Aquellos que conocen los mencionados conceptos, se adentrarán con más profundidad en el estudio de las estructuras algebraicas asociadas a las figuras geométricas que se caracterizan por ser simétricas.

Simetría y Figuras Simétricas

En un sentido general, la simetría puede definirse como:*"la armonía resultante de ciertas posiciones de los elementos que constituyen un conjunto,esdecir,significa bien proporcionado, con equilibrio de formas..."* (Weyl, 1951). Vemos entonces que se asocia simetría a armonía y belleza estética; por otra parte otros autores la vinculan con el arte:*"el arte, en sus variadas manifestaciones, hace uso de la simetría con el fin de lograr belleza, equilibrio y la armonía de los elementos que utiliza"* (MJOCH, 2000).

En un sentido matemático, la noción de simetría es un concepto preciso que viene dado por medio de una aplicación entre elementos de conjuntos:

Dado un cuerpo, una figura en el plano o en el espacio, es simétrica con respecto a un punto, a una recta o a un plano dado si se transforma en sí misma al reflejarse con respecto a dicho punto, recta o plano. Este "reflejarse" puede darse a través de ciertos movimientos rígidos o Isometrías que al ser aplicados a esta figura la dejan invariante.

Las Isometrías del Plano son aquellas transformaciones que conservan distancias y en consecuencia que no cambian la forma ni las dimensiones de las figuras; éstas son: las Simetrías (Reflexiones), las Rotaciones, las Traslaciones, la Reflexión con deslizamiento (Antitraslación) y la Identidad.

Al estudiar qué Isometrías dejan invariante a una figura en el plano, nos aproximaremos a las estructuras algebraicas propias del *Grupo de las Isometrías del Plano*. Analizaremos aquellos Subgrupos característicos de las figuras que permanecen invariantes a través de determinadas Reflexiones, Rotaciones o combinaciones de ellas. A estas transformaciones les llamaremos **Simetrías** de la figura en cuestión.

Grupos Cíclicos, Grupos de Leonardo y Grupos Diedrales.

Existe una amplia clasificación en cuanto a las Simetrías de las figuras planas, pero dado que el objetivo principal de este curso es el estudio de algunas de estas Simetrías presentes en Frisos, Mosaicos y Rosetones, nos centraremos en algunas de ellas:

La Simetría Cíclica es aquella en la cuál las figuras tienen un Centro de Simetría; la estructura algebraica asociada a estas transformaciones, que se generan por medio de rotaciones de ángulo $2\pi/n$ o $360°/n$, son los llamados Grupos Cíclicos que forman parte de los llamados Grupos de Leonardo.

La Simetría Diedral, es aquella en que la cual las figuras permanecen invariantes en una transformación resultante de la composición de una Rotación y una Reflexión. La estructura algebraica asociada a estas transformaciones se denomina Grupos Diedrales. (Para todas las Isometrías que pertenecen a los mencionados grupos, se prueba que tienen un punto fijo O y seque tal grupo solo puede tener rotaciones de centro en el punto O y reflexiones respecto de ejes que pasan por O, es decir, no presentan traslaciones, como veremos más adelante).

Existen otros Grupos de Simetríasdel plano: los Grupos Cristalográficos asociados a distintos recubrimientos del plano con figuras tales como los mosaicos, rompecabezas y teselaciones. En estos grupos hay traslaciones en dos direcciones: *"Se trata de ornamentar, decorar, un plano bajo ciertas condiciones: a partir de una figura o* *motivo generador y mediante periodicidad y acoplamiento recubrir el plano".* (Mjoch, 2000).

Frisos, Mosaicos y Rosetones

Friso: es un elemento arquitectónico del entablamiento, comprendido entre el arquitrabe y la cornisa, que suele estar cubierta de decoración escultórica. En el lenguaje cotidiano, se llama friso a toda composición pintada o esculpida cuya dimensión horizontal sea considerablemente superior a la vertical. El grupo de simetrías del friso consta de aquellas simetrías del plano que dejan fija una recta y que contiene traslaciones sólo en esa dirección.

Mosaicos: nos referimos a un recubrimiento del plano con figuras que no dejen espacios vacíos y que a la vez no se superpongan entre ellas. Los regulares están formados por polígonos regulares del mismo tamaño (triángulos, cuadriláteros y hexágonos) y los semirregulares formados por dos o más polígonos regulares de dimensiones adecuadas para que se acoplen.

Rosetones: Un rosetón es un adorno circular, (que puede observarse con frecuencia en las luminarias de los templos), construido a partir de un motivo que se repite por aplicación de una Rotación con centro en el centro de la figura.El motivo básico que se utiliza para la creación de un rosetón se denomína***pétalo***, éstos pueden ser o no simétricos. Un rosetón es ***diédrico*** si sus pétalos son simétricos y ***cíclico*** si no lo son. El número de pétalos del rosetón determina su orden. En un rosetón de orden n, secumple la siguiente propiedad: permanece fijo al aplicársele una Rotación cuyo ángulo de giro es de amplitud 2π/n con centro en el centro del rosetón. (Un giro con mismo cento y cuya amplitud sea nun múltiplo de la medida del ángulo anteriormente mencionado también dejará invariante a la figura).

Además de los frisos, mosaicos y rosetones que estudiaremos en este trabajo, existen otras conformaciones de interés matemático y artístico denominadas Mosaicos de Penrose que han surgido en la búsqueda de formas de teselar un plano, es decir, al experimentar con las diferentes maneras de cubrirlo.

Para teselar un plano con mosaicos no solo se utilizan polígonos regulares, ya que estos son módulos básicos que se pueden deformar y ser sometidos a un conjunto de transformaciones, resultando un modelo generador con figuras alusivas. Las teselaciones pueden a su vez ser periódicas, en esos casos se limita la región mediante dos traslaciones independientes sin necesidad de rotaciones y reflexiones, o no periódicas, (mosaicos de Penrose), en los cuáles las figuras que cubren el plano ya no son sólo polígonos regulares sino figuras mucho más complejas. Tras todas estas generalidades, lo que buscamos es interrelacionar dichas simetrías, presentes en representaciones artísticas de La Alhambra en Granada, como muestran las siguintes imágenes, estudiando las estructuras algebraicas asociadas a las mismas.

Grupos

Definición:Dado un conjunto G y una operación interna(*) definida en G, al par$(G,*)$, le llamamos ***Grupo*** o simplemente a G si la operación interna es sobreentendida, si se cumplen las siguientes propiedades:

- **Asociativa**$a * (b * c) = (a * b) * c$para todo $a, b, c \in G$.
- **Neutro** $e \in G$, tal que $e * a = a * e = a$ para todo $a \in G$.
- **Opuesto** Para todo $a \in G$existe un elemento $a' \in G$tal que:

$$a' * a = a * a' = e$$

Ejemplos:

El conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$ con la operación interna de suma + es un grupo, que llamaremos aditivo.

El conjunto de todas las isometrías con la operación interna $\circ$ de composición es un grupo.

Definición: Si $(G,*)$ es un grupo, dado un elemento $\sigma \in G$se define sus potencias enteras σ^k con $k \in \mathbb{Z}$ mediante las igualdades siguientes:

- Si $k = 0$ se define $\sigma^k = e$ siendo e el elemento neutro del grupo.
- Si $k \geq 1$ se define:

$$\begin{aligned}
&\sigma^1 = \sigma \\
&\sigma^2 = \sigma * \sigma \\
&\sigma^3 = \sigma^2 * \sigma \\
&\vdots \\
&\sigma^{k+1} = \sigma^k * \sigma
\end{aligned}$$

- Si $-k < 0$, como $k > 0$, se define:

$$\sigma^{-k} = (\sigma^k)^{-1}$$

Definición: Si G es un grupo, su orden es el cardinal del conjunto G y lo denotamos $|G|$. Un grupo finito es un grupo G cuyo orden es finito, $\lceil G \rceil \in \mathbb{N}$. Un grupo infinito es un grupo que no es finito.

Definición: SiG es un grupo y $\sigma \in G$es cualquier elemento, diremos que σ tiene orden infinito si para cualquier entero $k \geq 1$ se tiene que $\sigma^k \neq e$. Es decir que ninguna potencia con k positiva se muere. Si existe algún $k \geq 1$ tal que $\sigma^k = e$ al menor de esto enteros positivos se le llama orden de σ.

Por ejemplo el orden de e es 1; y e es el único elemento del grupo con orden 1 en G, Si $\sigma \neq e$, el orden de σ es k si $\sigma^k = e$ y $\sigma^i \neq e$ para todo $1 \leq i < k$.

Observación: Si G es un grupo finito, de orden n, entonces cualquier elemento $a \in G$ tiene orden menor o igual a n.

Demostración

Supongamos por lo contrario, por ejemplo si $a \in G$ tiene orden $k > n$, entonces en G estarían los elementos $a^1, a^2, a^3, \cdots a^k$, todos distintos ya que si existieran je $i$con$j \neq i$tales que $a^i = a^j$ podemos suponer sin pérdida de generalidad que $j > i$ entonces:

$$e = a^i * a^{-i} = a^j * a^i = a^{j-i}$$

con $j - i < k$ lo que es absurdo por la definición de orden.

Simetrías de una figura

Definición: Dada una figura plana F denotamos como S_F al conjunto de todas las isometrías que preservan la figura$F$, es decir:

$$S_F = \{M \in \mathcal{M}: \mathrm{M(F)} = \mathrm{F}\}$$

A S_F es lo que llamaremos*conjunto de simetrías* de una figura F.
Nos preguntamos si el conjunto de simetrías del triángulo forma un Grupo con la composición.

Simetrías del triángulo

Para responder a dicha interrogante, podemos realizar un estudio exhaustivo, mediante tablas en las que iremos completando todas y cada una de las composiciones; luego, analizar, en base a los resultados obtenidos, si el conjunto de las simetrías con la composición cumple con las propiedades que enunciamos anteriormente al definir Grupo. Dejamos esta tarea al lector...

Efectivamente el conjunto de simetrías del triángulo con la composición forman grupo. Y llamaremos a este grupo, ***grupo diedral de orden 3*** que denotamos por$\boldsymbol{D_3}$. Estudiaremos ahora las simetrías del cuadrado.

Simetrías de cuadrado

Se puede comprobar, análogamente, que el conjunto de las simetrías del cuadrado con la composición es un grupo que llamaremos ***diedral de orden 4*** y denotamos $\boldsymbol{D_4}$. Estudiaremos seguidamente el caso del rectángulo.

Simetrías del rectángulo

Realizando la tabla se verifica fácilmente que el conjunto de las simetrías del rectángulo con la composición son un grupo denominado***Grupo de Klein***,(en honor a Felix Klein), que se trata de un grupo diedral de orden 2.

Avanzaremos ahora en nuestro estudio de las estructuras algebraicas asociadas a las figuras geométricas que se caracterizan por ser simétricas introducioendo un nuevo concepto:

Subgrupo

Dado un grupo $(G,*)$ sea $H \neq \phi$ un subconjunto de G, se dice que H es un subgrupo de G si se cumplen las condiciones siguientes:

- Para todo $x, y \in H$, se tiene que $x * y \in H$.
- El elemento neutro de la operación interna * pertenece a H.
- Para todo $x \in H$ se tiene que $-x$(o x^{-1}) pertenece a H.

Ejemplos:

Dado un grupo $(G,*)$ tenemos los subgrupos llamados triviales:

- Si H tiene un único elemento que es el neutro.
- Otro subgrupo trivial es el propio G.

A los subgrupos distintos de los anteriores les llamaremos ***subgrupos propios***.

Otros ejemplos de subgrupos:

En las simetrías del triángulo, si consideramos el subconjunto formado por la identidad más las rotaciones de horarias de 120° y de 240° se tiene que es un subgrupo ya que:

1) Contiene la Identidad.

2) La composición de dos de ellos da uno de ellos. La composición de dos rotaciones de igual centro siempre es una rotación de igual centro, y como los ángulos se suman, las sumas posibles son 120° +240°=360°; 120°+120°=240°; 240°+240°=120°.

3) La rotación de 120° tiene como inversa la de 240°.

En las simetrías del cuadrado el conjunto formado por todas las rotaciones también es un subgrupo.

Grupo de Leonardo

Definición: Al grupo de simetrías de una figura$F$se llama ***Grupo de Leonardo*** si S_F es un grupo finito y existe un punto O de F, fijo por todos los elementos de S_F. A dicho punto se le denomina centro de simetría de F.

Teorema: El grupo de simetrías llamado de Leonardo son los grupos cíclicosC_n o los diedralesD_n, para n =1,2,....

Vamos a demostrar algo más genérico:

Teorema: Todo grupo finito de simetrías de una figura plana es el grupo cíclico C_n o el grupo diedralD_n.

O aún más genérico:

Teorema: Todo grupo finito de isometrías del plano esC_n o D_n.

Demostración

Sea G un grupo finito de isometrías del plano. Vamos a hacer las siguientes afirmaciones:

1) El grupo G no puede tener Traslaciones.

Demostración (1): Si tuviera una traslación T_v de vector v, también tendría $(T_v)^n = T_{nv}$ con $n \in \mathbb{N}$, que son infinitas traslaciones todas distintas, lo que contradice el hecho de tener sólo un número finito de elementos.

2) El grupo *G* tampoco puede tener simetrías con deslizamientos (antitraslaciones), ya que una simetría con deslizamiento por si misma es igual a una traslación.

Así*G* contiene solamente reflexiones y rotaciones.

3) Todas las rotaciones de *G* tienen el mismo centro.

Demostración (3): Supongamos que no es así, es decir que existen dos rotaciones de centros *A* y *B* con $A \neq B$. O sea tenemos, $\vec{R}_{A,\alpha}, \vec{R}_{B,\beta}$ dos rotaciones de sentido horario de *G* con$A \neq B$. Diferenciemos a su vez dos casos

a) $\alpha + \beta = 2k\pi$

En primer lugar, por ser *G* un grupo se tiene que$\vec{R}_{A,\alpha} \circ \vec{R}_{B,\beta}$ pertenece a G y en segundo lugar ya sabemos que esa composición es una traslación, lo que nos daría de nuevo infinitos elementos en G por lo que no puede ser.

b) $\alpha + \beta \neq 2k\pi$.

Como *G* es un grupo,$\vec{R}_{A,\alpha}, \vec{R}_{B,\beta}$, tienen inversos en *G* y la siguiente composición también debe estar en *G.*

$$\vec{R}_{A,\alpha} \circ \vec{R}_{B,\beta} \circ \left(\vec{R}_{A,\alpha}\right)^{-1} \circ \left(\vec{R}_{B,\beta}\right)^{-1} = \vec{R}_{A,\alpha} \circ \vec{R}_{B,\beta} \circ \vec{R}_{A,-\alpha} \circ \vec{R}_{B,-\beta}$$

Afirmamos que esto es una traslación dado que:

por ser $\alpha + \beta \neq 2k\pi$ se tiene que $\vec{R}_{A,\alpha} \circ \vec{R}_{B,\beta} = \vec{R}_{C,\alpha+\beta}$ y $\vec{R}_{A,-\alpha} \circ \vec{R}_{B,-\beta} = \vec{R}_{C',-\alpha-\beta}$ entonces:

$$\vec{R}_{A,\alpha} \circ \vec{R}_{B,\beta} \circ \vec{R}_{A,-\alpha} \circ \vec{R}_{B,-\beta} = \vec{R}_{C,\alpha+\beta} \circ \vec{R}_{B,-\alpha-\beta}$$

Y como $\alpha + \beta - (\alpha + \beta) = 0$ y $C \neq C'$ se tiene que esta última composición da como resultado una traslación, lo cual es absurdo.

En conclusión, demostramos hasta ahora que si G tiene rotaciones, estas tiene el mismo centro.

4) Si denotamos las mismas como $R_{O,0}, R_{O,\alpha_1}, R_{O,\alpha_2}, \cdots, R_{O,\alpha_t}$ con los α_i ánguloscomprendidos entre 0 y 2π. Y suponemos que $\alpha_1$es el menor de ellos, entonces los restantes ángulos deben ser un múltiplo de α_1.

Demostración de la afirmación 4) Si no fuera así habría un $\alpha_j$que no sería múltiplo de α_1y por lo tanto al dividirlo por $\alpha_1$nos da un cierto resto no nulo, o sea que podemos escribir:

$$\alpha_j = k\alpha_1 + r$$

con r tal que$0 < r < \alpha_1 0$ y se tiene que:

$$R_{O,r} = R_{O,\alpha_j - k\alpha_1} = R_{O,\alpha_j} \circ \left(R_{O,\alpha_1}\right)^{-k} \in G$$

es decir tendremos una rotación en G cuyo ángulo es menor que α_1 lo cual es absurdo por la elección que hicimos de α_1.

Sea h el orden de la rotación R_{O,α_1} eso quiere decir que

$$\left(R_{O,\alpha_1}\right)^h = Id \Rightarrow \alpha_1 = \frac{2\pi}{h}$$

y por lo tanto las rotaciones son exactamente: $R_{O,0}, R_{O,\frac{2\pi}{h}}, R_{O,2\frac{2\pi}{h}}, \cdots, R_{O,(h-1)\frac{2\pi}{h}}$.

Es decir que las rotaciones de G son el grupo C_h Si G no contiene reflexiones entonces $G = C_h$ Supongamos ahora que G contiene al menos alguna reflexión, sea esta S_p.

Si consideramos los elementos de G que preservan la orientación y si denominamos a estos G^+. Se tiene que $G^+ \leq G$y por lo tanto finito. Si aplicamos a G^+ lo ya probado se tiene que $G^+ = C_m$para algún m. Es decir$G^+ = \{R_{O,0}, R_{O,\frac{2\pi}{m}}, \cdots, R_{O,(m-1)\frac{2\pi}{m}}\}$. Ahora bien, las composiciones $S_p \circ R_{O,i\frac{2\pi}{m}}$ invierten todos la orientación, pues son composición de uno que no lo invierte con uno que si lo invierte. Como los únicos elementos de G que invierten el planos son las reflexiones (ya probamos que no hay reflexiones con deslizamiento), dichas composiciones tienen que ser reflexiones lo que indica que $O \in p$ y además los ejes de las reflexiones$S_p \circ R_{O,i\frac{2\pi}{m}}$también tiene eje tal que contiene a O.

Por otro lado si$n_1 \neq n_2$lo que implica $S_p \circ R_{O,n_1\frac{2\pi}{m}} \neq S_p \circ R_{O,n_2\frac{2\pi}{m}}$

Además no hay más reflexiones, ya que si hubiese otra reflexión$S_q$se tiene que $S_p \circ S_q \in G^+$ y entonces $S_p \circ S_q = R_{O,n\frac{2\pi}{m}}$ para algún $n \in \{1,2,\cdots,m\}$ multiplicando ambos miembros por S_p

$$S_p \circ S_p \circ S_q = S_p \circ R_{O,n\frac{2\pi}{m}}$$

y por lo tanto $S_q = S_p \circ R_{O,n\frac{2\pi}{m}}$Por lo tanto G está formado por $\{R_{O,n\frac{2\pi}{m}}: n = 0,1,2,\cdots,m\}$ y $\{S_p \circ R_{O,n\frac{2\pi}{m}}: n = 0,1,2,\cdots m\}$, es decir es el grupo diedral.

Referencias bibliográficas

Armstrong, M. A (1988). *Groups and Symetry*. EE UU: Springer.

Blanco, M. (1994). *Movimientos y simetrías.* España: Universidad de Valladolid.

Costa, A.. (2009). *Una introducción a la simetría*. España: UNED.

Hidalgo L..(2006). *Mosaicos.* México: Instituto de Matemática de la UNAM.

Martin, G.(1982). *Transformation* Geometry. EE UU: Springer.