

## O SUDOKU COMO FERRAMENTA PARA O DESENVOLVIMENTO DE REGRAS DE LÓGICA NA AULA DE MATEMÁTICA

Angélica Felix – Guy Grebot  
angelicacqd@gmail.com – guy@mat.unb.br  
Universidade de Brasília, Brasil

Tema: Jogos e Estratégias em Matemática

Modalidade: MC

Nível educativo: Médio (11 a 17 anos)

Palavras chave: Provas de proposições; sequência didática; lógica; resolução de problemas.

### Resumo

*O objetivo desta oficina é mostrar como podemos desenvolver atividades direcionadas à formulação de provas de proposições em sala de aula e apresentar os resultados da aplicação de tais atividades feita com alunos do ensino fundamental. A oficina está baseada numa sequência didática desenvolvida com base na metodologia de resolução de problemas, no âmbito do programa de Bolsas de Iniciação à Docência - PIBID/CAPES, do Departamento de Matemática da Universidade de Brasília. O problema motivador desta sequência é a resolução de um quebra-cabeça muito divulgado na mídia: o sudoku. A partir do axioma básico, que é a regra do jogo, da observação e da resolução de situações específicas do sudoku, o aluno é levado a formular métodos de resolução cada vez mais complexos. Nesta formulação de métodos e de algoritmos de resolução, ele trabalha tanto a redação quanto a aplicação das regras de lógica geralmente usadas em Matemática, a saber: regra do terceiro excluído, implicação, conjunção e disjunção. Através do conceito de simetrias o aluno é levado a formular novos métodos cuja validade é comprovada através de outras representações da grade sudoku. Os conteúdos específicos abordados na sequência didática e na oficina são: simetrias e regras básicas de lógica.*

### Introdução

O conhecimento de um sistema dedutivo, a análise do significado de postulados e teoremas e suas demonstrações são importantes no ensino da matemática, pois, segundo os PCNs de matemática (Brasil, 1998), eles propiciam o desenvolvimento do pensamento lógico dedutivo e dos aspectos mais estruturados da linguagem matemática. Como expressado por Goel (2003), é importante que os alunos exponham seus pensamentos em palavras, por escrito e oralmente, compreendam raciocínios diferentes e encontrem erros. Além disso, a redação passo a passo é importante no desenvolvimento do raciocínio lógico por permitir estruturar o pensamento.

A importância do raciocínio lógico, no entanto, não é característica apenas do ensino de Matemática e, nas mais variadas culturas, ela pode ser ilustrada pela quantidade de jogos de estratégia e/ou de lógica divulgados. Nesses, qualquer jogador pode ser bem

sucedido à condição de desenvolver logicamente seus raciocínios e de usar as estratégias adequadas.

Um desses jogos é o sudoku, que se baseia na colocação lógica de números. Cada jogada deve ser feita seguindo apenas uma regra: colocar os números de 1 a 9 de modo que cada uma das nove linhas, cada uma das nove colunas e cada um dos nove blocos 3x3 contenha todos os nove dígitos. Cada sudoku é feito para que tenha uma única solução de tal forma que um único número errado modifica toda a grade impossibilitando sua resolução.

A sequência aqui apresentada ilustra, ainda que de forma limitada, como desenvolver atividades direcionadas à formulação de provas de proposições em sala de aula e o quanto essas atividades são importantes na formação dos alunos. Baseada no jogo sudoku e, a partir da regra do jogo, da observação e da resolução de situações específicas, o aluno é levado a formular métodos de resolução cada vez mais complexos. Nesta formulação de métodos e de algoritmos de resolução, ele trabalha tanto a redação quanto a aplicação das regras de lógica geralmente usadas em Matemática, a saber: regra do terceiro excluído, implicação, conjunção e disjunção. O registro dos alunos serve de base para que eles melhorem sua argumentação e, por conseguinte, sua compreensão.

Apresentamos, nas duas seções seguintes, a metodologia usada e como a sequência didática está estruturada. As duas últimas seções versam sobre os resultados relativos ao ensino-aprendizagem, obtidos na aplicação da sequência e o que eles permitem concluir a respeito das metodologias de ensino de Matemática.

### **Metodologia**

A metodologia de ensino de matemática nos dias atuais, se reduz a um modelo de aulas expositivas centradas no professor e no qual o aluno tem um papel de espectador e só age na resolução de exercícios de fixação.

Em contrapartida, a metodologia de resolução de problemas propõe uma atitude mais ativa por parte do aluno, na qual ele passa a ser o construtor de seu próprio conhecimento a partir da resolução de uma situação-problema. Segundo Soares & Bertoni (2001), esta metodologia é “uma das formas mais acessíveis de proporcionar aos alunos que aprendam a aprender”. Nela, o professor deixa de ser o ator principal e se torna mediador do processo de ensino-aprendizagem.

A situação problema é o ponto de partida para a aprendizagem de novos conceitos matemáticos, o que torna mais significativo o ensino-aprendizagem da matemática.

Ao resolver o problema proposto, o aluno perpassa por quatro fases: a compreensão do problema, o estabelecimento de um plano, a execução do plano de resolução do problema e o retrospecto do que foi feito (Polya, 1978). Assim, a metodologia pressupõe o envolvimento total do aluno na resolução do problema sem permitir que ele se limite a respostas diretas e automáticas.

É através deste envolvimento que o aluno desenvolve as habilidades necessárias à sua formação como citado nos PCNs (Brasil, 1998), com especial destaque para o desenvolvimento de um pensamento sistêmico, do espírito de cooperação e do estabelecimento de conexões entre conhecimentos prévios.

### **Sequência Didática**

A partir do quebra-cabeça sudoku, foi desenvolvida uma sequência didática (caderno) com base na metodologia de resolução de problemas, que leva os alunos a desenvolverem argumentações lógicas com base nas regras de lógica usadas em matemática. Este jogo foi escolhido por ser popular, com regras simples, e por permitir argumentações com níveis variados de complexidade.

Os livros *The Hidden Logic of Sudoku* (Berthier, 2004) e *Mensa Guide to Solving Sudoku* (Gordon, 2006) serviram de base para o estudo da teoria subjacente ao jogo e dos seus métodos de resolução. Nesta teoria, os axiomas são as regras do jogo e as proposições são os métodos de resolução.

O caderno apresenta inicialmente a regra do sudoku: colocar os números de um a nove de modo que cada uma das nove linhas, cada uma das nove colunas e cada um dos nove blocos 3x3 contenha todos os nove números.

O objetivo de cada uma das atividades é o desenvolvimento e o aprimoramento da argumentação lógica necessária para a afirmação dos números em cada célula. Gradativamente, cada atividade exige que o aluno explique o que é feito em cada jogada por meio de argumentações mais elaboradas. Os enunciados formais dos métodos abordados nas atividades deixam claro qual deve ser a complexidade da argumentação esperada. Assim, um determinado raciocínio pode ser descrito de forma intuitiva, como ocorre nas atividades iniciais, mas é também possível que a demonstração de um determinado método seja imprescindível.

A primeira atividade apresenta um sudoku de nível fácil e propõe que o aluno redija à sua maneira, cada passo executado, deixando-o livre para argumentar. No fim da

atividade solicita-se que o aluno redija de forma geral cada raciocínio utilizado. Essa atividade tem como finalidade mostrar ao aluno o que significa argumentar suas afirmações assim como mostrar a necessidade de registrar o seu raciocínio. Os métodos necessários (HS e NS) e usados para resolver a grade proposta são formalmente enunciados como segue (Berthier, 2004): HS (“Hidden-Single”) - se há uma linha e uma coluna de tal forma que existe um, e apenas um, candidato para a célula de interseção entre a linha e a coluna, então devemos afirmá-lo como valor desta célula; HSR (“Hidden-Single-in-a-Row”) (coluna/bloco): se há uma linha e um número tal que o número é um candidato a apenas uma célula nesta linha (coluna/bloco), então devemos afirmá-lo como o valor desta célula; NS (“Naked-Single”) : se uma célula tem apenas um candidato restante, então, este é o único valor possível para a célula; ECP (“Elementary Constraints Propagation”) - célula: se um valor é afirmado para uma célula, então são removidos todos os outros candidatos para esta célula; ECP – linha (coluna/bloco): se um valor é afirmado para uma célula da linha(coluna/bloco) dada, então ele é removido de todas as outras células da mesma linha (coluna/bloco).

Na segunda atividade, o aluno é direcionado na resolução do sudoku proposto, de forma a dar menos liberdade às suas argumentações. Por exemplo, solicita-se que ele explique, em determinado momento, em que célula deveria aparecer um determinado número em determinado bloco. Dessa forma, o aluno consegue formular novos métodos para o preenchimento da grade sudoku. Estes métodos são formalmente enunciados como (Berthier, 2004): NPR (“Naked-Pair-in-Row”) (coluna/bloco): se, em uma linha (coluna/bloco), há duas células em que aparece exatamente o mesmo par de candidatos, devemos remover esses dois candidatos de todas as outras células desta linha (coluna/bloco); HPR (“Hidden-Pair-in-Row”) (coluna/bloco): se em uma mesma linha (coluna/bloco) existem duas células nas quais aparece um par de candidatos ( $n_1, n_2$ ) que só aparecem nessas células, então deve-se remover qualquer número diferente de  $n_1$  e  $n_2$  destas duas células; RIB (“Row-Interaction-with-Block”) (coluna): se houver um número  $n$ , uma linha  $r$  (coluna  $c$ ) e um bloco  $b$ , tal que a linha  $r$  (coluna  $c$ ) intersecta o bloco  $b$  tal que o local exato de  $n$  em  $r$  ( $c$ ) não é conhecido, mas não pode estar em qualquer dos outros dois blocos na linha  $r$  (coluna  $c$ ), então devemos eliminar  $n$  dentre os candidatos de qualquer célula no bloco  $b$  fora de  $r$  ( $c$ ). De forma similar, podemos enunciar os métodos Block-Interaction-with-Row e Block-Interaction-with-Column, invertendo-se linha por bloco e bloco por coluna no enunciado CIB acima, respectivamente.

Na terceira atividade, o aluno deve fazer um retrospecto do que foi desenvolvido na segunda atividade. Solicita-se que o ele redija, de forma geral e precisa, cada uma das regras que foram usadas nesta atividade.

A quarta atividade, apresenta uma grade de sudoku que necessita de uma técnica particular de resolução que ainda não foi analisada. O objetivo é fazer o aluno perceber que há um outro nível de raciocínio que precisa ser desenvolvido. Trata-se do método “Swordfish” que envolve o reconhecimento de um padrão de aparecimento de um número e que é desenvolvido na quinta atividade. Este método se enuncia formalmente como (Berthier, 2004):

“Swordfish” em linhas

se houver um número  $n$  e existirem três linhas diferentes  $r_1$ ,  $r_2$  e  $r_3$  e três colunas diferentes  $c_1$ ,  $c_2$  e  $c_3$ , tais que, na representação linha-número da grade:

- a célula  $(r_1, n)$  tem  $c_1$  e  $c_2$  entre seus candidatos;
- a célula  $(r_2, n)$  tem  $c_2$  e  $c_3$  entre seus candidatos;
- a célula  $(r_3, n)$  tem  $c_3$  e  $c_1$  entre seus candidatos;
- nenhuma das células tem qualquer outro candidato na determinada linha, exceto as células já citadas.

Então, deve-se eliminar  $n$  das outras células das colunas  $c_1$ ,  $c_2$  e  $c_3$  que não sejam as que observamos anteriormente.

De forma similar, podemos enunciar o método correspondente para coluna, invertendo-se coluna por linha no enunciado acima.

Este método decorre do método chamado “X-Wing” cujo enunciado é (Berthier, 2004):  
 X-Wing em linha (coluna): se existe um número  $n$  e existem duas linhas (colunas) diferentes  $r_1$  ( $c_1$ ) e  $r_2$  ( $c_2$ ), tais que, nessas linhas (colunas)  $n$  aparece como um candidato apenas para duas colunas (linhas) diferentes  $c_1$  ( $r_1$ ) e  $c_2$  ( $r_2$ ), então deve-se remover  $n$  dos candidatos das outras células de  $c_1$  ( $r_1$ ) e  $c_2$  ( $r_2$ ) que não são as células  $r_1c_1$  e  $r_2c_2$ .

Nas atividades seis e sete, o aluno é levado a representar a grade sudoku de outras formas e a usar essas novas representações para resolver determinadas situações. Nessas atividades, o conceito de simetria é aplicado às regras analisadas anteriormente e permite que elas sejam generalizadas.

Por fim, são propostos desafios em vários níveis para que o aluno possa aplicar os métodos por ele construídos durante a sequência didática.

## Resultados

A sequência didática foi aplicada em uma turma de dez alunos do último ano do ensino fundamental de uma escola parceira do programa PIBID/CAPES, durante quatro aulas de noventa minutos cada. Esses alunos estavam no programa desde o início do ano e tinham desenvolvido dois cadernos de atividades. Assim, a pesquisadora tinha como avaliar melhor o desenvolvimento dos alunos.

Inicialmente os alunos reclamaram bastante do fato de terem de escrever em aulas de matemática, mas aos poucos eles foram percebendo e entendendo a necessidade de registrar o seu raciocínio por escrito. Há o exemplo de um aluno que se recusou a registrar seu raciocínio e teve de reiniciar a atividade porque não lembrava dos passos seguidos. Da segunda vez, ele registrou seu raciocínio como a atividade o orientava.

Durante a primeira atividade, foi notada uma certa dificuldade por parte dos alunos em compreender o jogo. Essa dificuldade surgiu de argumentos não válidos como: “O número não tem nessa coluna, não tem na linha nem no bloco de interseção, então ele pode ser nessa célula” não atentando para a possibilidade do tal número poder assumir outro lugar na grade. Como cada sudoku tem resolução única, este tipo de argumento levava ao absurdo do mesmo número aparecer duas vezes na mesma linha, coluna ou bloco. Este fato trazia decepção e desinteresse. Para evitar que esse desinteresse momentâneo virasse um desinteresse total com a atividade, foi preciso que a pesquisadora estivesse continuamente instigando os alunos e levando-os a tentar entender seus erros. Como alguns alunos insistiam no erro, usou-se uma grade 4x4 que mantém todas as características da tradicional, para que eles pudessem perceber a diferença entre o fato de um número poder ocupar uma determinada célula e o fato dele só poder ocupá-la. O uso desse artifício foi satisfatório, porque permitiu aos alunos perceberem mais facilmente a origem de seus erros.

Durante a aplicação do caderno, foi notório o compartilhamento de ideias entre os próprios alunos. Muitas vezes, os alunos eram mediadores de seus próprios colegas e o faziam de maneira segura e espontânea. Observamos que a sequência didática foi elaborada de modo a incentivar a cooperação entre os alunos.

Com o intuito de mostrar ao aluno sua evolução, a mediadora deixou cada um escrever livremente as argumentações nas primeiras jogadas do primeiro sudoku da primeira atividade e, aos poucos, foi intervindo com indagações para que cada um refletisse e melhorasse sua redação.

Na questão três da primeira atividade, os alunos deviam sintetizar todas as argumentações que tinham feito durante a resolução do sudoku. Apesar da falta de

formalismo, as respostas da maioria dos alunos foram bem satisfatórias. Eles conseguiram escrever orações coesas e embasadas em argumentos corretos.

O interesse por métodos mais complexos foi unânime. Por meio da segunda atividade eles foram levados a pensar e gerar métodos para o preenchimento da grade que até então desconheciam. Observou-se que o fato de conseguirem gerar um novo método levou os alunos a realizarem com mais cuidado e reflexão os itens seguintes. Nesta atividade, e por conta deste fato, a ação mediadora também foi menos exigida.

Foram desenvolvidas integralmente duas das atividades propostas, porque dois encontros foram cancelados em função da mudança do cronograma da escola e os alunos demoraram mais do que se esperava nas duas primeiras atividades.

### **Discussão e conclusões**

Em pouco tempo, foi possível evidenciar os efeitos negativos da metodologia tradicional usada no ensino da Matemática, que restringe a ação dos alunos e se reduz à exposição de conteúdos poucos significativos.

A pesquisadora esteve com essa turma durante um semestre e, a partir da aplicação do caderno sudoku e de outros cadernos que fazem uso da mesma metodologia, foi observado que os alunos têm inúmeras dificuldades para entender enunciados, redigir respostas, pensar de maneira sistêmica. Tais fatos evidenciam o reflexo da metodologia tradicional de ensino, na qual os alunos têm um papel de espectador e só agem na resolução de exercícios de fixação, sendo preparados a agir de maneira mecânica.

Apesar da repetição ano a ano do modelo tradicional de ensino de matemática, em pouco tempo é possível reverter a apatia e a atitude mecânica dos alunos por meio do uso da metodologia de resolução de problemas. Foi também observado, a partir da vivência da pesquisadora, que quanto mais novos os alunos mais receptíveis eles são à metodologia de resolução de problemas e os cadernos conseguem ser desenvolvidos de maneira mais proveitosa.

Todos os alunos, à sua maneira, desenvolveram o que foi proposto em cada atividade do caderno sudoku. O andamento das atividades, ditado de acordo com a experiência e o ritmo do próprio aluno, fez com que sempre houvesse alunos em estágios diferentes. No entanto, nenhum aluno se sentiu atrasado ou menos capaz do que outro e nenhum se autopromoveu.

É preciso fazer do ato de aprender um ato no qual o aluno se sinta capaz e confiante e, neste sentido, a metodologia de resolução se mostrou muito eficiente.

Nas aulas de matemática, os alunos devem redigir e desenvolver seu raciocínio lógico no seu próprio ritmo. Tudo isso pode ser feito através de uma metodologia menos restritiva e sempre é possível mudar as coisas. Torna-se urgente repensar a maneira de se ensinar matemática para não prejudicarmos a formação de mais jovens.

### **Referências bibliográficas**

Gordon P., Longo F. (2006) Mensa Guide to Solving Sudoku: Hundreds of Puzzles Plus Techniques to Help You Crack Them All. Oficial MENSEA puzzle book.

Berthier, D. (2007). The Hidden Logic of Sudoku (Second Edition). Editora. Lulu.com.

Polya, G. (1978). A arte de resolver problemas (pp. 1-15). (H. Araújo, Trad.). Rio de Janeiro: Interciência. (Obra original publicada em 1975).

Soares, M. T. C. & Pinto, N. B. (2001). Metodologia da Resolução de Problemas.

Recuperado de <http://>

[www.ufrj.br/emanped/paginas/conteudo\\_producoes/docs\\_24/metodologia.pdf](http://www.ufrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_24/metodologia.pdf).

Goel, V. (2003). Cognitive Neuroscience of Deductive Reasoning. In Cambridge Handbook of Thinking & Reasoning, Eds. K. Holyoak & R. Morrison. Cambridge University Press.

Ministério de Educação / Secretaria de Educação Fundamental – Brasília. (1998) Parâmetros Curriculares Nacionais terceiro e quarto ciclo do ensino fundamental. Recuperado de <http://portalmeec.gov.br/seb/arquivos/pdf/introdução.pdf>