COMPETENCIA MATEMÁTICA Y COMUNICATIVA A PARTIR DE LA DEMOSTRACIÓN EN EL MARCO DE UN PROBLEMA GEOMÉTRICO

Zambrano Corredor Manuel Alejandro – Soto Hernández Yancel Orlando
Poveda Cruz Cristian David
alejomarley@hotmail.com – yancelk@hotmail.es – cristianpoveda1301@hotmail.com
Universidad Distrital Francisco José de Caldas (Bogotá- Colombia)

Tema: Formación de profesores y maestros
Modalidad: Comunicación breve (CB)
Nivel educativo: Terciario- Universitario
Palabras clave: Comunicación-Lenguaje, Demostración, Pensamiento geométrico, Procesos de prueba, Niveles de competencia.

Resumen

El presente trabajo pretende presentar el tipo de demostración que desarrollaron algunos estudiantes en el espacio de formación de Didáctica de la Geometría del Proyecto curricular Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas (LEBÉM) de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas (Bogotá-Colombia) a una situación en el marco de la geometría euclidiana. Se hace necesario al momento de someter la situación planteada observar, estudiar y analizar el tipo de lenguaje de los estudiantes en relación a su utilización y apropiación para llevar a cabo la demostración. En el trabajo se genera una reflexión y unas conclusiones acerca de la utilización de los objetos matemáticos para realizar la demostración, el lenguaje y la notación como un mecanismo que permite validar un teorema.

1. Introducción

Partiendo de una situación, el trabajo desarrollado tiene la intención de dar cuenta de algunas competencias comunicativas en el área de matemáticas de un grupo específico de estudiantes de LEBÉM en el espacio de formación Didáctica de la geometría al momento de efectuar una demostración geométrica. Se realiza un análisis atendiendo a algunas consideraciones del marco referencial que permitirán reflexionar y construir una clasificación formal del nivel de demostración en el cual se encuentran los estudiantes que se tomaron para el estudio; asunto primordial a tratar dentro de las competencias comunicativas de cualquier sujeto, pero ante todo de un profesor de matemáticas.

2. Marco de referencia

El marco referencial para el desarrollo de la propuesta está relacionado con: desarrollo de habilidades comunicativas, niveles de demostración en el pensamiento espacial-sistemas geométricos y procesos de visualización- argumentación en geometría.

En primera instancia, se trabajará sobre los procesos de visualización – argumentación en el campo geométrico y posteriormente en los niveles de demostración en geometría, para finalmente articularlo con el desarrollo de habilidades comunicativas.

2.1 Visualización-argumentación

La visualización permite realizar una acción de transformación de un dibujo a una imagen metal en donde se retienen los cambios y simplemente se observa un proceso; Duval (2001) considera unas fases dentro del proceso de resolución en donde se plantean una serie de pasos que permiten trabajar la resolución de problemas geométricos desde la conexión entre visualización- argumentación, los pasos a seguir para realizar el proceso de visualización son los siguientes:

1. **Lectura atenta:** En donde se identifican interrogantes y datos.
2. **Visualización:** En donde se obtienen conclusiones de las representaciones de acuerdo al nivel en el que el estudiante se encuentre (global, constitutivo u operativo).
3. **Traducción:** En donde se expresan los elementos del problema en términos geométricos y se pasa de lo informal a lo formal.
4. **Adquisición de nueva información**: En donde se retoman los datos y se busca nueva información.
5. **Implementación:** En donde se ponen en juego cálculos y procedimientos.
6. **Monitoreo y verificación de la solución:** En donde se autorregula el proceso de resolución y se valida por completo la solución.

2.2 Niveles de demostración en la prueba

Ahora, de acuerdo con los niveles de las demostraciones es de vital importancia resaltar lo planteado por Balacheff (2000), en tanto el tránsito de los estudiantes por los procesos demostrativos-argumentativos, tienen en sí mismos caracterizaciones que permiten identificar elementos para el análisis conceptual de las demostraciones. Estos niveles responden a:

- **Explicación:** Despejar razones, dar justificaciones a un teorema a partir de sus conocimientos y racionalidad, organizar la información para dar la justificación, emplear un lenguaje natural, no es deductiva ni se apoya en la teoría, establece y garantiza la validez de una proposición de acuerdo a sus propias reglas de decisión de la verdad. Justificación para sí mismo, sin tener en cuenta a los otros ni a la comunidad.

- **Prueba:** Serie organizada de enunciados basados en unas reglas. La prueba se divide en tres (3) categorías las cuales son:

  - ✓ ***Empiricismo ingenuo:*** Inductivo (casos particulares en busca de generalidad), por verificación, basado en algunos ejemplos. Casos particulares, por ejemplo darle medidas a los ángulos, apoyarse mucho desde lo gráfico. Cadena de explicaciones sin secuencia organizada. En este caso intenta organizar la información para otros.

  - ✓ ***Experiencia crucial:*** Abductivo (razonamiento que permite llegar a una hipótesis, en este caso entre dos, siendo sólo una verdadera). Con un experimento determina una hipótesis para alguna consecuencia. Emplea un caso particular, especial para verificar la validez.

  - ✓ ***Ejemplo genérico:*** Desde un ejemplo particular pero cuya explicación se puede emplear para cualquier caso inductivo; emplea propiedades del objeto ejemplo. Generaliza a partir de lo particular. Puede apoyarse en el dibujo.

- **Experiencia mental:** Un “ejemplo genérico generalizado”, con presencia de teoremas en acto. Entre un ejemplo genérico y una demostración. Utilizar argumentos formales, algunos teoremas/axiomas, deducción, no se apoya meramente desde lo gráfico. No es demostración porque no es rigurosa y no está plenamente en una axiomática. Para llegar a demostración: Saltar los argumentos de lo personal a lo general (comunidad matemática), convencer y poner la afirmación en una axiomática.

- **Demostración:** Cadena deductiva con estructura lógica, lenguaje y simbología formal, axiomática definida, no necesariamente debe ser explícita para el lector, sino válida. Debe convencer a la comunidad matemática y tener rigor (en relación a la organización).

2.3 Habilidades comunicativas

Por último tenemos las habilidades comunicativas desde los planteamientos de Pérez (2014), en tanto existen elementos de orden lingüístico que permiten determinar diferentes tipos de manipulaciones del lenguaje y la comunicación.

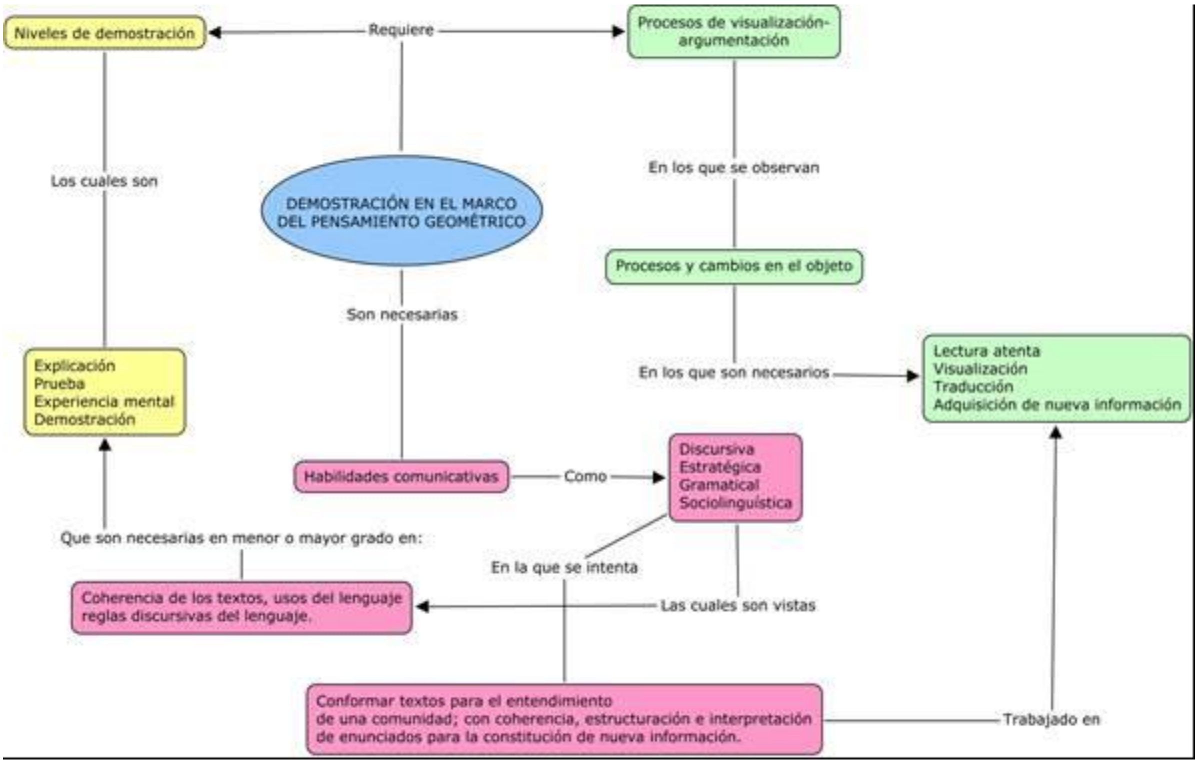
De acuerdo con Canalé (1995; citado por Pérez, 2014) las competencias comunicativas responden a los aspectos expuestos en la tabla 1.

COMPETENCIA	¿A QUÉ REFIERE?
Gramatical	Refiere al dominio del conocimiento lingüístico. La competencia gramatical comprende el léxico; las reglas de la morfología, la sintaxis y la semántica de la oración gramatical y la fonología.
Sociolingüística	Se encuentra relacionada con la adecuación de las producciones al contexto. La competencia sociolingüística está integrada por las normas socioculturales que rigen el uso y las reglas del discurso, lo cual permitirá interpretar el significado social de los enunciados.
Discursiva	Se refiere a los modos en que se combinan unidades gramaticales para formar textos, hablados o escritos coherentes y completos.
Estratégica	Se encuentra relacionada con el dominio de estrategias de comunicación verbal y no verbal que pueden suplir carencias y lograr una comunicación efectiva.

Tabla 1. Niveles de competencia y su referencia.

 ISSN 1688-9886

Finalmente, se establece una relación entre los elementos considerados en lo teórico con la demostración en el marco del pensamiento geométrico. (Ver mapa 1).



Mapa 1. Relación entre los elementos del marco de referencia.

En el mapa presentado se parte de la ***demostración en el marco de un problema en la geometría*** en el que, para hacer análisis, necesita de dos (2) elementos los cuales son *los niveles de demostración* y *los procesos de visualización*, el primer elemento es necesario porque permite mostrar cuál es el nivel de demostración del estudiante y sí efectivamente desde lo contemplado por la teoría satisface las condiciones para construir o no una demostración con criterios formales. El segundo elemento como se mostró, es un proceso que permite dar cuenta de una secuencia organizada para realizar la demostración; es importante aclarar que esta secuencia no es lineal pero permite manipular de manera más óptima lo dado en la afirmación y las conjeturas generadas para realizar la demostración.

En la segunda parte del esquema, se hace claridad de que para la ***demostración en el marco de la geometría*** se necesita de habilidades comunicativas que finalmente permitirán dar coherencia, sentido y entendimiento de lo que se quiere demostrar y compartir a la comunidad. Por último, y aunque no es considerado pero tomado en las demostraciones es el concepto; asimilado desde lo propuesto por Vergnaud (1981) desde los significados, significantes y utilización de teoremas en acto que tienen relación con la representación utilizada y las invariantes dentro del problema, las cuales se están ligadas a la forma de abordar el problema y de interpretar la información del mismo.

3. Desarrollo y resultados de la propuesta

Para el desarrollo de la situación planteada se tomaron tres (3) demostraciones realizadas por estudiantes de la Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas, en el espacio de formación Didáctica de la Geometría. A partir de estas demostraciones, tomando como referencia los niveles de demostración expuestos por Balacheff (2000), se pretende analizar el lenguaje matemático implícito y explícito dentro de las demostraciones además de su validez en aras de observar las competencias comunicativas en futuros docentes de matemáticas.

Situación planteada

En la siguiente figura (ver figura 1), se sabe que:

$$PR \perp RQ,\ ST \perp RQ,\ SQ \perp PS.$$

Demuestre que:

$$\angle P \cong \angle Q.$$

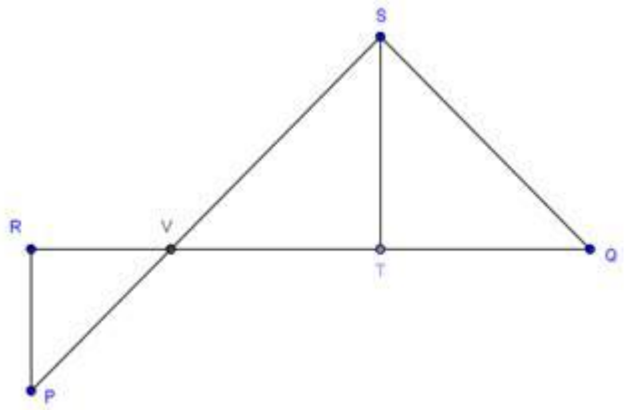


Figura 1. Cosntrucción dada en la situación problema planteado

Con la situación problema a disposición y teniendo en cuenta que es demostrable, se toman las demostraciones de los tres estudiantes y se realiza el respectivo analisis a través de una tabla ***(ver anexos, tabla 2)*** en la que se consideran 2 aspectos; el primero refiere a la evidencia de la demostración que realizó el estudiante y el segundo a las inferencias que se pueden hacer de la demostración y los constrastes con los elementos considerados en el marco referencial. Por último, haciendo la aclaración, en la tabla ***(ver anexos, tabla 2)*** se denota el desarrollo de cada uno de los estudiantes a través de colores; siendo el desarrollo de color verde el realizado por el estudiante 1, el desarrollo de color amarillo realizado por el estudiante 2 y finalmente el desarrollo de color azul el realizado por el estudiante 3.

4. Conclusiones

Con el ánimo de presentar generalidades respecto a la utilización del lenguaje y el tipo de elementos que intervienen en los procesos argumentativos, se hará de manera concreta una reflexión respecto al tipo de desarrollos comunicativos que construyeron algunos estudiantes de la LEBÉM en el espacio de formación de Didáctica de la Geometría para determinar una posible caracterización óptima de las demostraciones matemáticas y su relación con la lingüística.

De esa manera tenemos que las competencias gramatical y sociolingüística se presentan poco en las demostraciones en tanto las caracterizaciones de este tipo de competencias no responden al tipo de acciones que llevan a cabo los estudiantes en el momento de demostrar un teorema. La competencia sociolingüística como está descrita se presenta únicamente en el tipo de reglas que se establecen en el lenguaje, pero si hablamos de notación, no es posible hablar con certeza de procesos sociolingüísticos.

Por otro lado tenemos que las competencias discursivas y estratégicas en sí mismas responden al tipo de desarrollos de los estudiantes puesto que:

- Se conforman estructuras gramaticales, con orden específico y una interrelación lógica de los elementos lingüísticos.

- Se generan relaciones gramaticales para la conformación de producciones escritas que para el caso pretenden expresar algo y que esto sea entendible para otras personas.

- Se requiere de la interpretación de enunciados a través del entendimiento y la coherencia que se le brinde al texto.

- Se generan reglas discursivas y notaciones específicas las cuales son para el caso de orden geométrico y visual. Estas son las que permiten construir información en forma de conjeturas para demostrar la afirmación inicial.

- Respecto a la matematización, las demostraciones que se presentaron dan muestra de este proceso porque las demostraciones son presentadas desde diferentes perspectivas en cuanto al abordaje, además el lenguaje y la notación utilizada en éstas difieren. Por otro lado, el modelo situacional es reconocible a nivel social porque la notación está mediada y es entendible para la comunidad.

- Las fórmulas, esquemas visuales y representaciones muestran procesos de matematización que están asociados a la notación porque el problema se pretende que sea demostrado desde los aspectos matemáticos y no desde la percepción de la realidad ya que ésta es simplemente visual.

5. Referencias bibliográficas

Balacheff, N (2000) *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. Traducción realizada por Gómez, P (2000); Universidad de los Andes. Bogotá, Colombia.

Duval, R (2001) *"La geometría desde un punto de vista cognitivo".* Traducción realizada por Hernández, V. Febrero de 2001.

Pérez, I (2013) *Procesos de aprendizaje; desarrollo de habilidades comunicativas*. La competencia comunicativa; habilidades y destrezas. Grado de Magisterio en educación infantil.

Vergnaud, G (1981) *Teoría de los campos conceptuales*; Didáctica de las matemáticas; Université René Descartes.

6. Anexos

<table>
<tr><th>Evidencias de la demostración</th><th>Inferencias y tipo de demostración desde lo teórico</th></tr>
<tr><td>

Para iniciar con la demostración, el estudiante parte de la construcción visual (ver figura 2) y replica los datos dados (ver figura 3).

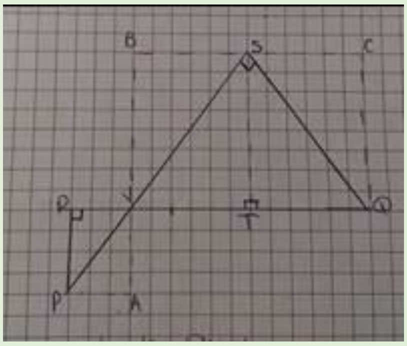


Figura 2. Construcción inicial de la estudiante para la demostración

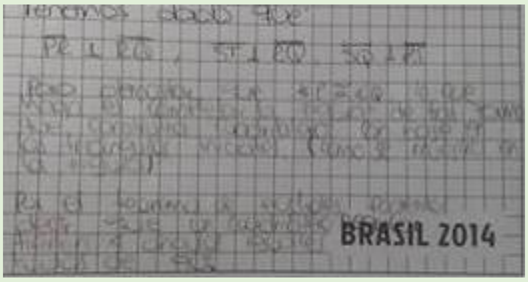


Figura 3. Datos dados y desarrollo de la demostración

El estudiante también desde los visual aclara que la demostración la hará a partir de la completación de cuadrados pero no se evidencia que lo haga porque solo termina siendo mencionado.

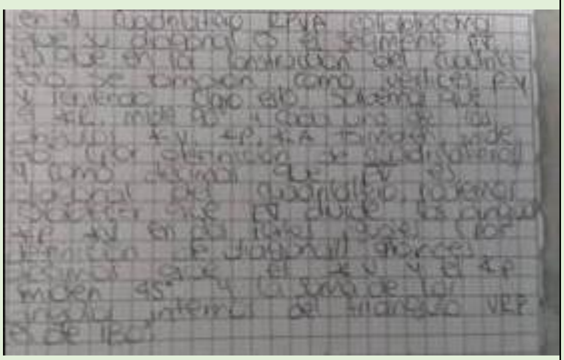


Figura 4. Desarrollo de la demostración

En la figura 3, el estudiante afirma que el ángulo

</td><td>

A partir de las figuras, se puede inferir que el proceso desarrollado por el estudiante 1 está inmerso en los siguientes momentos los cuales refieren a:

- Mostrar los elementos que le está brindando el problema.
- Ejecutar algunas transformaciones en la figura, para dar respuesta a la situación aunque lingüísticamente empieza a redundar sobre los datos dados.
- Construir conjeturas en base con la trasformación realizada y los datos del problema.
- Describir el proceso utilizando teoremas, además de deducir información en relación con los ángulos.

De acuerdo a las fases presentadas por Balacheff (2000) esta solución está inmersa dentro de una prueba, puesto que:

✓ Es presentada más allá de la explicación puesto que el resolutor escribe y organiza la información para que la comunidad que la vea y la discuta pueda validar el proceso.

✓ Los enunciados están organizados, son entendibles y están establecidos bajo unas reglas las cuales refieren al tipo de lenguaje, conjeturas y también la forma de hacerse entender, un ejemplo de lo anterior es cuando el resolutor dice lo siguiente:

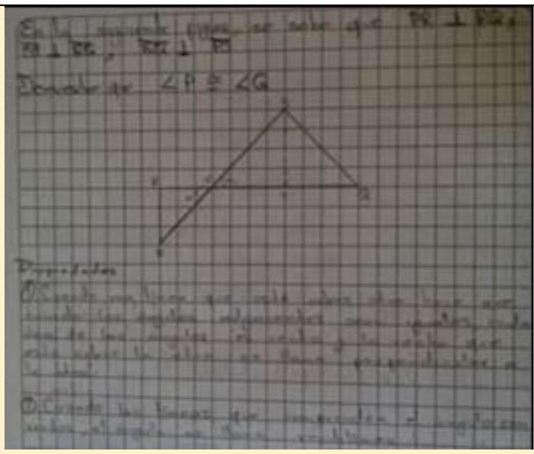
"<u>Por el teorema de Euclides</u>, podemos decir que el cuadrilátero tiene 4 ángulos iguales, todos son de 90º, en el cuadrilátero RPVA establecemos que su diagonal es PV (…) teniendo claro esto sabemos que el ángulo $\measuredangle R$ <u>mide 90º</u> y que $\measuredangle P$ y $\measuredangle V$ también y como PV es diagonal del cuadrilátero, podemos establecer que PV divide a $\measuredangle P$ y $\measuredangle V$ en 2 ángulos iguales <u>(por definición de diagonal)</u> (…").

✓ Sigue siendo prueba y no puede ser demostración puesto que la axiomática puesta en juego no es clara.

El resolutor muestra que no tiene bien definida y estructurada la axiomática dado que enuncia el teorema pero nunca aclara de manera explícita cuál es; menciona a Euclides y asume dicha axiomática pero ésta es trasgredida cuando se nombran medidas en los ángulos. Por último, el lenguaje no es formal ni contiene una secuencia lógica de pasos.

</td></tr>
</table>

R es de 90º y empieza a dar una explicaciòn, pero no termina demostrando que este ángulo finalmente mide 90º, además que este ángulo está dado en la situación puesto que inicialmente se dijo que $\overline{PR} \perp \overline{RQ}$. Lingüísticamente no logra empapar al lector de lo que él quiere dar a interpretar, puesto que hacen falta argumentos y/o utiliza argumentos impropios, que tienen poco que ver o están mal utilizados. Además, redunda en sus conclusiones respecto a lo que ya se encuentra dado.	Por los argumentos anteriores, se logra evidenciar que el proceso llevado a cabo por el estudiante 1 está dentro de la fase de prueba, esta contiene unos tipos, de acuerdo al nivel de generalidad que contiene; a continuación se mostrará dentro de cuál tipo se puede clasificar esta prueba. Esta prueba se puede ver dentro del tipo de empiricismo ingenuo porque: • La validez de la "demostración" se presenta para unos casos particulares, y en lo realizado por el resolutor se puede evidenciar la utilización de medidas para los ángulos. • Las construcciones realizadas al principio de la demostración son meramente visuales puesto que al trasformar la figura, deduce información en relación con la figura y al momento de describirlas, la forma de hacerlo da muestra de que se está hablando sobre los datos. • Cuando el resolutor afirma que *"…el ángulo Q mide 45º, con lo establecido anteriormente podemos decir que* $\measuredangle P = \measuredangle Q$*"* asegura validez en la "demostración" únicamente con el caso particular. • La utilización del lenguaje es en su mayoría explicativo para el otro, además de ser un lenguaje natural. Esta prueba tiene aspectos del ejemplo genérico porque: • El nivel de deducción es un poco mayor y el resolutor logra crear una secuencia coherente y entendible. • A pesar de apoyarse con el gráfico y trasformar el mismo, se logra ver que se deduce en base con las transformaciones realizadas. Por último, esta prueba tiene un aspecto de experiencia mental porque el estudiante logra emplear teoremas en acto, aunque no explicita que son importantes en cuanto le permiten construir su cadena. En conclusión, se puede decir que la "demostración" está dentro de la fase de la prueba de Empiricismo ingenuo con aspectos de ejemplo genérico y experiencia mental por lo mostrado en los anteriores apartados.
Para iniciar con la demostración, el estudiante 2 parte de la figura y empieza a mencionar propiedades que puede utilizar para realizar conjeturas (ver figura 6).	Para realizar la comprobación, se ponen de antemano los criterios expuestos por Balacheff (2000). Se obtiene así: ✓Una cadena deductiva con estructura lógica. ✓Validez de lo que se quiere probar. (Veracidad de



El estudiante a través de lo que construyó logra con viñetas efectivamente demostrar que $\angle P \cong \angle Q$, además hace uso de propiedades como la semejanza y la congruencia.

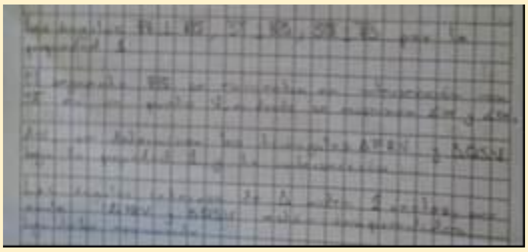


Figura 6. Extracto de la demostración desarrollada por el estudiante 2.

Finalmente, a través del uso de software GeoGebra, el estudiante logra validar que la afirmación es demostrable y verdadera.

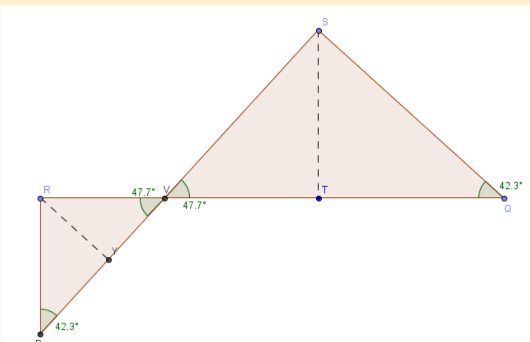


Figura 7. Construcción de la situación donde se evidencia que es demostrable.

las afirmaciones).

- ✓Ciertas etapas de la demostración pueden estar no explícitas; el descubrirlas depende del lector.
- ✓Lenguaje y simbología formal.
- ✓Entender desde una axiomática.
- ✓Convencer a la comunidad matemática, más que a alguna otra comunidad específica o a sí mismo.
- ✓Rigor.

El estudiante toma lugar dentro del lenguaje y simbología formal dentro de la comunidad matemática con cierto rigor; no obstante, en ocasiones su escritura se hace demasiado explícita y describe más de lo que probablemente se esperaría dentro de las viñetas. Hay que tener en cuenta también que gran parte de toda su escritura hace parte de la *axiomatización* que él quiere involucrar, estableciendo así propiedades y utilizándolas de acuerdo a como él lo ve necesario, además de interponer algunos “subtítulos” dentro de la demostración tales como *propiedades*, *muestras y cosas para concretar*, que hacen parte de la misma axiomática que él quiere utilizar.

En este sentido, efectivamente se satisface la cadena deductiva con estructura lógica, denotando lo deductivo en base a afirmaciones generales, tomando casos particulares, saliéndose de lo meramente visual para establecer más argumentos generales con sus principios (o “subtítulos”) presentes, sin asumir nada más allá de lo establecido, sino por el contrario, deduciéndolo.

Finalizando, desde la idea de realizar la demostración para convencer a una comunidad matemática, se ve que el estudiante intenta realizar argumentos encadenados en aras de un completo convencimiento de la comunidad. Esto se ve en gran manera al involucrar, tanto su lenguaje formal como la axiomática que él puso a prueba dentro de la misma demostración; no obstante, al final de la demostración el estudiante se equivoca al determinar que los ángulos son semejantes (los triángulos son semejantes, los ángulos son congruentes, más no al revés) y esto bloquea de una manera importante la seriedad de la demostración, por lo que el convencimiento de la comunidad matemática se vería desmoronado y por ende se perdería tal aspecto para determinar el trabajo como una *demostración*, además de que al mantener este error se perdería la validez de la argumentación y también de la demostración ofrecida.

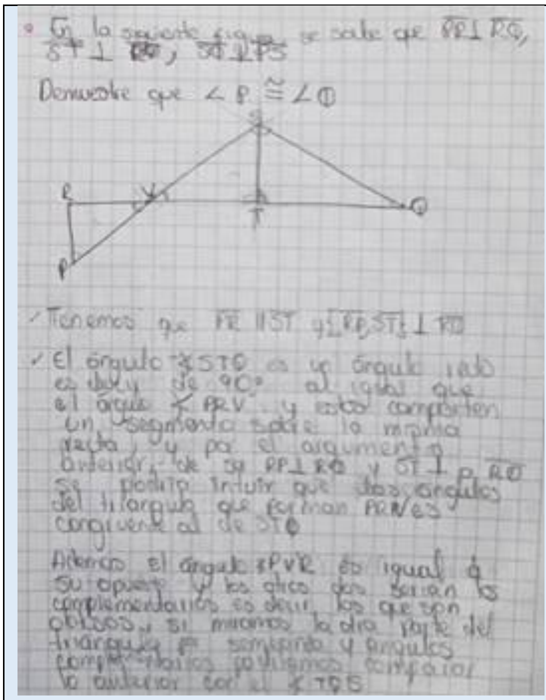


Figura 8: Demostración desarrollada por el estudiante 3.

En la figura 8, el estudiante empieza a desarrollar la demostracion hablando de lo elementos con los que cuenta (lo dado) y después empieza a generar conjeturas en relación a lo dado. Por ejemplo habla de que tiene ángulos rectos y puede a partir de las figuras deducir que los triángulos que se forman son congruentes, en este sentido, puede hablar de la igualdad de los ángulos y finalmente concluir en lo que quiere concluir.

Lo desarrollado por el estudiante 3 se limita a dos momentos, los cuales refieren a:

- Inferir información respecto a los datos que son presentados inicialmente, en ese sentido da por demostradas y válidas las características que presenta la figura y a partir de ello trabaja en mecanismos de transformación.
- De acuerdo con lo que logra validar hace uso de los datos para establecer diferentes relaciones entre los mismos.

Respecto a las inferencias que se pueden sacar de la demostración y los contrastes con el marco referencial planteado, se presentan los siguientes aspectos

- ✓ El estudiante menciona algunas relaciones entre los elementos presentados, pero no logra construirlas de manera formal por lo que de acuerdo a los niveles planteados por Balacheff (2000) la demostración presentada está todavía en un nivel de prueba.
- ✓ El estudiante logra construir y validar una conjetura respecto a los datos presentados, pero no hace uso de ésta para la demostración de la propiedad presentada en el enunciado.
- ✓ Ejecuta un uso de propiedades de ángulos, paralelismo, congruencia y semejanza, que en esencia no recaen en ningún tipo de solución formal en ese sentido son presentadas de manera suelta.

Para concluir, se clasifica esta "demostración" como una prueba de Empiricismo ingenuo en tanto el desarrollo presentado es inductivo, se hacen algunas verificaciones de los datos presentados y en esencia el estudiante usa primordialmente lo presentado tanto en la representación gráfica como en el propio teorema para la validación de la hipótesis.

En relación con los aspectos relacionados con la competencia comunicativa para este caso se usa la competencia discursiva en tanto logra hacer un escrito de forma coherente, en el cual se lleva una idea concreta de construcción dando una estructura coherente a la demostración.

Tabla 2. Organización de la información de la demostración de cada uno de los estudiantes en la que se tiene en cuenta la evidencia y las inferencias junto con la relación teórica.