Conferencias Plenarias

Conferencia de apertura del congreso

LA INVESTIGACIÓN EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA Y LAS PRÁCTICAS DE ENSEÑANZA: ALGUNAS PROPUESTAS

Cristina Ochoviet
Departamento de Matemática del Consejo de Formación en Educación
cristinaochoviet@gmail.com

Itinerario

1. Contextualización de la reflexión.
2. ¿Qué puede aportar la investigación en Didáctica de la Matemática a la enseñanza? Algunos ejemplos.
3. Propuesta de posgrado en Didáctica de la Matemática en el marco del Sistema Nacional de Educación Pública.
4. Reflexiones finales.

1. Contextualización de la reflexión

Los problemas existentes en la enseñanza de la matemática en nuestro país no son nuevos para nadie. Autoridades, docentes, padres, alumnos, hacen explícita su preocupación, que es divulgada en diversos medios masivos de comunicación. Desde diversos ángulos se plantean recomendaciones y sugerencias con el fin de mejorar los aprendizajes. Pero la pregunta clave es: ¿en qué se fundamentan esas recomendaciones y esas sugerencias?

A nivel internacional, existe hoy en día una producción extraordinaria de resultados de investigación en educación matemática que son publicados en un sin fin de revistas especializadas y brindan información muy rica acerca de la problemática del campo.

En nuestro país la investigación en Didáctica de la Matemática es casi inexistente, en el ámbito de formación docente podríamos decir que se encuentra en estado incipiente, existen a nivel nacional algunos esfuerzos que se realizan más que nada a nivel individual o en pequeños grupos de trabajo y emprendimientos a nivel de algunas instituciones privadas que ofrecen posibilidades de cursar estudios de postgrado y que por supuesto incluyen la formación en investigación. Podríamos preguntarnos -aunque la respuesta es inmediata- cuáles son las ofertas de postgrado que ofrece el Sistema Nacional de Educación Pública para que los profesores de matemática puedan continuar perfeccionándose, por ejemplo, en aquello para lo cual se han formado: *la tarea de enseñar matemática*.

Tal como lo señala Gatti (2009) "La oferta de formación universitaria de grado y postgrado en materia educativa se ha convertido en un nicho de mercado tentador para las agencias transnacionales. Las Universidades privadas están desarrollando planes en este sentido" y agrega "Algunos valoran positivamente cómo ha revitalizado la vida académica esta oferta privada. Otros, en cambio, opinan que «capturar la formación de los profesionales de la educación —mediante la liberalización al juego del ''libre mercado''— puede ser un buen negocio para el ámbito privado.

Ante esto, se sostiene que el Estado no puede quedar omiso y dejar la formación docente pública en un nivel de educación terciaria no universitaria, lo que dejaría en desventaja a sus egresados en relación con aquellos que cursen carreras en el ámbito privado. Dados estos procesos de mercantilización de la educación, se plantea como una cuestión de soberanía nacional la formación de profesionales de la educación de nivel superior, como un bien público no negociable en el mercado transnacional» (CODE[1], 2006b: 38)". [1] Comisión Organizadora del Debate Educativo.

2. ¿Qué puede aportar la investigación en Didáctica de la Matemática a la enseñanza? Algunos ejemplos.

La NCTM (2000) señala –sin desconocer la complejidad del acto de enseñar– que una enseñanza efectiva de la matemática requiere de docentes con amplios conocimientos matemáticos, conocimiento de las ideas centrales de cada nivel escolar, conocimientos sobre los desafíos que enfrentarán los estudiantes al estudiar esas ideas, conocimiento sobre la manera en que esas ideas pueden ser representadas para ser enseñadas y conocimiento acerca de cómo puede evaluarse la comprensión de esas ideas. Particularmente, la NCTM enfatiza la necesidad de que los docentes conozcan las ideas con las que los estudiantes frecuentemente tienen dificultades y la manera de ayudarlos a superarlas.

Todo docente tiene un vasto conocimiento del tipo de errores más frecuentes que cometen sus estudiantes, de los conceptos que resultan difíciles de comprender y del tipo de actividades que resultan adecuadas e interesantes para el estudio de los diferentes contenidos matemáticos de los programas escolares. Sin embargo, la investigación puede ofrecernos miradas más profundas sobre las dificultades que habitualmente detectan los docentes en sus aulas y sobre otras, quizás, no tan visibles en el quehacer habitual del profesor y de la natural observación de sus estudiantes y su proceso de estudio. Como afirma Margolinas (1998) para que un hecho didáctico se transforme en fenómeno didáctico, debe ser entendido además de constatado y para ello es necesario interpretarlo a la luz de una teoría.

* Papaieronymou (2007)

Pidió a los estudiantes dar “una ecuación que tiene 2 como solución”, obtuvo las siguientes respuestas:

$$1 + x = 2$$
$$1 + 1 = 2$$
$$12 - x = 2$$
$$10 \div x = 2$$

Estudiantes uruguayos de 14-15 años y de 17-18 años.

Escribe una ecuación que tenga raíz 8. ¿Cómo lo haces?

Edad	No contestan	Resuelven con éxito	La ecuación encontrada no tiene raíz 8
14-15 años	1	11	2
17-18 años	0	12	2

	Correctas	Incorrectas
Ejemplos de ecuaciones que tienen raíz 8, presentadas por estudiantes de 14-15 años (correctas o incorrectas)	$x - 8 = 0$ $8 - x = 0$ $4 + 4 = x$ $16 - 8 = x$ $x + 2 = 10$ $-2 + 2x = 14$ $x + 8 = 16$ $2x + 3 = 19$ $(x - 8)x = 0$	$= 1,8x + 3,2$

Ejemplos de ecuaciones que tienen raíz 8, presentadas por estudiantes de 17-18 años (correctas o incorrectas)	*2x2 - 16x = 0* *x(x – 8) = 0* *x – 8 = 0* *2x – 16 = 0* *16 – 2x = 0* *4x – 32 = 0*	*x2 = 8* *128x2 – 2 = 0*

* Carpenter, Franke y Levi (2003)

Completa

8 + 4 = ___ + 5
8 + 4 = ___ + 5
8 + 4 = ___ + 5

* Pico (2008)

Completa

8 + 4 = ___ + 5	
8 + 4 = 7 + 5	3 niños
8 + 4 = 12 + 5	10 niños
8 + 4 = 12 + 5 = 17	7 niños
8 + 4 = 17 + 5	1 niño

Comentarios de los alumnos:

¿Después del + 5, ponemos igual?
¿Dónde va el resultado?
¿Qué hacemos con ese 5?

Completa:

___ = 8 + 9
17 = 8 + 9
4 + 4 = 8 + 9
10 + 7 = 8 + 9

Comentarios de los alumnos:

¿Esta cuenta la hacemos al revés?
Yo la hice al revés.
Yo no entiendo.

Indica Verdadero o Falso (algunos ejemplos)

	Verdadero	Falso
9 = 9	15	6
8 x 5 = 5 x 8	20	1

Comentarios de los alumnos:
Para 9 = 9

- *No entiendo como es que 9 da 9.*
- *¿Es como poner 9 + 0 = 9?*

Para 8 X 5 = 5 X 8

- *Es V porque* 8 x 5 = 40 y 5 x 8 = 40.
- *Es V porque 8 x 5 te da el mismo resultado que 5 x 8.*

Para 8 X 5 = 5 X 8

- *Es V porque en las multiplicaciones se puede poner el segundo número primero y el primero, segundo y el resultado es el mismo.*
- *Es F porque 8 x 5 no te puede dar una multiplicación.*
- *Es F porque hice la cuenta mental y no es igual porque 8 x 5 es 40 y no, 5 x 8.*

* Carpenter, Franke y Levi (2003) sugieren que para presentar el uso del signo de igual a los niños, se propongan actividades que promuevan el entendimiento de la relación entre dos cantidades y no únicamente como indicación de que debe realizarse una operación.

Son ejemplos de estas actividades trabajar con la interpretación de oraciones numéricas como 5 = 5, 9 = 8 + 1, 4 + 3 = 4 + 3.

* Kieran (1981) señala que no existe evidencia que sugiera que los niños cambian su pensamiento sobre la igualdad, a medida que progresan hacia grados superiores.
Kieran refiere a Behr (1976) quien propuso a niños igualdades como 4+5=3+6. Una respuesta frecuente fue que "luego del `=´ debe estar la respuesta. Es el final, no otro problema" seguidamente escribían dos igualdades "4+5=9" y "3+6=9".

Kieran señala que varios estudios realizados con estudiantes de 12 a 14 años detectaron que estos describen el significado del signo de "igual" en términos de "una respuesta" y proponen ejemplos que involucran una operación en el lado izquierdo y su resultado en el derecho.

Quizás esto pueda explicar -en parte- el problema que me comentó una colega al leer mi comunicación, donde me manifestaba la dificultad de sus estudiantes para trabajar con ecuaciones como $3(x + 4) = x - 2$ manteniendo ambos miembros. Mi colega observaba que los estudiantes escriben $3(x + 4) = 3x + 12$ y "pierden" la ecuación…

* Vaiyavutjamai y Clements (2006)

Resolver la ecuación:

$$(x - 3)(x - 5) = 0$$

Los alumnos responden que tiene 3 y 5 como soluciones.

Al momento de verificar, plantean lo siguiente:

$$(3 - 3)(5 - 5) = 0$$

Este mismo fenómeno se observó también en el contexto de ecuaciones de primer grado. Para ilustrar esta concepción errónea Fujii (2003) propuso a los estudiantes:

María tiene que resolver el siguiente problema
"Encuentra el valor o los valores de x en la expresión
$x + x + x = 12$"

Contestó de la siguiente manera.

a. 2, 5, 5
b. 10, 1, 1
c. 4, 4, 4

¿Cuál o cuáles de sus respuestas son correctas? (Circula la o las opciones que son correctas: a, b, c)

A un estudiante que eligió las tres opciones como soluciones aceptables se le preguntó si $x + x + x$ se puede reemplazar por $3x$, y él contestó:

Se puede, pero también puede ser incorrecto. Depende de a qué es igual la x, porque x puede ser igual a 10, la primera x, y luego la segunda x puede ser igual a 2.

A dos grupos de estudiantes uruguayos (14 alumnos en cada grupo) se les propuso:

Escribe una ecuación que tenga por raíces a 4 y 3. ¿Cómo lo haces?

Edad	No contestan o no concluyen	Resuelven con éxito	La ecuación encontrada no tiene por raíces a 4 y 3
14-15 años	5	3	6
17-18 años	1	12	1

Edad	Trabajo presentado por el estudiante	Trabajo presentado por el estudiante	Argumento
17-18 años	$(x - 4)(x - 3) = 0$		*"Busco ecuaciones por las cuales al sustituir x por 4 y por 3 me dé 0"*
17-18 años	$(x - 4)(x - 3) = 0$		*"Los opuestos son las raíces"*
17-18 años	$(x - 4)(x - 3) = 0$		*"Escribo un producto que tenga 2 soluciones y que a cada factor si le sustituyo por la raíz me dé por lo menos un factor 0"*
14-15 años		$(x - 4)(y - 3) = 0$	*"Busco los números opuestos a 4 y 3"*
14-15 años		$(x + 3) = (y + 1) + 1$	*Sin argumento*
14-15 años	$(x - 4)(x - 3) = 0$		*"Realizo una ecuación donde esté la x y el opuesto a 4 y 3"*

* Wagner (1993) sostiene que
“las letras son fáciles de usar pero difíciles de comprender”.

Señala que una de las dificultades radica en que “las letras son similares a las palabras pero diferentes”.

Si queremos sustituir x en $3(x + 2) + 5 = 17 - 2x$, debemos asignarle a x el mismo valor en cada ocurrencia, mientras que en una misma oración una misma palabra puede tener significados distintos.

“La suma de un número par y un número impar es siempre un número impar”.

La reflexión de Wagner es fácil de visualizar si cambiamos el sistema de representación por el que habitualmente se utiliza con los estudiantes antes de introducir letras en situaciones donde se pide completar los términos que faltan:

Completa:

$$25 + 32 + \_\_\_ + \_\_\_ = 80$$

Esta actividad está extraída de un libro de texto de primer año de CB en la unidad Número Natural, si se esperara que los estudiantes colocaran el mismo número en ambos cuadros, no podrían utilizarse números naturales. Por tanto podría inferirse que no se espera que en ambos cuadros se coloque el mismo número. Algunas veces el uso de estos cuadros constituye un paso previo a la introducción de las letras pero obsérvese que su funcionamiento es distinto.

Wagner sugiere que en la enseñanza se debe ayudar a los estudiantes a reconocer que una letra es similar a una palabra en el sentido de que puede tener distintos significados en distintos contextos pero una letra es diferente de una palabra porque debe referir a lo mismo en un mismo contexto.

Cuando se reporta este tipo de problemática alguien podría pensar en que se trata de alumnos pequeños, que están dando sus primeros pasos en el estudio del álgebra y que aún no han finalizado la enseñanza media. Veremos ahora el caso de una estudiante uruguaya de tercer año de profesorado que muestra la persistencia de una concepción errónea en torno al problema de la asignación simultánea de distintos valores a la x en la ecuación $(2x-6)(5x+10)= 0$.

El caso de Camila (27 años)

Entrevistador: Te quería preguntar... *Resuelve en R esta ecuación. Verifica la o las soluciones que obtengas*. Mencionaste que aplicabas la propiedad Hankeliana y hallaste las raíces 3 y –2. ¿Cómo hacés la verificación?
[Se refiere a $(2x-6)(5x+10)=0$]

Camila: No, no lo hago así. Hallé las raíces y no sé por qué (risas) puse en cada uno de donde salió cada una de las raíces, sustituí el valor, pero no verifico así. Verifico una toda con el valor 3 y toda la otra con el valor –2. Yo llegué porque me daba cero por cero igual a cero.

Entrevistador: Pero aquí cuando lo hiciste en qué pensaste.

Camila: No sé en qué pensé pero nunca hago eso. No sé si capaz que lo hacia cuando iba al liceo pero hace años... Además cuando yo hago problemas, así de cuentas, lo hago muy prolijo, paso por paso y después verifico y nunca me mando eso.

Entrevistador: ¿Y cómo hacés la verificación?

Camila: Pruebo con un valor y después pruebo con el otro, independientemente uno del otro.

La entrevista continúa...

Entrevistador: ¿Y qué pasaría si tú sustituyeras aquí 4 y aquí 7?
[Se refiere a $(2x-8)(x+7)= 0$]

Camila: Al sustituir aquí por 4, este factor ya es 0, entonces aquí x valga lo que valga, el producto ya va a ser cero y se va a verificar la ecuación.

Entrevistador: ¿Y qué quiere decir eso?

Camila: No, pero aquí puede ser 7 o puede ser cualquier otro número, porque este factor no me está, o sea, el que está dando importancia es éste, no sé cómo decirlo, el que está determinando que la igualdad sea cero, porque éste se está haciendo cero cuando x vale 4, éste no importa la x que sea.

* Vaiyavutjamai, Ellerton y Clements (2005)

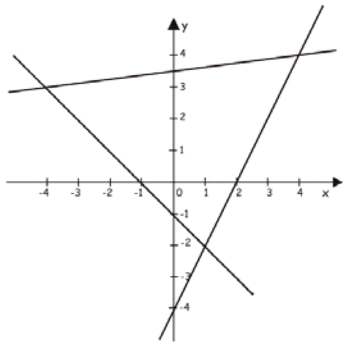
Resultados correspondientes a 29 estudiantes universitarios de segundo año que se formaban como profesores de matemática para la enseñanza media.

Consigna: Considera la ecuación $(x-3)(x-5)=0$	Verdadero	Falso
1. Si en el primer paréntesis x toma valor 3, en el segundo, x debe ser igual a 5.	10	19
2. Si en el primer paréntesis x toma valor 3, en el segundo, x puede puede tomar cualquier valor real.	3	26
3. Si en el segundo paréntesis x toma valor 5, en el primero, x puede tomar cualquier valor real.	3	26
4. Esta ecuación es equivalente a $x2-8x+15=0$, que es una ecuación cuadrática con dos soluciones. Por tanto, en $(x-3)(x-5)=0$, la x del primer paréntesis siempre toma valor 3, y la x del segundo paréntesis siempre toma valor 5.	16	13

Los ejemplos que hemos visto ponen en evidencia algunas concepciones de los estudiantes que podrían ser útiles para los docentes para formular preguntas, diseñar actividades o conducir situaciones de clase. La información que emerge de la investigación es muy útil al docente porque incrementa su conocimiento sobre las dificultades de los estudiantes y le permite ayudarlos de mejor manera en el desarrollo del pensamiento matemático.

Estudiantes uruguayos de 14-15 años y de 17-18 años

1) A continuación aparecen graficadas las rectas asociadas a un sistema de tres ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. ¿Cuántas soluciones tiene el sistema? ¿Por qué?



Respuestas de dos estudiantes de 15 años:

"En mi opinión tiene 3 soluciones, porque las rectas se cortan en 3 puntos diferentes, los cuales por lo menos en los sistemas de dos ecuaciones indican la solución"

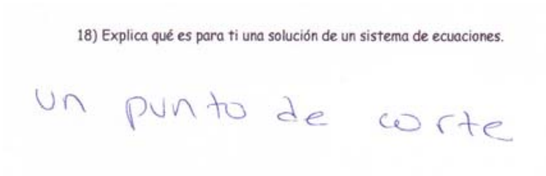
"Tres soluciones: porque las rectas se cortan tres veces formando tres puntos (soluciones)"

Se resumen las respuestas de uno de los grupos de 14-15 años y del grupo de 17-18 años

Grupo 1 (14-15 años)		
Respuestas a la pregunta 1	Número de alumnos	Porcentaje
El sistema no tiene solución	7	27
El sistema tiene tres soluciones	14	54
Otras respuestas	5	19
Total	26	100

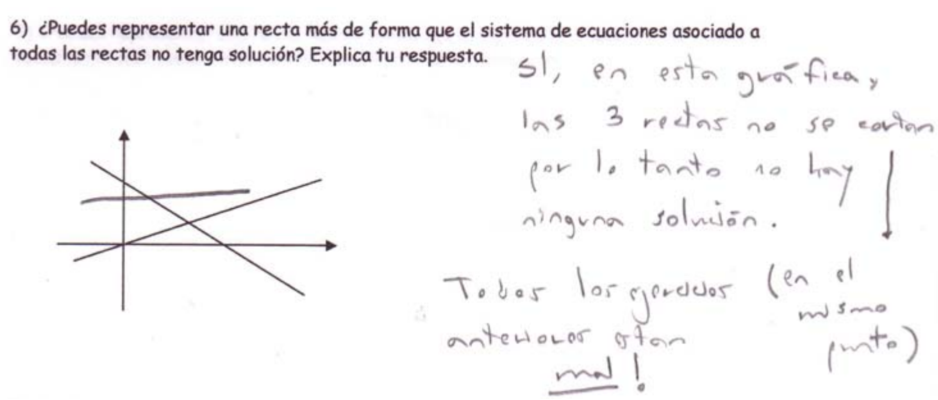
Grupo 3 (17-18 años)		
Respuestas a la pregunta 1	Número de alumnos	Porcentaje
El sistema no tiene solución	6	29
El sistema tiene tres soluciones	7	33
Otras respuestas	8	38
Total	21	100

Bruno de 18 años


18) Explica qué es para ti una solución de un sistema de ecuaciones.

Un punto de corte

El cuestionario propuesto a los estudiantes también permitió observar qué tipo de actividades contribuían a un cambio en las interpretaciones de los alumnos. Vemos un ejemplo tomado del trabajo de un estudiante de 15 años:


6) ¿Puedes representar una recta más de forma que el sistema de ecuaciones asociado a todas las rectas no tenga solución? Explica tu respuesta.

SI, en esta gráfica, las 3 rectas no se cortan (en el mismo punto) por lo tanto no hay ninguna solución.

Todos los graficos anteriores estan mal!

Citaré una frase de Bachelard en *La formación del espíritu científico*: "No es en plena luz, sino en el borde de la sombra donde el rayo, al difractarse nos confía sus secretos". Esta es una bella frase, bastante poética, análoga a la situación en la que nos encontramos: es en particular con los alumnos en dificultades y en el análisis de los errores que aprendemos más sobre la comprensión de la matemática. (Adda, 1987)

Propuesta de postgrado en Didáctica de la Matemática en el marco del Sistema Nacional de Educación Pública

Como decía al comienzo, la NCTM (2000) enfatiza la importancia de que los docentes conozcan las ideas con las que los estudiantes frecuentemente tienen dificultades y la manera de ayudarlos a superarlas. Una vía para lograr esto es el desarrollo de postgrados. Con esto no pretendo establecer que todo profesor debe formarse como investigador, pero lo que sí deseo señalar es que es necesario comenzar a construir una comunidad de investigadores en Didáctica de la Matemática en nuestro país, que mantenga fuertes lazos con el colectivo docente.

Posibilitar en nuestro país las condiciones para ejercer el derecho a la actualización permanente y al desarrollo de postgrados en el sistema nacional de educación pública aparece como una necesidad inminente para consolidar la profesionalización de los docentes y contribuir a la generación de conocimiento en torno al aprendizaje de la matemática en el Uruguay.

En el año 2008 fui convocada para integrar el Comité Académico de Postgrado en Didáctica de la Enseñanza Media y se diseñó la malla curricular del Postgrado en Didáctica de la Matemática para enseñanza media. El nivel de especialización de este postgrado fue oportunamente aprobado por CODICEN pero hasta el día de hoy se encuentra en suspenso su desarrollo. Les presento la malla curricular.

SEMESTRE I	Número de horas	SEMESTRE II	Número de horas	SEMESTRE III	Número de horas		SEMESTRE IV	Número de horas
Discusión epistemológica: Didáctica General, Didácticas Específicas	60	Taller de abordaje multi e interdisciplinario de las prácticas educativas	90	Investigaciones relativas a la enseñanza y el aprendizaje de la Probabilidad y la Estadística	60		El arte y la matemática: algunas relaciones paradigmáticas	45
Educación y articulación lenguaje-pensamiento	60	Investigaciones relativas a la enseñanza y el aprendizaje del Álgebra	60	Investigaciones relativas a la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo	60		La educación matemática desde una perspectiva crítica	45
Narración y educación	45	Investigaciones relativas a la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría	60	Situaciones de aprendizaje	60		La inclusión de la historia de la matemática en la enseñanza de la matemática: diferentes perspectivas	60
Metodología de la investigación	60	Análisis del Discurso Matemático Escolar	45	Laboratorio	90			
Didáctica de la Matemática/Educación Matemática/Matemática Educativa. Análisis de su	45	Metodología de la investigación en Didáctica de la Matemática I	45	Metodología de la investigación en Didáctica de la Matemática II	60	TESINA	TESIS	450

evolución y estado actual								
TOTAL	270	TOTAL	300	TOTAL	330	120	TESIS	600

A través de un convenio ANEP-UdelaR, se acordó que -en común acuerdo entre las partes y cumpliendo los procedimientos formales necesarios por parte de ambas instituciones- la UdelaR otorgaría los títulos de postgrado. Al día de hoy no tenemos noticias concretas del estado en el que se encuentra el procedimiento de aprobación. Al parecer el documento está a la espera de ser analizado por parte de la CAP de la UdelaR para que esta considere su aprobación. Mientras tanto el colectivo de docentes espera la oportunidad de que algún día se concrete el proyecto que les posibilite una vía de acceso formal al perfeccionamiento.

Reflexiones finales

Instalar en nuestro país las condiciones para desarrollar investigación en educación matemática aflora como una de las condiciones que contribuiría a entender mejor los actuales problemas que enfrenta la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, y a emprender proyectos de trabajo más adaptados a nuestra realidad educativa. No posibilitar el desarrollo del posgrado implica continuar postergando la formación cuaternaria de los profesores de matemática en el marco del Sistema Nacional de Educación Pública. Sería entonces importante que los docentes manifestáramos con mayor contundencia nuestras necesidades y exigiéramos el derecho a la formación permanente. Quizás sea oportuno, en esta coyuntura, parafrasear a la poetisa Tatiana Oroño que dice: *cuando no nos escuchan tenemos que levantar la voz*.

Muchas gracias