

GEOMETRÍA HIPERBÓLICA EN LA OBRA DE ESCHER

María Teresita Carrión – Daniela Pagés
pitacar@gmail.com – danielapages@gmail.com
 Consejo de Formación en Educación - Uruguay

Tema: Pensamiento matemático avanzado
 Modalidad: MC
 Nivel educativo: Formación y actualización docente
 Palabras clave: modelo, métrica, transformaciones isométricas.

Resumen

Atraídas por la obra del artista holandés M.C Escher, nos propusimos estudiar los conceptos matemáticos que subyacen en algunas de sus creaciones.

Así llegamos a la geometría hiperbólica, desarrollada por el genio conjunto de Bolyai y Lobachevsky, alrededor de 1830. Esta geometría es uno de los ejemplos del trabajo matemático de los hombres, que muchas veces resulta incomprendido por sus contemporáneos.

En este mini curso presentamos algunos elementos que nos aproximan a ese tema.

Tomando como modelo inicial el semiplano de Poincaré, a través de transformaciones de Möbius restringidas a coeficientes reales, que actúan como isometrías bajo una métrica conveniente, se pueden realizar teselaciones similares a las planas.

Pasaremos después al disco hiperbólico, otro modelo de Poincaré, que se deriva del anterior, ya que existe una transformación que actúa como una isometría entre ambos modelos.

El disco hiperbólico, con su métrica, permite la representación del plano (superficie no acotada) en una superficie aparentemente acotada (un círculo abierto) y la partición del mismo en regiones que desde el punto de vista euclídeo son distintas, pero que, hiperbólicamente son congruentes.

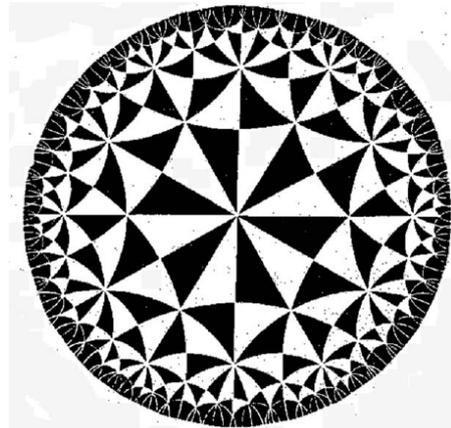
Se trabajará en una modalidad participativa, usando GeoGebra para que los participantes interactúen con los modelos de esta geometría.

Introducción

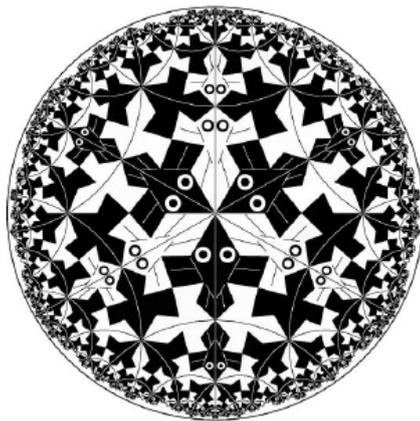
Maurits Cornelis Escher nació en Holanda el 17 de junio en 1898. Incluyó sus intereses a las artes gráficas, por lo que estudió en la Escuela de Arquitectura y Artes Decorativas de Haarlem. Trabajó fundamentalmente en grabados sobre madera y litografías, y muchas de las imágenes que produjo están inspiradas por las distintas nociones matemáticas de simetrías. Fue en su visita a Granada en 1936, donde se sintió deslumbrado por los mosaicos de la Alhambra, realizando un estudio exhaustivo de ellos, ya que allí se ofrece un catálogo completo de los diecisiete grupos cristalográficos.

Una vez que dominó este asunto, se preguntó si sería posible construir un mosaico que diera una idea de infinito, a través de losetas que manteniendo la forma, redujeran regularmente su tamaño. La respuesta la encontró en la geometría hiperbólica, en un

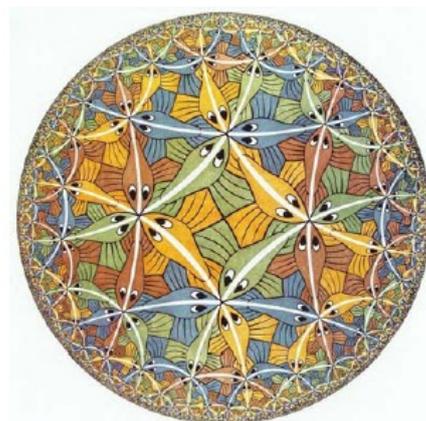
artículo del matemático Coxeter: “Crystal Symmetry and Its Generalizations” (1957) donde vio la siguiente ilustración:



que muestra una teselación del modelo del plano hiperbólico creado por Poincaré. Inspirado en esta imagen realizó la primera versión de Círculo Límite, que luego fue mejorando a medida que profundizó en el tema.



Círculo Límite I (1958)



Círculo Límite III (1959)

Geometría Hiperbólica

Gauss (1777 – 1855), Lobachevski (1793 – 1856) y Bolyai (1802 – 1860) trabajaron con el quinto postulado de Euclides, queriéndolo demostrar en un primer momento hasta deducir su independencia de los otros postulados. Así nació la Geometría Hiperbólica, la que no adquirió total apoyo de los matemáticos hasta que se empezaron a encontrar modelos, en particular los del semiplano y del disco debidos a Henry Poincaré (1854 – 1912).

El modelo del semiplano

Las geometrías no euclidianas, en particular la hiperbólica, se caracterizan por no cumplir con el quinto postulado de Euclides, o su reformulación como axioma del paralelismo, pero deben cumplir los restantes.

En el modelo del semiplano de Poincaré, el plano hiperbólico se representa por un semiplano abierto, que notaremos con H^2 , de borde Ω , los puntos coinciden con los puntos euclidianos, pero las rectas son arcos de circunferencias.

Partimos de que dados dos puntos, debe existir una única recta a la cual pertenecen (Postulado 1), pero sabemos que existen infinitas circunferencias por dos puntos, por lo que debemos agregar una condición extra.

Una forma de hacerlo consiste en tomar las circunferencias con sus centros sobre Ω (borde de H^2).

Los puntos de Ω no pueden pertenecer al modelo. De lo contrario, no se cumplirá el Postulado 1. La recta Ω divide al plano (euclidiano) en dos semiplanos, de los que uno solo (abierto) será nuestro plano hiperbólico H^2 .

Veremos que esto funciona. Tomemos dos puntos P y Q de H^2 . Si la recta PQ no es perpendicular a Ω , la mediatriz del segmento PQ interseca a Ω en un punto C , que será el centro de una circunferencia a la que P y Q pertenecen. Nuestra h -recta será la parte de esta circunferencia incluida en H^2 , que es una semicircunferencia abierta (ver figura 1).

Si la recta PQ es perpendicular a Ω , lo anterior no funciona, así que tomamos como h -recta PQ , la parte de dicha recta incluida en H^2 , que es una semirrecta abierta (ver figura 2).

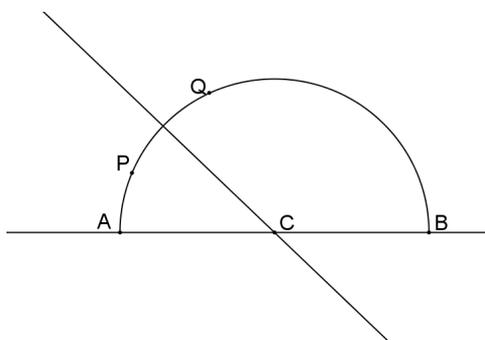


Figura 1

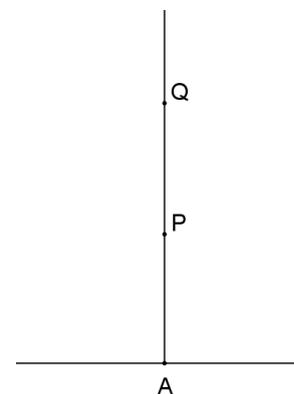


Figura 2

Los puntos de Ω se llaman *ideales*, o *puntos al infinito*. Los puntos ideales de la recta PQ de las figuras 1 y 2, son los puntos A y B en el primer caso y solamente A en el segundo caso.

Podemos observar que en este modelo no se cumple el postulado del paralelismo: *Por un punto que no pertenece a una recta dada, existe una única recta que no interseca a la primera.*

Esto se aprecia en la figura 3, donde hay cinco h -rectas por el punto P y ninguna corta a la recta s .

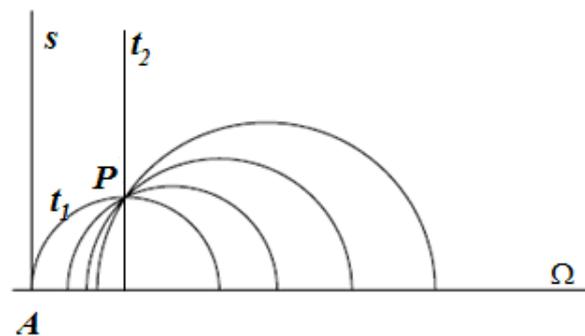


Figura 3

Entre las infinitas h -rectas por un punto P que no intersecan a una dada s , hay dos que se llaman *paralelas o hiperparalelas* (t_1, t_2) que son las que tienen un punto ideal común con la recta dada. Las otras se llaman *ultraparalelas* o simplemente disjuntas o no secantes.

En el plano hiperbólico entonces, distinguimos tres posiciones relativas de h -rectas:

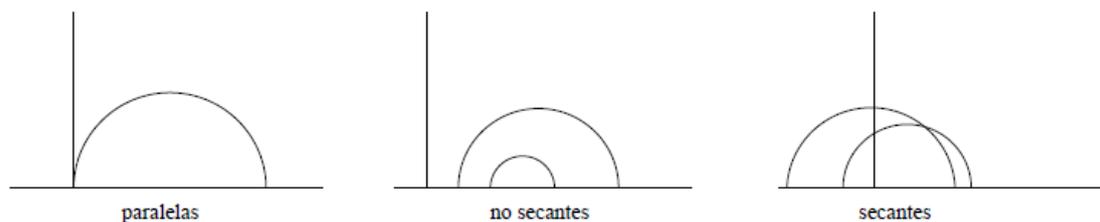


Figura 4

Dada una recta y un punto exterior a ella, existen dos rectas paralelas e infinitas no secantes a la recta dada por el punto dado.

Como las h -rectas son arcos de circunferencias, es natural asociar las simetrías axiales con inversiones o simetrías respecto a una circunferencia (ver Anexo 1) y sus composiciones serán las isometrías de la geometría hiperbólicas.

Se puede demostrar que todas ellas son transformaciones de Möbius.

La distancia hiperbólica

Las inversiones preservan ángulos y transforman h -rectas en h -rectas, pero no preservan las distancias euclídeas. Por lo tanto es necesario definir una distancia que sí se preserve en las inversiones para que puedan llamarse isometrías.

Como las inversiones conservan las razones dobles generalizadas, podríamos pensar en definir la distancia a partir de esa propiedad, pero para que se cumpla la propiedad de aditividad, agregamos la función logaritmo.

Así es que se define la distancia hiperbólica (d_H) entre dos puntos P y Q de H^2 por:

$$d_H(P, Q) = \left| \ln(P, Q, A, B) \right|$$

donde A y B son los puntos ideales de la recta PQ .

Si la recta PQ es perpendicular a Ω (borde de H^2) y A es su punto ideal, entonces

$$d_H(P, Q) = \left| \ln(P, Q, A, \infty) \right| = \left| \ln(P, Q, A) \right| = \left| \ln \frac{PA}{QA} \right|$$

$$\text{Por lo tanto, } d_H(P, Q) = \begin{cases} \left| \ln |PA| - \ln |QA| \right| & \text{si } PQ \perp \Omega, \text{ siendo } \{A\} = PQ \cap \Omega \\ \left| \ln \frac{|PA| \cdot |QB|}{|QA| \cdot |PB|} \right| & \text{si } PQ \not\perp \Omega, \text{ siendo } \{A, B\} = PQ \cap \Omega \end{cases}$$

También podemos observar qué sucede cuando fijamos el punto P , y el Q tiende a la posición de A o de B . En cualquiera de los dos casos la distancia hiperbólica tiende a infinito en orden logarítmico.

Ángulo de paralelismo

Dada una h - recta s y un punto P que no le pertenece, consideramos el punto D de s tal que PD sea perpendicular a s .

Ahora, sea n una de las paralelas a s por P .

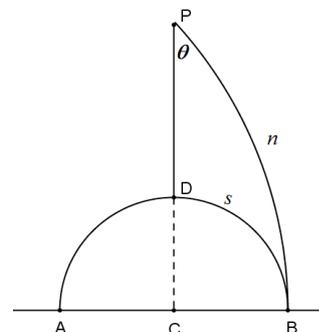


Figura 5

El ángulo θ que forman n con PD se llama ángulo de paralelismo. Cualquier otra h -recta por P no secante a s formará con PD un ángulo mayor que éste.

Mientras que en la geometría euclidiana el ángulo de paralelismo es siempre $\pi/2$, en la hiperbólica este varía y depende de la longitud del segmento PD . Se puede demostrar que $\sin \theta = \cosh(d_H(P, D))$. (Ver anexo 2)

Si la distancia entre P y D tiende a 0, el ángulo de paralelismo tiende a $\pi/2$.

A partir de esto, por cálculos que exceden el alcance de este curso, se demuestran muchas propiedades de los triángulos hiperbólicos, como que dos triángulos son congruentes si y solo si sus ángulos son congruentes y que el área de un triángulo con ángulos α, β, γ es igual a $\pi - (\alpha + \beta + \gamma)$.

El modelo del disco

Este modelo de Poincaré se puede obtener a partir del modelo anterior por medio de una inversión respecto a una circunferencia.

Si Ω es el eje de las abscisas de un sistema de coordenadas y H_2 el semiplano superior, con una inversión de centro $(0, -1)$ y radio $\sqrt{2}$, se puede mostrar fácilmente que la imagen de Ω es la circunferencia Ω' de centro $(0, 0)$ y radio 1 y los puntos de H_2 se corresponden con los puntos interiores a dicha circunferencia.

Las h -rectas en el nuevo modelo son arcos de circunferencias y segmentos ortogonales a la circunferencia Ω' ya que las inversiones conservan los ángulos.

Por este motivo, todo lo visto en el semiplano se extiende al disco.

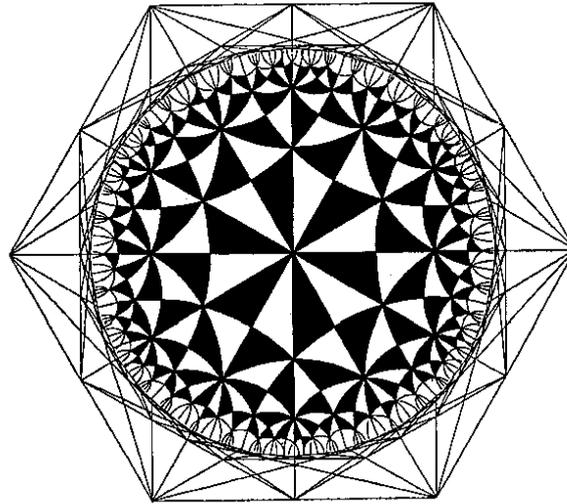
Escher y la geometría hiperbólica

Alrededor de 1956 los intereses de Escher cambian hacia la representación de teselados en cuadrados y discos. Es entonces que comienza a interesarse por la teselación hiperbólica.

En 1954 Escher conoció al matemático Coxeter, en oportunidad del Congreso Internacional de Matemática, donde se expusieron obras del artista.

En 1958 Escher le escribió a Coxeter, contándole que una de las figuras de un artículo suyo lo había fascinado, porque le permitió entender lo que él hacía tiempo estaba buscando para sus obras.

Escher se refería a la siguiente figura:



En esta carta Escher pide a Coxeter más explicaciones sobre cómo construir las circunferencias que forman los lados de los polígonos de la teselación. Le manda una copia de “Círculo Límite I”.

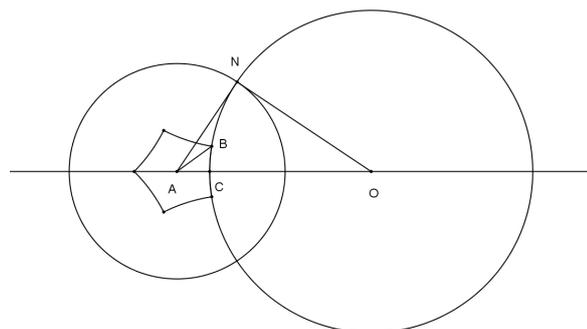
En su respuesta, Coxeter explica a Escher los elementos de la teselación del plano hiperbólico, usando el modelo del disco de Poincaré. A partir de esto, le indica cómo situar los centros de las circunferencias que Escher necesita.

Teselaciones en el plano hiperbólico

Una teselación regular del plano consiste en cubrir todo el plano con polígonos regulares. Mientras que el plano euclidiano existen sólo tres teselaciones regulares (con triángulos equiláteros, cuadrados o hexágonos), en el plano hiperbólico es posible construir infinitas teselaciones. Estas están determinadas por dos variables: p , el número de lados del polígono regular y q , el número de polígonos que concurren a un vértice.

El polígono central recibe el nombre de región fundamental, ya que una vez construido, por medio de inversiones respecto a sus lados, determinamos toda la teselación.

Para construir el polígono central analizamos la figura adjunta:



El triángulo hiperbólico $\triangle ABC$ de la figura, cumple que $\hat{A} = \pi/p$, $\hat{B} = \pi/q$, $\hat{C} = \pi/2$.

Tomamos $NO = r$, $AO = d$, $s = \sin(\pi/p)$ y $c = \cos(\pi/q)$.

Aplicamos el teorema del seno al triángulo euclidiano $\triangle ABO$, donde $\hat{ABO} = \hat{B} + \frac{\pi}{2}$,

obteniendo: $\frac{d}{\cos \hat{B}} = \frac{r}{\sin \hat{A}}$ y el de Pitágoras al $\triangle NAO$, rectángulo en N: $d^2 - r^2 = 1$ se

llega a $d = \frac{1}{\sqrt{1 - (s/c)^2}}$ y $r = \frac{1}{\sqrt{(c/s)^2 - 1}}$

En la primera jornada del minicurso trabajaremos con los elementos básicos de la geometría hiperbólica, así como los modelos del semiplano y del disco de Poincaré. Utilizaremos el programa GeoGebra como herramienta para la visualización de los elementos esenciales de estos modelos, así como de los resultados que vamos a demostrar. En particular, trabajaremos con la inversión como isometría en la geometría hiperbólica.

En la segunda jornada realizaremos teselaciones del disco hiperbólico y analizaremos el grabado “Círculo Límite III” de Escher.

Referencias bibliográficas

Corrales Rodríguez, C. (2005). Escher 1: Las matemáticas para construir. *Suma*, 49, 101 – 108.

Coxeter, H. (1969) *Introduction to Geometry*. New York: John Wiley & Sons, Inc.

Coxeter, H. (1979). The Non – Euclidean Symmetry of Escher’s Picture “Circle Limit III”. *Leonardo*, 12(1), 19 – 25.

Coxeter, H (1997). The trigonometry of hiperbolic tessellations. *Canada Math. Bull.* 40 (2), 158-168. Recuperado de <http://cms.math.ca/cmb/v40/p158>

Santaló, L. (1966). *Geometrías no euclidianas*. Buenos Aires: Universitaria.

The M. C. Escher Company B. V. The official website. <http://www.mcescher.com/>
Consultado 25/07/2013.

Toth, G. (2002). *Glimpses of Algebra and Geometry*. New York: Hamilton Printing Co.

ANEXO 1 – LA INVERSIÓN

El concepto de inversión extiende la idea de simetría axial, sustituyendo el eje por una circunferencia fija.

Definición:

Dada una circunferencia fija C de centro O y radio r , llamamos inversión (o simetría con respecto a C), a la función que a cada punto P distinto de O , le hace corresponder un punto P' de la semirrecta de origen O que contiene a P tal que $\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^2$.

El punto O se llama centro de inversión, y la circunferencia C , circunferencia de inversión.

Para extender el concepto de inversión a todo el plano y que sea una función biyectiva del mismo, podemos decir que la imagen del centro O es el punto infinito, pero esto supone introducir este punto y definir el plano ampliado, agregando este punto.

Propiedades de la inversión:

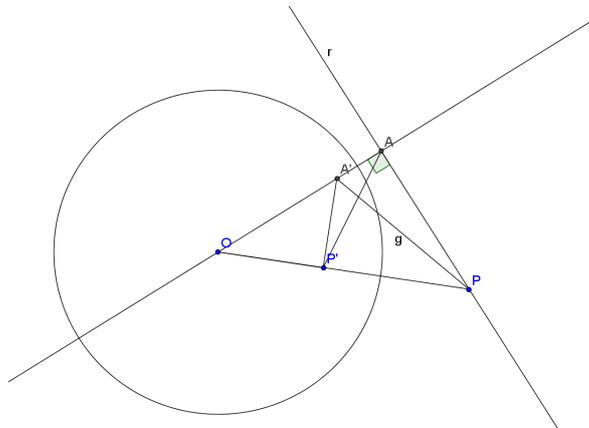
- 1) *La inversión es una transformación involutiva.*
- 2) *Todo punto de C es fijo en la inversión respecto a C .*
- 3) *Toda recta que pasa por el centro de inversión es invariante en dicha inversión.*
- 4) *La inversa de una recta que no pasa por el centro de inversión, es una circunferencia que pasa por dicho centro.*
- 5) *La inversa de una circunferencia Ω que pasa por el centro de inversión, es una recta que no pasa por dicho centro.*
- 6) *La inversa de una circunferencia que no pasa por el centro de inversión, es otra circunferencia a la que tampoco pertenece dicho punto.*
- 7) *La inversión es una transformación conforme, ya que preserva las medidas de los ángulos.*
- 8) *Si A y A' se corresponden en una inversión respecto a C , toda circunferencia que pase por A y A' es ortogonal a C .*
- 9) *Las inversiones conservan la razón doble generalizada.*

A modo de ejemplo, demostraremos algunas de las propiedades enunciadas:

Demostración de la propiedad 4:

Sea r una recta a la que O no pertenece. Sea A el pie de la perpendicular trazada por O a la recta r , y sea P otro punto cualquiera de r . Si efectuamos la inversión a los puntos A y P , determinando los puntos A' y P' respectivamente, tenemos que:

$$\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = \overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^2, \text{ de donde: } \frac{\overline{OA}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OP'}}{\overline{OA'}}$$

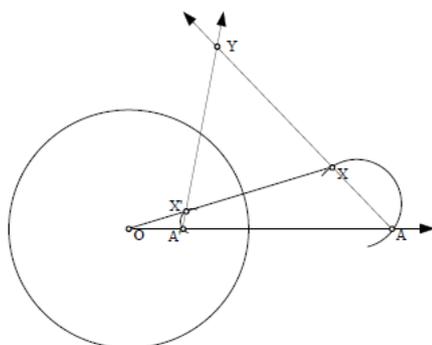


De la igualdad anterior se deduce que los triángulos $OP'A'$ y OAP son semejantes, y entonces los ángulos $OP'A'$ y OAP son iguales. Como OAP es recto, llegamos a concluir que $OP'A'$ también lo es. Como O y A son fijos, resulta que para todo P de la recta r se cumple que su inverso pertenece a la circunferencia de diámetro OA . Con esto queda demostrada la propiedad.

Demostración de la propiedad 7:

Sea X una circunferencia (o recta), y A un punto de ella. La recta OA (siendo O el centro de inversión) es invariante, entonces alcanza con demostrar que el ángulo determinado por esta recta y X , de vértice A , es el mismo que el ángulo entre esta y la inversa X' de X en el punto A' inverso de A .

Dado P un punto cualquiera de X , sea P' su inverso. Sea Y el punto de intersección de las rectas AP y $A'P'$. Se cumple que: $\angle OP'A' = \angle OAP$ (semejanza de triángulos).



A partir de lo anterior, tenemos: $\angle OA'P' + \angle AOP = \angle YAO = \pi - \angle PAO$

Además, el ángulo entre la recta OA y la tangente por A es el ángulo adyacente al ángulo límite de $\angle OAP$ cuando P se aproxima a A . Este ángulo se transforma por la inversión en el ángulo límite de $\angle OA'P'$ cuando P' tiende a A' .

Tomando límites, cuando P tiende a A , tenemos:

$$\lim_{P \rightarrow A} \angle OA'P' + \lim_{P \rightarrow A} \angle AOP = \lim_{P \rightarrow A} \angle YAO = \lim_{P \rightarrow A} (\pi - \angle PAO)$$

Es decir: $\lim_{P \rightarrow A} \angle OA'P' = \lim_{P \rightarrow A} (\pi - \angle PAO)$

Demostración de la propiedad 9:

Dados cuatro puntos arbitrarios A, B, C, D del plano, se define la razón doble

generalizada al siguiente número real: $[A, B, C, D] = \frac{\overline{AC} / \overline{BC}}{\overline{AD} / \overline{BD}}$

Observamos que si los puntos están alineados, la razón doble generalizada coincide con la razón doble, excepto por el signo, ya que esta es siempre positiva.

Sean A', B', C', D' las imágenes de los puntos A, B, C, D de una inversión de centro O y radio r .

En la figura observamos que los triángulos OAB y $OB'A'$ son semejantes y por lo tanto se cumple que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB'}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA'}} \quad (1)$$

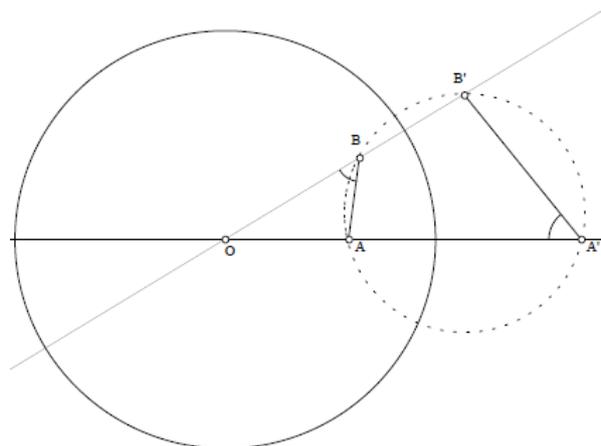
Entonces, planteamos

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{OA}} \cdot \frac{\overline{OA}}{\overline{AD}} \stackrel{(1)}{=} \frac{\overline{A'C'}}{\overline{OC'}} \cdot \frac{\overline{OD'}}{\overline{A'D'}}$$

y
$$\frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{OB}} \cdot \frac{\overline{OB}}{\overline{BD}} \stackrel{(1)}{=} \frac{\overline{B'C'}}{\overline{OC'}} \cdot \frac{\overline{OD'}}{\overline{B'D'}}$$

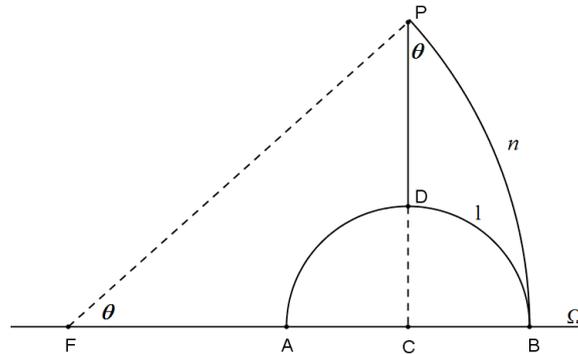
Por lo tanto:

$$[A, B, C, D] = \frac{\overline{AC} / \overline{BC}}{\overline{AD} / \overline{BD}} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}{\overline{AD} \cdot \overline{BC}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{OC'}} \cdot \frac{\overline{OD'}}{\overline{A'D'}} \cdot \frac{\overline{OC'}}{\overline{B'C'}} \cdot \frac{\overline{B'D'}}{\overline{OD'}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{A'D'}} \cdot \frac{\overline{B'D'}}{\overline{B'C'}} = [A', B', C', D']$$



ANEXO 2 – ÁNGULO DE PARALELISMO

En la figura adjunta tenemos la h -recta l y una de sus paralelas por P , n .



Sea PD perpendicular a l por P y θ el ángulo de paralelismo.

Probaremos que $\sin \theta = \cosh(d_H(P, D))$

Sean r y t los radios de los arcos n y l respectivamente y s la distancia de P a Ω , por

Pitágoras en $\triangle FPC$:

$$r^2 = s^2 + (r-t)^2 \Rightarrow s^2 + t^2 = 2rt$$

Además, por perpendicularidad: $\widehat{PFC} = \theta$ (ángulo de paralelismo) $\Rightarrow \sin \theta = \frac{s}{r}$

$$\text{Y como } \frac{s}{r} = \frac{2st}{2rt} = \frac{2st}{s^2 + t^2} \Rightarrow \sin \theta = \frac{2st}{s^2 + t^2} \quad (1)$$

Ahora planteamos la distancia $d_H(P, D) = \left| \ln \frac{PC}{DC} \right| = \left| \ln(s/t) \right|$

$$\text{Utilizando coseno hiperbólico: } \cosh(d_H(P, D)) = \frac{1}{2} \left(\frac{s}{t} + \frac{t}{s} \right) = \frac{s^2 + t^2}{2st} \quad (2)$$

De (1) y (2) obtenemos: $\boxed{\sin \theta \cdot \cosh(d_H(P, D)) = 1}$ una expresión que muestra que el ángulo de paralelismo depende directamente de la longitud del segmento PD y que si éste tiende a 0, el ángulo de paralelismo tiende a $\pi/2$.