

O ESTUDO DA ESFERA ATRAVÉS DA SUA CONSTRUÇÃO

Kevin Szczpanski – Guy Grebot
kevinszczpanski@hotmail.com – guy@mat.unb.br
Departamento de Matemática, Universidade de Brasília - Brasil

Tema: Enseñanza Experimental de la Matemática.

Modalidade: T

Nível educativo: Medio (11 a 17 años).

Palabras chave: geometria; raciocínio lógico; resolução de problemas.

Resumo

Esta oficina apresenta resultados de observações feitas com alunos de escolas públicas do Distrito Federal e visa reforçar o papel fundamental da geometria no ensino básico. Os resultados que serão apresentados surgiram através da aplicação de atividades que fazem parte de uma sequência didática, desenvolvida com base na metodologia de resolução de problemas, que trazem ao aluno reflexões e os levam a construção de um globo sob três pontos de vista. Na primeira abordagem, trabalha-se uma maneira direta e intuitiva que permite testar o Teorema Egrégio de Gauss. A segunda representação está baseada no estabelecimento de fusos horários e é auxiliada por um objeto que possibilita a planificação de gomos de tamanho arbitrário. Por fim, a terceira abordagem é feita através de aproximações poliedrais da esfera e o aluno é levado à construção de domos geodésicos. Esta última abordagem tem sido muito estudada por arquitetos seguidores de Buckminster Fuller. Essa sequência didática foi escrita de forma a propiciar o desenvolvimento, no aluno, tanto do raciocínio por imagem quanto do raciocínio por linguagem. Os autores são bolsistas do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência – CAPES.

Introdução

Como reação a um abandono da geometria intuitiva no programa de matemática, foi desenvolvida uma sequência de atividades, baseada na metodologia de resolução de problemas, que visa o estudo da esfera. As atividades foram desenvolvidas no âmbito do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência – PIBID/CAPES do Departamento de Matemática da Universidade de Brasília. O objetivo deste artigo é apresentar essa sequência de atividades, que foi fundamentada em princípios que apoiam o processo de ensino e aprendizagem no estudo da geometria.

Lorenzato (1995) afirma que a geometria tem função essencial na formação dos indivíduos, pois possibilita uma interpretação mais completa do mundo, uma comunicação mais abrangente de ideias e uma visão mais equilibrada da matemática. Nas décadas de 1960 e 1970, o ensino da Matemática foi influenciado pelo movimento conhecido como Matemática Moderna, que não obteve o sucesso esperado. De acordo com Ozámiz (2001), esse movimento fez com que o ensino de matemática passasse a ter

preocupações excessivas com o formalismo, e isso comprometeu o ensino da geometria intuitiva.

O ensino da geometria constitui parte importante do currículo de matemática no ensino fundamental, pois segundo os PCNs de Matemática (BRASIL, 1998), por meio dele o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. Mais ainda, a geometria é um campo fértil para se trabalhar com situações-problema e é um tema pelo qual os alunos costumam se interessar naturalmente.

Segundo Oliveira e Velasco (2007), o ensino da geometria é um processo didático que requer maior sensibilidade do professor, pois trabalha a união das formas visuais com conceitos e propriedades. Gaspar (2003, p.13) aponta que quando buscamos os modos como a geometria vem sendo ensinada percebemos que esta, durante muito tempo, foi ensinada na escola a partir de uma concepção formalista, os seus símbolos e regras eram apresentados aos alunos de um modo que a destituía de suas referências históricas e culturais.

Reconhecendo a relevância do conteúdo de geometria para o desenvolvimento cognitivo do aluno da escola básica, buscou-se aqui refutar o método tradicional de ensino. Este método não se mostra eficaz no ensino de geometria, pois não permite que o aluno construa o conhecimento e ainda pode acarretar no desinteresse dos alunos pela área por conta do excesso de atividades mecânicas e repetitivas que ele impõe.

Nas próximas seções deste artigo apresenta-se a metodologia utilizada, como é composta a sequência didática analisada e como ela foi desenvolvida. Em seguida, os resultados parciais da aplicação das atividades serão expostos e discutidos.

Metodologia

Tanto a elaboração da sequência didática (também chamada de caderno no que segue) quanto a sua aplicação seguiram a metodologia de resolução de problemas. Esta metodologia permite levar o aluno à construção de conhecimentos matemáticos, fazendo com que ele desenvolva uma certa autonomia diante da resolução de problemas dados. De acordo com os PCNs de Matemática (BRASIL, 1998), a resolução de problemas possibilita aos alunos mobilizar conhecimentos e desenvolver a capacidade de gerenciamento das informações que estão a seu alcance.

Soares e Pinto (2001) afirmam que quando se ensina através da resolução de problemas, os alunos desenvolvem sua capacidade de aprender a aprender. Eles são levados a

determinar por si próprios respostas às questões que os inquietam, deixando de lado o hábito de esperar uma resposta já pronta dada pelo professor ou livro-texto.

O papel do professor é acentuado e reforçado por esta metodologia pois, durante a busca por soluções para os problemas propostos, pode ocorrer situações inesperadas para as quais o professor deve estar sempre preparado. Borba e Penteadó (2001) argumentam que, em geral, professores optam por trabalhar no que eles chamam de zona de conforto, na qual quase tudo é previsível, conhecido e, por decorrência, controlável. Por conta disso, a metodologia de resolução de problemas ainda é pouco utilizada no ensino básico brasileiro.

A sequência didática

A construção da sequência didática baseou-se em uma pesquisa, em nível de terceiro grau, a respeito da construção de um globo, em que foram também pesquisadas aproximações da esfera através de poliedros. A sequência foi desenvolvida no sentido de permitir que o aluno pense de forma organizada e com autonomia e tome decisões por meio de interação com materiais didáticos concretos mediadores e trabalho colaborativo.

A sequência didática, está dividida em três partes e tem as seguintes características: os exercícios devem ser realizados em grupo; as perguntas devem auxiliar os alunos a modelar o problema; os conhecimentos específicos necessários não podem ser tratados como prerrequisitos e devem ser trabalhados na ação mediadora do professor e na ação mediadora do grupo; os momentos de instabilidade devem ser momentos valorizados e com grande potencial para a construção de novos conhecimentos; a utilização de material concreto mediador é fundamental. No caderno também há orientações para a aplicação das atividades.

Na primeira parte do caderno, o aluno desenvolve seis atividades que compreendem o recobrimento da esfera por um plano, a definição de distância sobre a esfera, os comprimentos de arcos subtendidos por um dado segmento, seções da esfera, medição da distância sobre a esfera e a comparação entre as distâncias sobre a esfera e sobre o plano. No desenvolvimento dessas atividades, o aluno internaliza o conceito de isometria, que é raramente trabalhado na educação básica. Através de um trabalho experimental e intuitivo, o aluno tem a possibilidade de testar a validade do teorema egrégio de Gauss.

A segunda parte do caderno está baseada no estabelecimento de fusos horários e é auxiliada por um objeto que possibilita a planificação de gomos de tamanho arbitrário. Ao todo são quatorze atividades que abordam importantes conceitos em geometria. Nesta parte, o objetivo é construir um globo através de gomos, que é definido como a área compreendida entre dois arcos de círculo máximo que ligam o polo norte ao polo sul. Há uma atividade intermediária que permite reforçar o que foi analisado na primeira parte e em que o aluno constrói um gomo, de maneira intuitiva. Nas atividades seguintes, o aluno traça o gomo por meio de um aparelho especialmente desenvolvido para este fim, que permite o estudo das curvas que determinam este gomo, qualquer que seja o seu ângulo central.

A terceira parte do caderno tem por objetivo construir e analisar domos geodésicos através de aproximações poliedrais da esfera. Tendo como referência Popko (2012), nesta parte é introduzida a ideia de domos geodésicos, que são estruturas poliédricas que possuem todos os vértices contidos numa esfera. O objetivo é deformar continuamente o icosaedro, sem destruir ou criar novas interseções entre suas faces, até formar uma aproximação da esfera. Neste processo serão utilizadas as divisões triacom e alternada.

Resultados

O caderno foi aplicado em uma turma de nono ano do ensino fundamental de uma escola pública do Distrito Federal, no período contrário às atividades regulares desses estudantes. No total foram sete encontros semanais de noventa minutos, que ocorreram durante o primeiro semestre de 2013. À medida em que foram observados alguns erros advindos da redação de alguns enunciados, eles foram corrigidos e essas atividades foram reapresentadas aos alunos. O material concreto mediador esteve presente em todos os encontros.

A seguir estão elencadas observações feitas pelos alunos, bem como dificuldades encontradas na aplicação da primeira etapa do caderno e parte da segunda:

- Os alunos não estavam habituados a redigir e organizar seus pensamentos. Isso foi uma barreira encontrada pelos alunos, pois muitos não gostavam de escrever e se limitavam apenas a respostas telegráficas. Alguns mostravam-se frustrados por terem de escrever em uma aula de matemática.
- Em um item, dado um raio R_1 , foi pedido para que os alunos traçassem um arco de circunferência de raio $R_2 > R_1$. Este item gerou problema, pois os alunos não

sabiam interpretar o símbolo “>”, já visto em séries anteriores. Alguns alunos não conseguiram ler o item com fluência e outros leram “ R_2 implica R_1 ”.

- Um aluno observou que a distância entre dois pontos, medida por um fio, na esfera recoberta pelo papel é influenciada pelo relevo. Uma observação importante, pois nesse momento eles já percebiam que não havia como recobrir a esfera de maneira perfeita, sem dobras e relevos.
- Na tentativa de recobrir a esfera de isopor com folhas de papel A4, uma aluna argumentou que se um cubo pode ser recoberto com quadrados, então uma esfera poderia ser recoberta com circunferências. Com esse raciocínio, ela recortou duas circunferências com o raio da esfera e tentou recobri-la, mas observou não ser possível.
- Em uma atividade, cujo objetivo era mostrar que um plano intercepta a esfera em uma circunferência, o mediador/pesquisador sugeriu o uso do teorema de Pitágoras. Um dos alunos conseguiu usar este teorema para demonstrar tal fato deixando claro que, até então, não tinha entendido para que ele servia.
- Encerrada a atividade de mostrar que um plano intercepta a esfera em uma circunferência, um aluno foi questionado a respeito da unicidade da projeção ortogonal de um ponto sobre um plano (ele foi questionado com base numa representação que mostrava dois segmentos distintos com mesmo extremo e ortogonais a um terceiro segmento). Ele respondeu que não seria possível sem explicar o porque; outro aluno argumentou que o terceiro ângulo deveria ser nulo sem observar que isso seria uma contradição.
- Houve um problema de interpretação na atividade cujo objetivo era determinar as interseções entre os planos paralelos a um plano Π , sendo Π um plano passando pelo centro da esfera. Nenhum aluno entendeu o que seria um plano Π já que para eles, trata-se de um número. Mas também não demonstraram conhecimento a respeito deste número, além de ser aproximado por 3,14.
- Os alunos relacionaram as atividades com uma outra sequência didática, cujo objetivo era descobrir em que cidade encontrava-se um tesouro e para a qual o aluno era munido de um mapa (plano) do Brasil, de um compasso e de uma régua. Os alunos se questionaram a respeito do porquê que, naquela atividade, as distâncias eram medidas pelo comprimento de segmentos no plano ao passo que

agora, a distância entre dois pontos sobre uma esfera é dada pelo “comprimento do menor arco de circunferência que os liga”.

- Os alunos assimilaram bem o resultado da atividade em que se observa que o comprimento de um arco de circunferência subtendido por um segmento dado, diminui com o aumento do raio, e souberam usá-lo para observar que o menor arco de circunferência que liga dois pontos de uma esfera deve ser um arco de círculo máximo dessa esfera.
- Houve grande interesse por parte dos alunos quanto à explicação da etimologia da palavra isometria, e também quanto ao enunciado do teorema egrégio de Gauss e sua conexão com a sequência de atividades. Os alunos ficaram empolgados em redigir uma resposta utilizando uma palavra que eles haviam acabado de aprender e que tinha um grande significado, pois resumia várias observações feitas durante as atividades.
- Em uma atividade que pedia para explicar o que representam as dobras e os recortes feitos na folha de papel ao tentar recobrir a esfera, os alunos tiveram dificuldade em se expressar. Ao mesmo tempo, estava claro para eles que as distâncias correspondentes, na esfera e na planificação, não se preservam.
- Na segunda parte do caderno, os alunos dispunham de um desenho da Terra no qual estavam traçados paralelos e meridianos. Após informá-los de que os fusos horários estavam centrados nos meridianos, os alunos foram questionados sobre quantos meridianos eles podiam imaginar sobre a superfície da Terra. A atitude de todos os alunos foi contar os meridianos do desenho, que totalizavam dez, e dobrar este número, pois observaram que no desenho estava representada metade da Terra.
- Foi interessante notar a convicção dos alunos sobre o fato da esfera não ser isométrica ao plano. Mas, após a conclusão da primeira parte do caderno, os alunos foram questionados quanto à possibilidade de se recobrir a esfera com fatias bem finas de plano. Todos disseram que é possível e que, por conta da fatia ser bem fina, não haveria dobra nem amasso.
- Na segunda etapa do caderno, foi considerado que a cada três meridianos consecutivos havia um gomo, totalizando 12 gomos no globo. Os alunos foram questionados se era possível construir um globo se conseguissem construir 12 gomos no plano. A maioria dos alunos disse que seria possível, exceto por uma

aluna que argumentou que a folha de papel A4 era um pedaço de plano, assim como os gomos, e que o que ela havia descoberto era que a esfera não é isométrica nem ao plano nem a pedaços dele, sendo assim, a esfera construída não seria perfeita. Outro aluno argumentou que seria possível porque a folha de papel A4 representava o plano inteiro, e os gomos seriam só uma parte dele.

Discussão e conclusões

A avaliação dos resultados das atividades foi realizada com base nos relatórios feitos ao longo da execução do caderno e das observações feitas durante as aulas. Os relatórios consistem de uma relação do desempenho e motivação dos alunos e das principais dificuldades encontradas na aplicação das atividades.

As observações descritas na seção anterior expõem claramente as consequências de um modelo de ensino que exige do aluno, ano após ano, tão somente a capacidade de repetição mecânica de um modelo de resolução, sem desenvolver minimamente seu pensamento crítico, sua criatividade, sua capacidade de expressão oral e escrita e uma postura colaborativa.

Em contrapartida, e apesar das dificuldades decorrentes de um adestramento imposto aos alunos, ano após ano, por uma metodologia retrógrada, os resultados da aplicação do caderno também mostram que, quando incentivados e corretamente conduzidos ao longo da resolução de um determinado problema, os alunos conseguem estabelecer as relações esperadas e conseguem apreender conceitos importantes. Além disso, pelo fato do espírito de cooperação ser intrínseco ao adolescente, ele aparece naturalmente e de maneira construtiva quando propriamente incentivado.

É de se notar que as observações dos alunos, quanto aos conceitos de geometria abordados no caderno, permitiram discussões profundas para o nível fundamental, o que indica que o despreparo técnico em relação aos conteúdos de geometria não afeta o raciocínio geométrico dos alunos. Assim, estabelece-se uma distinção entre raciocínio geométrico e habilidade analítica.

Pelo fato da metodologia de resolução de problemas exigir do aluno uma participação ativa, as dificuldades deixam de ser ignoradas e são imediatamente resolvidas. No entanto, está claro que esta metodologia demanda esforço e iniciativa por parte dos professores que, na sua maioria, ainda optam por ficar na zona de conforto e perpetuam o quadro atual do ensino de geometria no Distrito Federal. Os alunos da rede de ensino,

merecem que seja tomada alguma atitude que resgate a essência da geometria nas aulas de matemática, tão importante à formação do indivíduo.

Referências bibliográficas

- Borba, M., Penteadó, M. (2001). *Informática e educação matemática*. Belo Horizonte: Autêntica.
- Brasil. MEC. (1998) *Parâmetros Curriculares Nacionais: terceiro e quarto ciclo do ensino fundamental*. Brasília: MEC/SEF.
- Gaspar, M. T. (2003) *Aspectos do desenvolvimento do pensamento geométrico em algumas civilizações e povos e a formação de professores*. (Tese de Doutorado). Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Campus de Rio Claro.
- Lorenzato, S. (1995). Por que não ensinar Geometria? *Educação Matemática em Revista – SBEM 4*, 3-13.
- Oliveira, L., Velasco, A. (2007). *O ensino de geometria nas escolas de nível médio da rede pública da cidade de Guaratinguetá*.
http://www.degraf.ufpr.br/artigos_graphica/OENSINO.pdf
Consultado 27/06/2013.
- Pérez, D., Ozámiz, M. (2001). *La enseñanza de las ciencias y la matemática*. Madrid: Popular.
- Popko, E. S. (2012) *Divided Spheres: geodesics and the orderly subdivision of the sphere*. (1 st ed.). New York: CRC Press.
- Soares, M., Pinto, N. (2001). *Metodologia da resolução de problemas*.
http://www.ufrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_24/metodologia.pdf Consultado 27/05/2013.