REVISITANDO OS NÚMEROS REAIS ATRAVÉS DE UMA INVESTIGAÇÃO HISTÓRICA SOBRE O *PI*

Kelly Roberta Mazzutti Lübeck – Marcos Lübeck
kellyrobertaml@gmail.com – marcoslubeck@gmail.com
Universidade Estadual do Oeste do Paraná – UNIOESTE – Foz do Iguaçu/PR – Brasil

Tema: I.4
Modalidade: CB
Nível Educativo: 5
Palavras-Chave: Investigação Matemática; História do *Pi*; Números Reais.

Resumo

A Matemática é uma das ciências mais antigas desenvolvidas pela humanidade, e ao contrário do que muitos imaginam, ela é dinâmica e passível de experimentação. Eis que o grande desafio de hoje é desmistificar a ideia de que ela é uma ciência pronta e estática, na qual só se apresentam problemas já associados às suas soluções. Assim, pensando a respeito dessas questões e de conceitos que por vezes são tratados como óbvios e/ou triviais, buscamos refletir sobre a natureza dos números reais. Para isso, usamos a História da Matemática como aporte de investigação. Esta abordagem oportunizou a reconstrução histórica dos problemas que giravam em torno das propriedades destes números, permitindo-nos compreender as situações que levaram a definir e/ou postular determinadas teorias/conjecturas. Acreditamos que a compreensão precisa deste conjunto contribui no entendimento de outros conceitos, uma vez que os reais estão na base de muitas estruturas matemáticas. Para orientar esta investigação, exploramos o enigmático número Pi *e, a partir de uma abordagem histórica sintetizada acerca dele, apresentamos a configuração dos números reais ao longo da História da Matemática e sua importância para os delineamentos tomados por esta ciência ao longo dos tempos.*

Um número chamado *Pi*

Se perguntarmos 'O que é o número *Pi*?', acreditamos que muitas pessoas responderiam que é o número (constante) dado pela razão do comprimento de uma circunferência pelo seu diâmetro. Muitos ainda acrescentariam que o número *Pi* é um número irracional.

De fato, mesmo concordando com eles levantamos um questionamento: 'Será, realmente, que a razão do comprimento de qualquer circunferência pelo seu diâmetro é constante?' Quantos estudantes já tiveram a oportunidade e/ou a curiosidade de 'experimentar' se a razão mencionada acima é constante? Ou ainda, se a constante definida pela razão entre uma circunferência e o seu diâmetro é a mesma definida pela razão entre a área de uma circunferência e o quadrado de seu raio?

Quando investigamos este tipo de questão e damos a oportunidade aos nossos alunos de redescobrirem estes fatos, fomentamos o seu gosto pela pesquisa, pois aguçamos o seu espírito científico e instigamos a curiosidade deles.

Ademais, a razão mencionada acima é constante e isto já foi apresentado no Livro XII dos *Elementos* (cf. Euclides 2009), onde a Proposição 2 informa que "os círculos estão entre si como os quadrados sobre os diâmetros” (p. 528) e, ainda, a Proposição 18 diz que “as esferas estão entre si em uma razão tripla da dos próprios diâmetros” (p. 561).

Com relação ao *Pi*, da mesma forma que não podemos afirmar com precisão qual foi o primeiro povo que fez Matemática, ou equivalentemente, quando ela surgiu, também não podemos atribuir para uma única civilização a descoberta de que para qualquer circunferência a razão de seu comprimento por seu diâmetro é constante. Talvez um dos primeiros registros conhecidos que traz uma aproximação para o número *Pi* seja o *Papiro de Ahmes* ou *Papiro de Rhind* (cf. Boyer, 1996, p. 12).

Este papiro, de aproximadamente 1600 a.C., apresenta receitas para alguns problemas matemáticos do povo egípcio, e neste documento, o problema 48 sugere que o número *Pi* seja aproximado por $4(8/9)^2$. Este valor era obtido comparando-se a área de um círculo (de diâmetro 9) com a área de um octógono, cujo lado mede um terço do diâmetro (Figura 1). Outro valor que os egípcios adotavam para o número *Pi* era 3 1/6 ou aproximadamente 3,16 (cf. Contador, 2006, p. 253).

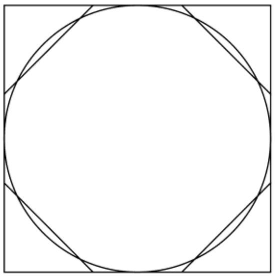

Figura 1: Área do círculo - Papiro de Ahmes.

Esta problemática do número *Pi* é tão antiga que até mesmo a *Bíblia* faz referência ao que hoje chamamos de *Pi* no *Livro dos Reis*, I, 7:23 e em *Crônicas*, II, 4:2, tal que: “Hiram fez ainda o Mar, todo de metal fundido, com cinco metros de diâmetro. Era redondo, tinha dois metros e meio de altura, e sua circunferência tinha quinze metros” (p. 374). Note que “o Mar de Bronze era um grande reservatório de água, necessário para as purificações rituais e a limpeza do templo” (Bíblia Sagrada, 1998, p. 374).

Já os babilônicos (1800-1600 a.C.) aproximavam o valor de *Pi* por 3 1/8 (valor encontrado em problemas registrados em tabelas de argila. Cf. Contador, 2006, p. 253), distintamente dos registros encontrados no vale mesopotâmico, onde o valor de *Pi* era 3.

Segundo Struik (1989, p. 66) os chineses aproximavam o número *Pi*, quando observado no cálculo da área do círculo, pelo número 3. Mas, outras estimativas são apresentadas na obra *Chui-Chang Suan-Shu* (ou *Nove Capítulos sobre a Arte Matemática*), composto por volta de 250 a.C. Nela, *Pi* é aproximado por “3,14 usando um polígono regular de

96 lados e a aproximação de 3,14159 considerando um polígono de 3.072 lados" (Boyer, 1996, p. 138). Outra aproximação de *Pi* dada pelos chineses e historicamente relevante é 355/113, que é correta até a sexta casa decimal. Conforme Eves (2004, p. 142), este valor foi encontrado pelo chinês Tsu Ch'ung-chih (~480 d.C.).

Quando nos reportamos à história do *Pi* não podemos deixar de mencionar o nome de Arquimedes (~287-212 a.C.). Ele é considerado um dos maiores pensadores de todos os tempos, com grandes contribuições tanto para a Matemática quanto para a Física. Em um dos seus trabalhos, ele apresentou um método, o *Princípio da Alavanca* ou *Lei da Alavanca*, que possibilitou avançar significativamente no cálculo de áreas e volumes (quadratura da parábola, volume da esfera). Ele também abordou diversos problemas, como por exemplo, a trissecção do ângulo, o estudo da esfera e do cilindro, os problemas astronômicos e hidrostáticos e a medida do círculo que possibilitou, consequentemente, obtermos uma estimativa para o número *Pi*.

Para calcular uma aproximação para *Pi*, Arquimedes trabalhou com polígonos inscritos e circunscritos em uma circunferência, tal que "começando com o hexágono regular inscrito, ele calculou os perímetros dos polígonos obtidos dobrando-se sucessivamente o número de lados até chegar a noventa e seis lados" (Boyer, 1996, p. 86).

O grande mérito no trabalho de Arquimedes reside no fato de ele não tentar apresentar o valor exato de *Pi*, mas somente um limite inferior e um superior para esta constante. Para Contador (2006), "o método de Arquimedes é o único matematicamente correto e foi com certeza a primeira tentativa científica de buscar um valor para *Pi*" (p. 265).

Através do seu respectivo método, Arquimedes encontrou a aproximação $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$.

Assim, Arquimedes introduz novas técnicas de resolução de problemas com uma abordagem inovadora para a época (uma descrição detalhada sobre este método pode ser obtida em Garbi, 2009, p. 83).

Hoje, com a representação numérica indo-arábica, com o desenvolvimento de vários algoritmos para cálculos básicos (divisão, multiplicação, radiciação) e com o auxílio de uma simples calculadora, facilmente chegamos aos valores estabelecidos por Arquimedes. Um dos méritos deste pensador reside no fato dele obter boas estimativas para *Pi* com as poucas ferramentas que tinha ao seu dispor.

Arquimedes também utilizou o método da dupla redução ao absurdo para calcular a área do círculo, que provou ser igual à área do triângulo retângulo que têm como base o comprimento da circunferência e como altura o raio do círculo (cf. Garbi, 2009, p. 81).

Com isto, Arquimedes pôde inferir que se o comprimento da circunferência é $2\pi r$, a sua área é πr^2 (Figura 2), estabelecendo-se a igualdade entre as razões mencionadas acima.

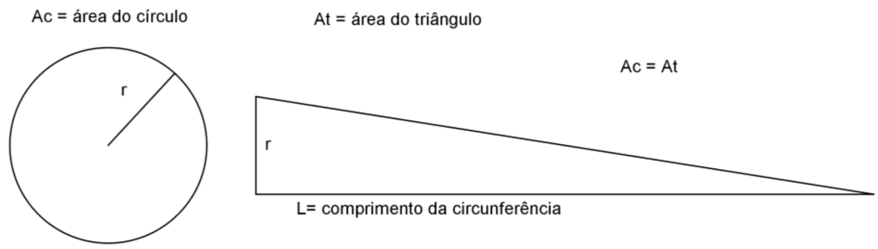

Figura 2: Áreas da circunferência e do triângulo exploradas por Arquimedes.

Esta constante (cf. cronologias para o *Pi* em Contador, 2006, p. 265; e Eves, 2004, p. 143), que foi por muitos e diferentes povos investigada, só se consagrou com o símbolo da letra grega π quando Euler (1707-1783) a publicou em sua obra *Introductio*, em 1748. O símbolo π foi usado pela primeira vez pelo inglês William Jones (1675-1749), conforme Struik (1989, p. 94).

O *Pi*, de certa forma, também foi responsável pela introdução de novos procedimentos de investigação matemática, através da apresentação da primeira expressão analítica dada pelo francês François Viète (1540-1603). Ele formulou que:

$$\frac{2}{\pi}=\sqrt{\frac{1}{2}}.\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}.\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots$$

Mais do que uma forma de representar π, esta expressão reforça o surgimento de uma nova técnica na Matemática, onde noções aritméticas, algébricas e trigonométricas se fundem cada vez mais em expressões analíticas. Ainda segundo Struik (1989, p. 151), o uso de letras para representar números esporadicamente era uma prática muito antiga, mas até o surgimento de Viète não se costumava fazer manipulações algébricas de símbolos nem eram empregados coeficientes literais para representar classes genéricas.

> Este foi o período em que a técnica computacional atingiu novos níveis e, por fim, começou a ultrapassar as realizações do mundo islâmico. Viète desenvolveu os trabalhos de Arquimedes e encontrou π [...] como um produto infinito. [...]. O desenvolvimento da técnica foi um resultado do aperfeiçoamento da notação. (Struik, 1989, p. 151).

Apesar de toda a sofisticação que a Matemática já possuía, ainda necessitou-se de mais de um século para que um contemporâneo de Viète, o francês J. H. Lambert (1728-1777), em 1761 provasse que π é realmente um número irracional. Lambert se apoiou na teoria das funções contínuas para obter a sua demonstração. Outras demonstrações em linguagem moderna foram apresentadas e uma prova razoavelmente simples pode ser obtida na obra de Figueiredo (2002, p. 9).

Provando-se, por fim, a irracionalidade do número π e observando que mesmo nos registros mais antigos o π já era investigado, surge-nos um novo questionamento, por que a demora em se provar que o número π é um número irracional, ao contrário, por exemplo, do número $\sqrt{2}$, que já no tempo de Pitágoras (~586-500 a.C.) se conhecia a sua incomensurabilidade com uma unidade pré-fixada? Esta questão está intimamente relacionada com a natureza dos números reais e será abordada, juntamente com outros tópicos, na sequência.

Explorando a reta real

As primeiras noções que nos são apresentadas sobre os conjuntos numéricos fazem referência ao conjunto dos números naturais, inteiros, racionais e irracionais, e, ainda, que o conjunto dos números reais engloba, de forma não disjunta, todos os demais. Quando solicitamos exemplos de números racionais e irracionais, quase 100% das respostas apontam números como $\frac{1}{2}, \frac{-3}{4}, \frac{5}{7}, \sqrt{2}, \sqrt[3]{4}, \sqrt[7]{2}, \sqrt[8]{2+\sqrt{2}}, 3-\frac{\sqrt{7}}{2}, \pi.$

Estes valores surgem porque são muito mais representativos do que outros racionais e irracionais, como por exemplo, a fração (2507)/(4562) ou o número de Euler escrito como $e = lim_{n\to\infty} (1+1/n)^n$.

Esta noção elementar que foi apresentada estabelece diferentes categorias para os conjuntos numéricos, entretanto, além da periodicidade, o que mais diferencia os racionais do conjunto dos irracionais? Quem contribuiu imensamente para a compreensão desta questão foi o matemático G. Cantor (1845-1918) com a sua teoria sobre os diferentes tipos de infinito. Cantor provou que apesar de ambos os conjuntos dos naturais e dos reais serem infinitos, a potência de seus infinitos é distinta.

Segundo Vilela (2005), “George Cantor, com sua teoria dos números transfinitos, não apenas mostrou que era possível analisar sem nenhuma contradição este conceito, mas ainda provaram que existem vários tipos de infinito diferentes - alguns maiores, outros menores” (p. 75).

Cantor afirmava que conjuntos são numericamente iguais se existe uma correspondência biunívoca entre seus elementos, caso contrário, um deles será maior do que o outro. Além disso, foi ele quem definiu o conceito de enumerabilidade. De fato, dizemos que um conjunto é enumerável se possui uma correspondência biunívoca com o conjunto dos naturais ou for finito. Caso contrário, ele é dito não enumerável (cf. Lima, 2000).

Como os racionais são enumeráveis e os reais são não enumeráveis, temos, consequentemente, que a não enumerabilidade é uma característica/propriedade dos números irracionais. Portanto, sob a reta real existem significativamente mais números irracionais do que racionais. Grosseiramente falando, quem dá o preenchimento, o peso à reta real, são os irracionais.

Estas observações nos auxiliam a compreender os reais, mas não nos ajudam a responder a questão anteriormente formulada: Por que a demora em se provar que *Pi* é um número irracional?

A resposta mais óbvia é que necessitou-se de mais ferramentas matemáticas para realizar tal feito, e também, necessitou-se explorar melhor o conjunto dos números reais. Colocamos isto porque, apesar de conhecermos os números reais, concordarmos que os irracionais são não enumeráveis e, portanto, representam a grande maioria do conjunto dos reais, sendo ainda possível demonstrar que todos os números da forma $p = \pm a \pm \sqrt{b};$ $a,b \in N$ e similares, formam um conjunto enumerável. Observe que entendemos por similares o conjunto dos números da forma $q = a + \sqrt{p}$, com p descrito anteriormente. Assim, quase todos os números irracionais que lembramos e trabalhamos representam a ínfima parte dos números reais, uma vez que também são enumeráveis.

Neste caso, quem são os irracionais que sobraram para compor o conjunto dos reais e que representam, em potência de infinito, uma quantidade significativamente superior? Os números π e e fazem parte deste conjunto?

Euler já havia demonstrado que e e e^2 são irracionais e, segundo Garbi (2007), ele percebeu nisto um fato curioso:

> Enquanto a $\sqrt{2}$ elevada a qualquer expoente par torna-se um número racional, as potências racionais de e continuam a ser irracionais. Parecia que a irracionalidade de e era mais 'profunda' do que a de $\sqrt{2}$ [...]. Estes indícios sugeriam, portanto, que os números chamados reais poderiam estar divididos em duas categorias: os que são e os que não são raízes de equações polinomiais de coeficientes inteiros. (p. 193).

Assim, na tentativa de responder ao questionamento acima, notamos que necessitou-se de outros conceitos matemáticos, a saber, o dos números algébricos e transcendentes.

Qualquer solução de uma equação polinomial da forma $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0$, onde os coeficientes $a_{i's}$ são inteiros, é chamado de um número algébrico. Logo, um número α é algébrico se existe uma equação polinomial com coeficientes inteiros da qual α seja raiz. Da definição observamos que todo número racional *p/q* é algébrico, já que é raiz da equação $qx - p = 0$. Um número é transcendente quando não é algébrico.

É possível mostrar que o conjunto dos números algébricos é enumerável (cf. Figueiredo, 2002), e mais, além dos racionais, todos os números irracionais da forma $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[7]{1+\sqrt{2}}$ etc., também são enumeráveis, já que são algébricos. Uma consequência deste teorema é que o conjunto dos números transcendentes é não vazio e não enumerável.

A natureza distinta do número π e do número *e* nos indica que eles são números transcendentes, mas somente em 1873 o matemático francês C. Hermite (1822-1901) demonstrou que *e* elevado a qualquer número algébrico continua a ser transcendente (cf. Struik, 1989, p. 287). Inspirado na obra de Hermite, em 1882, F. Lindemann (1852-1939) provou de forma muito elegante que π também é um número transcendente.

A importância de se conhecer mais exemplos de números transcendentes (além de *e* e de π) levou David Hilbert (1862-1943) a propor se $2^{\sqrt{2}}$ era transcendente ou algébrico como a 7ª questão, numa lista com 23 problemas, apresentada no 2º Congresso Internacional de Matemática, realizado em Paris no ano de 1900. Esta lista ditou o rumo para as novas pesquisas em Matemática.

Entretanto, somente em 1929, Siegel provou que $2^{\sqrt{2}}$ é transcendente. Porém, foi Gelfond e Schneider que, em 1934 e 1935, respectivamente, e independentemente, generalizaram a questão, ou seja, provaram que: "Sejam α e β números algébricos (reais ou complexos). Se $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq 1$ e β não for um número racional (real), então α^{β} é transcendente".

Dessa forma, nos resta aceitar que o conjunto de 'peso' da reta real é formado pelo conjunto dos números transcendentes, ou seja, pelos números da forma $\pi, e, 2^{\sqrt{2}}, e^{\sqrt{3}}, etc.$

Conclusão

Procuramos evidenciar neste texto um levantamento histórico da Matemática como uma diretriz para a apresentação e investigação de resultados, ou seja, como uma aliada no estudo dos problemas (e das soluções) que giram em torno das propriedades dos reais.

Além disso, desejamos instigar a curiosidade sobre questões matemáticas que aparentemente são triviais, e mostrar que para se fazer ciência, a investigação e a quebra de tabus são fundamentais, principalmente quando associadas a pré-concepções sobre a facilidade ou dificuldade de se compreender determinados conceitos.

Assim, esperamos que a Matemática seja entendida como uma ciência em construção, que necessitou de um longo tempo para fundamentar suas bases e aperfeiçoar seus métodos. Compreender esta caminhada histórica é o primeiro passo para partilhar de uma educação de melhor qualidade.

Por fim, acreditamos que mesmos conceitos aparentemente simples podem conter uma implicância de significados complexos e que a beleza da Matemática está na curiosidade de buscar mais esclarecimentos e mais compreensões. Este também é um dos papéis desta ciência: o de aguçar os sentidos e fazer querer saber mais, o de olhar além.

Agradecimento

Agradecemos a Fundação Araucária pelo apoio financeiro para apresentação deste trabalho.

Referencias bibliográficas

Bíblia Sagrada. (1998). Edição Pastoral. São Paulo: Paulus.

Boyer, C. B. (1996). *História da Matemática*. São Paulo: Edgard Blücher.

Contador, P. R. (2006). *Matemática, Uma Breve História*. (Vol. I). São Paulo: Livraria da Física.

Euclides. (2009). *Os Elementos*. Trad. Irineu Bicudo. São Paulo: EDUNESP.

Eves, H. (2004). *Introdução à História da Matemática*. Campinas: EDUNICAMP.

Figueiredo, D. G. (2002). *Números Irracionais e Transcendentes*. Rio de Janeiro: SBM.

Garbi, G. G. (2007). *O Romance das Equações Algébricas*. São Paulo: Livraria da Física.

Garbi, G. G. (2009). *A Rainha das Ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da Matemática*. São Paulo: Livraria da Física.

Lima, E. L. (2000). Curso de Análise. (Vol. I). Rio de Janeiro: IMPA.

Struik, D. J. (1989). *História Concisa das Matemáticas*. Lisboa: Gradiva.

Vilela, D. S. (2005). Dos Gregos à Modernidade: o medo do infinito. *SCIAM, Especial História - Os Grandes Erros Da Ciência*, 6, 74-79.