Épsilon - *Revista de Educación Matemática* *2016, Vol. 33 (1), nº 92, 47-53*

Trenzado y combinatoria: diseño de una experiencia original para la formación docente

Veronica Albanese
Francisco Javier Perales
Universidad de Granada

Resumen: *Proponemos el diseño de una experiencia original para trabajar con estudiantes de secundaria, inspirada por una artesanía de trenzado. La experiencia fomenta el desarrollo del razonamiento matemático y, en particular, combinatorio. La descripción de la representación del trenzado que manejan los artesanos y la presentación de las tareas propuestas a los estudiantes permiten evidenciar los elementos que implican y promueven el razonamiento combinatorio. Finalmente se menciona la componente motivadora como valor añadido de la experiencia.*
Palabras clave: *Combinatoria, Educación matemática, Educación Secundaria, Etnomatemática*

Braids and Combinatory: designing an original experience for teacher education

Abstract: *We propose the design of an original experience for secondary education students, inspired by a braid craft. The experience fosters the development of mathematical thinking and in particular Combinatorial reasoning. The description of the representation of the braid handled by the artisans and the presentation of the tasks proposed to the students make evident the elements that involve and promote Combinatorial reasoning. Finally the motivational component is considered as an added value of the experience.*
Keywords: *Combinatory, Mathematics Education, High school, Ethnomathematics.*

INTRODUCCIÓN

Presentamos una experiencia original para estudiantes de secundaria inspirada en estudios etnomatemáticos realizados en el entorno argentino de la artesanía soguera (Albanese y Perales, 2014). La soguería es una práctica tradicional del gaucho, personaje típico de las llanuras de la pampa húmeda –principalmente de Argentina, pero presente también en Brasil, Uruguay y Paraguay–. Este suele ser un hábil jinete, de origen criollo (descendiente de indígenas y europeos), cuyas actividades se vinculan normalmente con el montar a caballo y cuidar el vacuno. El gaucho elabora por su cuenta las herramientas para cabalgar utilizando el material más abundante que tiene a disposición: el cuero crudo. Del más común entre los arneses que produce, la soga, deriva el nombre de la artesanía. Cabe mencionar que, por el parecido de los objetos fabricados, se vislumbra que la soguería tiene que proceder de la marroquinería, si bien en la cultura gauchesca se afirma un mayor interés para la calidad de las terminaciones, siendo un signo de distinción adornar el propio caballo con piezas de calidad.

Si bien los artesanos emplean diversas técnicas para trabajar el cuero, centramos este trabajo en la técnica de trenzado. Esta implica una generalización de la elaboración de la trenza simple de tres tientos para involucrar un número mayor de tientos.

En este documento nos proponemos describir el diseño de la experiencia para después analizar algunos de los aspectos implicados en el pensamiento matemático, en particular el razonamiento combinatorio y que, a nuestro juicio, es fomentado por la citada experiencia.

El diseño de la experiencia surge de la idea de reconstruir en el aula lo que la autora había vivenciado durante su investigación etnográfica en el entorno artesanal en el contexto de la realización de su tesis doctoral (Albanese, 2014; 2015b). En dicha investigación se puso de manifiesto que los artesanos han creado un lenguaje propio de símbolos (números, letras y signos) para representar el proceso de trenzar. Al entrar en contacto con los artesanos la investigadora se enfrentó a este lenguaje, al principio sin saber interpretarlo. Adquiriendo experiencia en la práctica de trenzar pudo después relacionar las acciones de la realización de trenzas con los códigos del lenguaje empleado por los artesanos.

RELEVANCIA

La Combinatoria es una rama de la Matemática que estudia los conjuntos finitos, o discretos, y las configuraciones que se realizan trasformando o componiendo elementos de conjuntos finitos (Batanero, Godino, Navarro-Pelayo, 1994).

Estudiar Combinatoria proporciona la posibilidad de desarrollar destrezas matemáticas como generalizar, optimizar, formular conjeturas e indagar la existencia de soluciones de un problema (Kapur, 1970).

Si bien desde la investigación educativa se promueve la introducción de la Combinatoria en la escuela, especialmente en Secundaria, no se suele dar al tema la importancia que desde la investigación se recomienda. De hecho, cuando en la ESO se trabaja este tópico, a menudo se limita a las fórmulas de las configuraciones combinatorias (variaciones, permutaciones, combinaciones) en relación al cálculo de la probabilidad (Batanero, Godino, Navarro-Pelayo, 1994).

Revisamos brevemente *las orientaciones curriculares* españolas sobre la Combinatoria.

En el *Currículo Base de la LOMCE* –BOE 3 de enero del 2015, RD 1105/2014– se incluyen explícitamente contenidos de Combinatoria en los diferentes niveles de ESO y Bachillerato. En el Bloque 5, “Estadística y probabilidad”, observamos que la mayoría de los contenidos hacen referencia a técnicas de recuento y al uso de diagramas de árbol al servicio del cálculo de la probabilidad.

Pero hay otros dos bloques en donde la Combinatoria se presenta de manera implícita. Algunos contenidos del Bloque 2 “Números y álgebra” se pueden relacionar indirectamente con la Combinatoria, pues se trata de un tema propicio al estudio de regularidades y propiedades, así como al uso del lenguaje algebraico. Si bien los criterios de evaluación de este contenido indican las expresiones simbólicas y el álgebra como medio matemático para tratar este contenido, no hay que olvidar que la Combinatoria también proporciona un amplio abanico de técnicas para investigar relaciones entre conjuntos de números, en particular con sus subconjuntos.

Además, el estudio de la Combinatoria contribuye al desarrollo de contenidos del Bloque 1 “Procesos, métodos y actitudes en matemáticas” que es trasversal y común a toda la etapa. Por ejemplo:

- “Estrategias y procedimientos puestos en práctica: uso del lenguaje apropiado (gráfico, numérico, algebraico, etc.), reformulación del problema, resolver subproblemas, recuento exhaustivo, empezar por casos particulares sencillos, buscar regularidades y leyes, etc...
- La recogida ordenada y la organización de datos.
- La elaboración y creación de representaciones gráficas de datos... “(MEC, 2015, p. 391).

DESCRIPCIÓN DE LA EXPERIENCIA

Comenzamos describiendo la representación que los artesanos emplean para describir las trenzas que realizan, para así poder identificar los patrones que rigen este lenguaje particular al cual recurren en su labor. Después indicamos los materiales que se necesitan para realizar esta experiencia. Finalmente detallamos el desarrollo de la misma, mencionando las tareas que la componen y lo que se espera que los estudiantes alcancen.

Lenguaje artesanal

En la siguiente Tabla 1 se muestra la representación según el lenguaje artesanal de todas las trenzas involucradas en la experiencia.

Tabla 1. Representación de las trenzas de la experiencia en lenguaje artesanal (Albanese, 2015a).

Trenzas de tientos impares	Lenguaje artesanal
Trenza de 3	I D ~ I D +1 +1 -1 -1
Trenzas de 5	I D I D +2 +2 +1 -1 +1 -1
Trenzas de 7	I D I D +3 +3 +2 -1 +2 -1 I D I D +1 -2 +1 -2 +1 -1 +1 +1 -1 +1

Los tientos que se trenzan se posicionan en un segmento imaginario, idealmente de manera equidistante entre ellos. La letra del primer renglón de cada representación indica el tiento externo –I por izquierdo, D por derecho– que trabaja en cada *pasada*, siendo una *pasada* el movimiento de un tiento, desde su posición inicial hasta su posición final, que se realiza hacia el punto medio del segmento imaginario donde se disponen los tientos (Albanese, 2015a). El segundo renglón de la representación indica por dónde tiene que pasar el tiento que se trabaja con respecto a los otros tientos que se encuentran por el camino hacia el centro del segmento; por ejemplo +2 -1 significa que hay que pasar primero *sobre* dos tientos, y después *bajo* uno, alcanzando así la posición central[1].

Entre los patrones que este lenguaje –y entonces el trenzado– respeta, encontramos:

1) Las pasadas son iguales por la derecha y por la izquierda (esto se cumple en caso de trenzas de número impar de tientos).

2) En cada pasada los tientos a los cuales se pasa *sobre* o *bajo* son en número igual al número total de tientos menos uno partido por dos.

3) No se puede encontrar una pasada +1+1 porque equivaldría a +2.

4) Las trenzas cuyas pasadas son, por ejemplo, +1-1 son iguales a las que tienen pasadas *opuestas* +1-1. Por ello las dos trenzas de 3 de la primera fila de la tabla son iguales.

Observamos que, respetando todos los patrones descritos, las trenzas de 7 presentadas en la Tabla 1 son todas las posibles trenzas de 7 que se realizan con esta técnica de trenzado y que se pueden representar por medio de ese lenguaje.

Materiales

Los materiales necesarios para la realización de las tareas propuestas consisten en unas fichas diseñadas para guiar el proceso y un manojo de tientos de unos 50 cm de largo (en la artesanía son de cuero crudo, pero en el aula aconsejamos utilizarlos de cuerda), de los cuales se emplean 3, 5, o 7, según la tarea.

Secuenciación y tareas

Describimos las tareas que proponemos para la experiencia:

Tarea 1: *Interpretación del lenguaje*. Se muestra la representación en lenguaje artesanal de la trenza de 3, trenza que en general es bien conocida, sobre todo por las adolescentes que suelen elaborar peinados trenzando tres mechones de pelo de la misma manera en que los artesanos (generalmente hombres) lo hacen con los tientos. Los estudiantes tienen que decodificar los símbolos y su significado para después realizar con los tientos las trenzas de 5. Se deja que realicen algunos intentos y finalmente se explica cómo interpretar el lenguaje, según lo descrito en el apartado anterior. Esta primera tarea

1. Alcanzar la posición central después de una pasada se verifica en todas las trenzas de tientos impares, las únicas que trabajamos en la experiencia. Con las trenzas de tientos pares las condiciones son diferentes.

es la que ocupa más tiempo (entre la media hora y la hora entera, dependiendo del tamaño del grupo) ya que los estudiantes tienen que acostumbrarse a manejar los tientos, entender cómo funciona el lenguaje en el caso de la trenza de 3 y después aplicar su intuición a la trenza de 5 para averiguar si su interpretación tiene sentido en el trenzado. Podría ser útil, después de un breve intervalo de tiempo, proponer que los estudiantes se emparejaran para confrontar los resultados antes de "revelar" la solución.

Tarea 2: *Reconocimiento de patrones*. Aquí se proponen las siguientes preguntas e indicaciones en forma de retos:

- ¿Hay alguna simetría?,
- Realiza una trenza cuya pasada derecha es +1-1 y derecha +2. Ahora describe qué ocurre,
- ¿Qué tienen en común todas las trenzas?,
- ¿Qué pasa en las dos trenzas cuyas pasadas de 5 son respectivamente +2 y -2?

Se espera que los estudiantes, a través del ensayo-error y la observación de las repeticiones, identifiquen y expresen los patrones que cumplen el lenguaje y el trenzado artesanal, patrones que hemos descrito anteriormente. Conviene realizar una puesta en común al final de esta tarea para que todos los estudiantes reflexionen sobre las respuestas de los compañeros. Para esta segunda tarea se calcula un tiempo menor con respecto a la anterior (entre quince y treinta minutos).

Tareas 3: *Inventar trenzas de 7*. Una vez que se ha trabajado con las trenzas de 3 y 5 e identificado los patrones, se pide a los estudiantes que inventen trenzas de 7, posiblemente todas y distintas. Finalmente tienen que explicar cómo llegan a la conclusión de que son todas y distintas, recurriendo a los patrones que se han descubierto durante la tarea precedente. A esta última tarea se le dedica un tiempo variable según el interés del docente en la precisión y exhaustividad de la respuesta (entre veinte y cuarenta minutos).

ANÁLISIS DEL CONTENIDO COMBINATORIO

Para llevar a cabo las tareas presentadas se ponen en juego diferentes estrategias combinatorias, sobre todo en el desarrollo de la tercera:

- la enumeración exhaustiva de las soluciones (¿identificaste todas las posible*s trenzas?*),
- el recuento de las mismas (¿cuántas son las trenzas de 7?),
- la identificación de la relación de equivalencia (¿hay trenzas repetidas?: se requiere la identificación de las representaciones que producen trenzas iguales).

Asimismo se emplea razonamiento matemático en:

- el reconocimiento de patrones (la simetría de las dos manos, los elementos comunes que se reflejan en el lenguaje),
- la generalización de los patrones a los casos que involucran un número mayor de elementos (aquí tientos) para después deducir las reglas generales (el cálculo del número de tientos en cada pasada).

Cabe destacar que el principal concepto combinatorio que se presenta es la partición o descomposición de un entero positivo en suma de enteros positivos[2], que proporciona un conjunto de combinaciones, de las cuales hay después que tener en cuenta las permutaciones (Fernández y Fernández, 2011).

Será decisión personal del docente que desarrolle la experiencia, institucionalizar el concepto o insistir más bien en los razonamientos y las estrategias de resolución. Esto último ha sido nuestro punto de partida para idear la experiencia, coherente con la perspectiva de nuestra investigación anterior que pretendía sacar a la luz los razonamientos y las estrategias de los artesanos.

CONCLUSIONES

Hemos comenzado destacando la importancia que la Combinatoria debería tener, según la investigación, en la educación secundaria, pasando por indicar la presencia de la misma en el currículo español en distintos bloques y no siempre de forma explícita.

Consideramos que la descripción del diseño de la experiencia y el siguiente análisis han destacado las evidencias que permiten afirmar que las tareas planteadas fomentan el desarrollo de ciertas estrategias combinatorias y del razonamiento matemático en general. En este documento solo procuramos ser exhaustivos y precisos en la descripción del lenguaje artesanal y de las tareas, dejando al docente que decida tomar inspiración de nuestro trabajo, resolver los detalles sobre la organización de las interacciones en el aula, si bien aconsejamos intercalar trabajo en pequeños grupos con trabajo individual y puestas en común entre todos.

Cabe mencionar además que la originalidad del trabajo manual y práctico con el trenzado dota a la experiencia de gran originalidad –así como destacamos en el pasado con propuestas basadas en otras artesanías de trenzado (Albanese, Oliveras y Perales, 2012)- y de una fuerte componente motivadora, siendo ambas cualidades un valor añadido de no escasa importancia en la difícil tarea de hacer atractiva la matemática a los ojos de los estudiantes.

REFERENCIAS

Albanese, V. (2015a). Etnomodelos de trenzado, etnomatemática de una artesanía argentina. *Bolema - Boletim de Educação Matemática, 29*(52), 493-507. DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v29n52a04

Albanese, V. (2015b). Etnomatemáticas en artesanías de trenzado y concepciones sobre las Matemáticas en la formación docente. *Enseñanza de las Ciencias, 33*(1), 277-278. http://dx.doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1614

Albanese, V., (2014). *Etnomatemáticas en artesanías de trenzado y concepciones sobre las Matemáticas en la formación docente*. Tesis Doctoral (Doctorado en Educación). Granada: Universidad de Granada.

2. El número de particiones posibles se llama número de Bell y se relaciona con el número de Stirling, que a su vez cuenta el número de particiones de un conjunto en un determinado número de bloques no vacios.

Albanese, V., y Perales, F. J. (2014). Pensar Matemáticamente: Una Visión Etnomatemática de la Práctica Artesanal Soguera. *RELIME - Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 17*(3), 261-288. doi: 10.12802/relime.13.1731

Albanese, V., Oliveras, M. L. y Perales F. J. (2012). Modelización matemática del trenzado artesanal. *Revista Epsilon*, *29*(81), 53-62.

Batanero, C., Godino, J. D., y Navarro-Pelayo, V. (1994). *Razonamiento combinatorio*. Madrid: Editorial Sintesis.

Fernández, P., y Fernández, J. L. (2011). Las estructuras básicas de la Combinatoria. En: Fernández, P., y Fernández, J. L. *El discreto encanto de la Matemática* (pp. 121-189). Versión preliminar disponible en https://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/gallardo/cap3-parte2-MD-2011-2012.pdf.

Kapur, J. N. (1970). Combinatorial analysis and school mathematics. *Educational Studies in Mathematics Education, 3*(1), 111-127.

MEC (2015). *Real Decreto* 1105/2014*, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.* Madrid: Autor.