

Diseño, gestión y evaluación de actividades matemáticas competenciales en el aula

Ángel Alsina

Universidad de Girona

Resumen: *Se presenta una propuesta para el diseño, la gestión y la evaluación de actividades matemáticas competenciales: se realiza una revisión del término “competencia matemática”; se plantea una secuencia en cinco fases para el diseño de actividades: matematización del contexto, trabajo previo en el aula, trabajo en contexto, trabajo posterior y formalización; se aportan algunas ideas clave para la gestión de actividades; se presenta un instrumento para evaluar la competencia matemática; y se concluye con la presentación de ejemplos de actividades matemáticas competenciales implementadas en aulas de Educación Infantil y Primaria.*

Palabras clave: *práctica docente, competencia matemática, procesos matemáticos, actividad matemática competencial, evaluación de la competencia matemática.*

Design, management and evaluation of competence math classroom activities

Abstract: *A proposal for the design, management and evaluation of mathematical competence activities is presented: a review of the term “mathematical competence” is performed; a sequence of five phases for designing activities arises: mathematisation context, previous work in the classroom, work in context, further work and formalization; some key ideas for managing activities are provided; a tool for assessing mathematical literacy is presented; and it concludes with the presentation of examples of mathematical competence activities implemented in Pre-escolar and Primary Education.*

Keywords: *teaching practice, mathematical competence, mathematical processes, mathematical activity competence, mathematical competence assessment.*

INTRODUCCIÓN

En el ámbito de la educación matemática se ha producido una transformación de los currículos desde una visión tradicional orientada a la adquisición de contenidos hacia

un enfoque renovado cuya finalidad es el desarrollo progresivo de la competencia matemática. Este cambio de orientación responde a la necesidad de alfabetizar a los alumnos para que, más allá de saber resolver adecuadamente ejercicios que plantean los libros de texto, tengan habilidades para usar las matemáticas cuando las precisan. En otras palabras, se pretende que junto con el éxito académico, los alumnos adquieran herramientas que les permitan desenvolverse de manera eficaz en todas las situaciones de la vida cotidiana en las que las matemáticas son necesarias.

El término “competencia” se ha incorporado en el argot del profesorado desde hace ya algunos años. Se trata de un término importado del mundo empresarial que es complejo de definir, por lo que prácticamente existen tantas definiciones como autores y organismos han tratado de definirlo (NCTM, 2000; Niss, 2002; OECD, 2004). De las palabras de estos reconocidos expertos pueden extrapolarse dos ideas opuestas: los más optimistas lo ven como la solución a todos los males, mientras que los más escépticos apuntan que este término no aporta nada nuevo, puesto que desde siempre la escuela ha formado a personas competentes.

Ni blanco ni negro. Por supuesto, no se comparte la opinión de los que consideran que la palabra “competencia” es un tecnicismo más en la lista de términos que aparecen cada vez que se aprueba una nueva ley de educación. Sólo podría compartirse esta idea, y además de forma parcial, si lo que se quiere expresar en realidad es que la escuela tradicional ha formado desde siempre a personas académicamente competentes. La implantación de un currículo orientado a la adquisición de competencias básicas significa un paso adelante y pretende, como se ha indicado, formar a personas con un mayor grado de eficacia para afrontar los problemas reales que plantea la vida, más allá de los estrictamente académicos. Este es un cambio substancial, pero de entrada no es garantía de nada puesto que implica –necesariamente– sacudir algunas creencias y estereotipos muy arraigados respecto a los procesos de enseñanza-aprendizaje.

En este artículo se indaga en uno de estos aspectos: las características de las actividades que se plantean a los alumnos de Educación Infantil y Educación Primaria para que aprendan matemáticas, puesto que la práctica del profesor acaba determinando el aprendizaje del alumno. Para ello, en primer lugar se realiza una revisión del término “competencia matemática”, en segundo lugar se presenta una propuesta para el diseño, la gestión y la evaluación de actividades matemáticas competenciales en las aulas de Educación Infantil y Primaria, y finalmente se presentan ejemplos de actividades matemáticas competenciales implementadas en aulas de Educación Infantil y Primaria.

1. LA COMPETENCIA MATEMÁTICA

1.1. La visión del *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2000)

A partir del trabajo compartido de profesores de matemáticas de Educación Infantil, Primaria y Secundaria; de multitud de sociedades de padres; de grupos de expertos; de seminarios de estudio; de equipos de innovación; de editoriales; de matemáticos

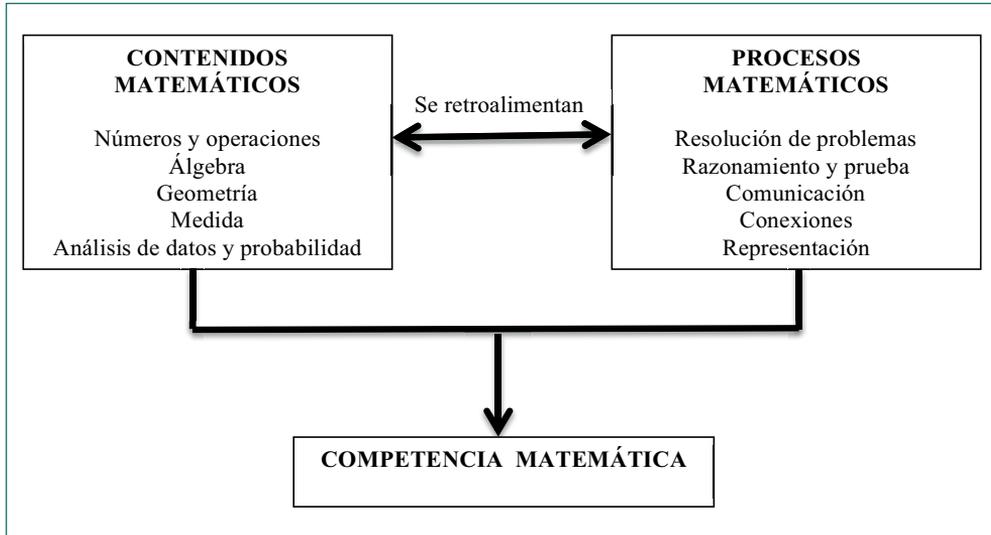


Figura 1. Interrelación entre contenidos y procesos matemáticos.

preocupados por la enseñanza; de investigadores en educación; y de responsables, en general, del currículum de matemáticas, se establecen (NCTM, 2003):

- Cinco estándares de contenidos: números y operaciones, álgebra, geometría, medida, y análisis de datos y probabilidad.
- Cinco estándares de procesos: la resolución de problemas; el razonamiento y la prueba; la comunicación; la representación; y las conexiones.

Los estándares y expectativas específicos referentes a los distintos bloques de contenidos y procesos pueden consultarse en NCTM (2003, p. 399-411). A raíz de la publicación de estos estándares, los currículos de matemáticas de la mayoría de países han ido incorporando paulatinamente los procesos matemáticos que, junto con los contenidos matemáticos, constituyen el conjunto de conocimientos matemáticos que favorecen la competencia matemática. En la Figura 1 se muestra la interrelación entre ambos tipos de conocimientos matemáticos:

Los procesos matemáticos, de acuerdo con Alsina (2012), ponen de relieve las formas de adquisición y uso del conocimiento matemático: pensar, razonar, modelizar, etc. La combinación de contenidos y procesos matemáticos favorece nuevas miradas que enfatizan no solo el contenido y el proceso, sino –y especialmente– las relaciones que se establecen entre ellos. Partir de este enfoque competencial ya desde las primeras edades, en las que todo está integrado, es especialmente significativo dado que cuando los niños usan las relaciones existentes en los contenidos matemáticos, en los procesos matemáticos y las existentes entre ambos, progresa su conocimiento de la disciplina y crece la habilidad para aplicar conceptos y destrezas con más eficacia en diferentes ámbitos de su vida cotidiana.

Desde este enfoque, pues, se insiste en la importancia y la necesidad de entender y ser capaz de usar las matemáticas en la vida diaria y en el trabajo: “en este mundo cambiante, aquellos que comprendan y puedan hacer usar matemáticas tendrán cada vez más oportunidades y opciones para determinar su futuro. La competencia matemática abre puertas a un porvenir productivo; su carencia las mantiene cerradas” (NCTM, 2003, p. 5)

1.2. La visión de Mogens Niss

En una línea similar, Mogen Niss señala la necesidad de substituir los currículos de matemáticas orientados a la adquisición de contenidos, ya que se centran exclusivamente en la adquisición de símbolos y de técnicas, por currículos orientados al uso significativo de estos contenidos en una variedad de situaciones, haciendo hincapié en el enfoque competencial. Desde este prisma, Niss define la competencia matemática como “la habilidad para comprender, juzgar, hacer y usar las matemáticas en una variedad de contextos y situaciones en las que las matemáticas juegan o pueden desempeñar un papel” (Niss, 2002, p 7). Este autor identifica ocho competencias matemáticas que tienen que ver con procesos mentales o físicos, actividades y comportamientos. En otras palabras, la atención se centra en lo que las personas pueden hacer. Dichas competencias se clasifican en dos grupos, según las habilidades implicadas (puede consultarse una versión ampliada en Alsina y López, 2014):

Tabla 1: Competencias matemáticas (Niss, 2002)

Grupo 1: Preguntar y responder preguntas “dentro de” y “con las matemáticas”	Grupo 2: Gestionar el lenguaje matemático y las herramientas matemáticas
Dominio de modos matemáticos de pensamiento (pensar matemáticamente). Planteamiento y resolución de problemas matemáticos. Modelización matemática. Razonamiento matemático.	Representación de las entidades matemáticas (los objetos y situaciones). Manejo de símbolos matemáticos y formalismos. La comunicación en, con, y acerca de las matemáticas. Hacer uso de los recursos y herramientas.

1.3. La visión de PISA (OECD, 2003, 2004)

En el marco de Pisa, en un primer momento se había utilizado el término “alfabetización matemática” (*mathematical literacy*) para referirse a las capacidades individuales de los alumnos para analizar, razonar y comunicar eficazmente cuando formulan y resuelven problemas matemáticos en una variedad de dominios y situaciones. En PISA 2003 se usa ya el término “competencia matemática” (*mathematical competence*) para resaltar su carácter funcional, y se concibe como:

La capacidad de un individuo para identificar y entender el papel que las matemáticas tienen en el mundo, hacer juicios bien fundados y usar e implicarse con las matemáticas en aquellos momentos en que se presenten necesidades para su vida individual como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo (OECD, 2003, p. 24)

Las competencias o procesos generales elegidos por el proyecto PISA son ocho:

Tabla 2. Competencias matemáticas (OECD, 2004)

Planteamiento y resolución de problemas: a) plantear, formular y definir diferentes tipos de problemas matemáticos (puros, aplicados, de respuesta abierta, cerrados); y b) resolver diferentes tipos de problemas matemáticos mediante una diversidad de vías.
Uso de herramientas y recursos: a) recursos y herramientas familiares en contextos, modos y situaciones que son distintos del uso con el que fueron presentados.
Pensamiento y razonamiento: a) plantear cuestiones propias de las matemáticas (¿Cuántos hay? ¿Cómo encontrarlo? Si es así, ¿entonces?); b) conocer los tipos de respuestas que ofrecen las matemáticas a las cuestiones anteriores; c) distinguir entre diferentes tipos de enunciados (definiciones, teoremas, conjeturas, hipótesis, ejemplos, afirmaciones condicionadas); y d) entender y utilizar los conceptos matemáticos en su extensión y sus límites.
Argumentación: a) conocer lo que son las pruebas matemáticas y cómo se diferencian de otros tipos de razonamiento matemático; b) seguir y valorar cadenas de argumentos matemáticos de diferentes tipos; c) disponer de sentido para la heurística (¿Qué puede –o no– ocurrir y por qué?); y d) crear y expresar argumentos matemáticos.
Comunicación: a) expresarse uno mismo en una variedad de vías, sobre temas de contenido matemático, de forma oral y también escrita; y b) entender enunciados sobre estas materias de otras personas en forma oral y escrita.
Representación y uso de operaciones y lenguaje técnico, simbólico y formal: a) decodificar, interpretar y distinguir entre diferentes tipos de representación de objetos matemáticos y situaciones, así como las interrelaciones entre las distintas representaciones; y b) escoger y relacionar diferentes formas de representación de acuerdo con la situación y el propósito.
Utilización del lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones: a) decodificar e interpretar el lenguaje simbólico y formal y entender sus relaciones con el lenguaje natural; b) traducir desde el lenguaje natural al simbólico y formal; c) manejar enunciados y expresiones que contengan símbolos y fórmulas; y d) utilizar variables, resolver ecuaciones y comprender los cálculos.
Construcción de modelos: a) estructurar el campo o situación que va a modelarse; b) traducir la realidad a una estructura matemática; c) interpretar los modelos matemáticos en términos reales: trabajar con un modelo matemático; d) reflexionar, analizar y ofrecer la crítica de un modelo y sus resultados; e) comunicar acerca de un modelo y de sus resultados (incluyendo sus limitaciones); y f) dirigir y controlar el proceso de modelización.

Como puede apreciarse, las tres aproximaciones expuestas presentan diversas similitudes. En la Tabla 3 se realiza una comparación entre los estándares de procesos (NCTM, 2000) y las competencias matemáticas (Niss, 2002; OECD, 2004):

Tabla 3: Comparación entre los estándares de procesos (NCTM, 2000) y las competencias matemáticas (Niss, 2002; OECD, 2004)

Estándares de procesos matemáticos (NCTM, 2000)	Competencias matemáticas (Niss, 2002)	Competencias matemáticas en PISA 2003 (OECD, 2004)
Resolución de problemas	Planteamiento y resolución de problemas matemáticos	Planteamiento y resolución de problemas
	Uso de recursos y herramientas	Uso de herramientas y recursos
Razonamiento y prueba	Dominio de modos de pensamiento matemático	Pensamiento y razonamiento
	Razonamiento matemático	Argumentación
Comunicación	Comunicación en, con y acerca de las matemáticas	Comunicación
Conexiones	-	-
Representación	Representación de entidades matemáticas	Representación y uso de operaciones y lenguaje técnico, simbólico y formal
	Manejo de símbolos matemáticos y formalismos	Utilización del lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones.
	Análisis y construcción de modelos	Construcción de modelos

Los procesos matemáticos y las competencias matemáticas que se exponen en la tabla 3 enfatizan una misma idea: la capacidad de usar de forma comprensiva y eficaz las matemáticas que se aprenden en la escuela en una variedad de contextos, además del escolar, reforzando de esta forma un enfoque social en torno al diseño, aplicación y evaluación de situaciones de aula que fomenten la competencia matemática.

2. EL DISEÑO DE ACTIVIDADES MATEMÁTICAS COMPETENCIALES EN EL AULA

La investigación contemporánea sobre medidas educativas eficaces para mejorar el rendimiento en matemáticas subraya la necesidad de considerar las siguientes medidas (EACEA P9 Eurydice, 2011):

- Atención a las diferentes necesidades del alumnado: adaptarse a las diferentes necesidades de aprendizaje de los alumnos, en lo referente a su disposición hacia el aprendizaje, su interés y su perfil individual de aprendizaje, incide positivamente sobre el rendimiento y la implicación en matemáticas.
- Hincapié en la importancia de las matemáticas: los métodos de enseñanza deberían partir de “grandes temas” y temas multidisciplinares que permitan establecer conexiones con la vida cotidiana y con otras asignaturas.



Figura 2. Pirámide de la Educación Matemática (Alsina, 2010).

- Intervención temprana: los primeros años de escolarización constituyen la base de los futuros aprendizajes en matemáticas, y la identificación de dificultades puede evitar que los niños desarrollen estrategias inadecuadas.
- Factores motivacionales: el profesorado necesita establecer y comunicar a sus alumnos unas expectativas de aprendizaje elevadas y fomentar la participación activa de todos ellos.
- Aumento de la participación de las familias: debe animarse a los padres a que ayuden a aprender y a disfrutar con las matemáticas.

En términos más generales, parece que para lograr cada vez mejores rendimientos es necesario trasladar el currículo de matemáticas a la práctica de aula; aplicar diversos enfoques didácticos para dar respuesta a las necesidades de todos los alumnos; usar de forma eficaz los métodos de evaluación; establecer objetivos y hacer un seguimiento de la eficacia de los programas de apoyo; aumentar la motivación y la implicación de los alumnos a través de iniciativas específicas; ampliar el repertorio didáctico del profesorado y fomentar la flexibilidad; promover políticas basadas en la evidencia; y, por supuesto, trabajar los contenidos a través de los procesos matemáticos.

Desde esta perspectiva, Alsina (2010) plantea que para favorecer el desarrollo de la competencia matemática es preciso partir de contextos de aprendizaje significativos y ajustados a las necesidades de los alumnos. Haciendo un símil con la pirámide de la alimentación, plantea la “Pirámide de la Educación Matemática” en la que se indica de forma sencilla el tipo de recursos necesarios para desarrollar el pensamiento matemático y su frecuencia de uso más recomendable (Figura 2). Como en el caso de la pirámide alimentaria, no descarta ningún recurso, sólo informa sobre la conveniencia de restringir algunos de ellos a un uso ocasional y, por eso, puede ser una herramienta útil

para el profesorado preocupado por hacer de su metodología una garantía de educación matemática.

En la base están los recursos que necesitan todos alumnos y que, por lo tanto, se podrían y deberían “consumir” diariamente para desarrollar la competencia matemática: las situaciones problemáticas y los retos que surgen en la vida cotidiana de cada día, la observación y el análisis de los elementos matemáticos del entorno, la manipulación con materiales diversos, y los juegos, entendidos como la resolución de situaciones problemáticas. Después aparecen los que deben “tomarse” alternativamente varias veces a la semana, como los recursos literarios y los recursos tecnológicos. Por último, en la cúspide, se encuentran los recursos que deberían usarse de forma ocasional, concretamente los libros de texto. Sin embargo, el libro de texto continúa ejerciendo un control considerable en el diseño y el desarrollo de la enseñanza de las matemáticas, por lo que en realidad, en la práctica diaria de muchos docentes este organigrama está invertido: en la base están los libros de texto, mientras que la matematización del entorno, el uso de materiales manipulativos, juegos, etc. “se consumen muy poco”. En nutrición, la inversión de la pirámide conlleva problemas de salud, como por ejemplo la obesidad. En educación matemática, la inversión del organigrama piramidal conlleva también graves problemas como los aprendizajes poco significativos, la desmotivación, la falta de comprensión, etc. Parece necesario, pues, repensar qué tipo de actividades se ofrecen a los alumnos para poder desarrollar su competencia matemática.

En este sentido, se proponen las siguientes fases para el diseño de actividades matemáticas competenciales en el aula:

Fase 1: Matematización del contexto de enseñanza-aprendizaje.

En esta fase todavía no intervienen los alumnos. Consiste en analizar todos los contenidos matemáticos (números y operaciones, álgebra, geometría, medida y análisis de datos y probabilidad) que pueden trabajarse en el contexto de aprendizaje, y establecer a través de qué procesos van a trabajarse.

Figura 3: Relación cartesiana entre contenidos y procesos matemáticos

	Resolución de problemas	Razonamiento y demostración	Comunicación	Conexiones	Representación
Números y operaciones					
Álgebra					
Geometría					
Medida					
Análisis de datos y probabilidad					



Partir de este enfoque globalizado del conocimiento matemático ya desde las primeras edades, en la que todo está integrado, es especialmente significativo, dado que cuando los alumnos usan las relaciones existentes en los contenidos matemáticos, en los procesos matemáticos y las existentes entre ambos, progresa su conocimiento de la disciplina y crece la habilidad para aplicar conceptos y destrezas con más eficacia en diferentes ámbitos de su vida cotidiana.

Fase 2. Trabajo previo en el aula

Cualquier actividad formativa requiere partir de los conocimientos previos de los alumnos, puesto que si la distancia entre lo que el alumno sabe y lo que se planifica que aprenda es demasiado grande, el aprendizaje difícilmente va a producirse. Y en el caso que se produzca, será un aprendizaje desconectado del resto, puesto que no será posible realizar ningún tipo de conexión.

Desde este punto de vista, una vez determinado el contexto de enseñanza-aprendizaje se inicia un diálogo con los alumnos para recoger sus conocimientos previos y experiencias. Existen diversos recursos posibles para hacer emerger los conocimientos previos, aunque uno de los más adecuados son las buenas preguntas. En los procesos de interacción, diálogo y negociación, las buenas preguntas se erigen como uno de los instrumentos de mediación más idóneos, ya que pueden hacer avanzar desde unos primeros niveles de concienciación sobre lo que uno ya sabe o es capaz de hacer hacia niveles más superiores (Mercer, 2001).

En el marco de este diálogo, entre todos se pacta el material para trabajar en contexto y documentar el trabajo que va a realizarse durante el transcurso de la actividad: una cámara digital para poder documentar en contexto, o bien otros materiales que sean necesarios para llevar a cabo la actividad: una cinta métrica, una calculadora, una libreta para anotar los descubrimientos o para representar una idea matemática, etc.

Fase 3: Trabajo en contexto

En esta fase es cuando se desarrolla la actividad matemática competencial en el contexto de enseñanza-aprendizaje establecido, y la práctica docente del maestro debería favorecer que los alumnos usen y comprendan las matemáticas en dicho contexto. Para ello, como se detallará en el apartado correspondiente a la gestión de actividades matemáticas competenciales, el maestro debería provocar situaciones que inviten a los alumnos a pensar, indagar, argumentar, razonar, descubrir, comprobar, comunicar, conectar, modelar o bien representar ideas matemáticas. Así, pues, durante la realización de la actividad competencial es recomendable que el maestro intervenga haciendo preguntas, más que dando explicaciones.

Otro elemento interesante a considerar es la documentación de la actividad. Aunque no se trata de un requisito imprescindible, la documentación a través de fotografías, vídeo, anotaciones en el diario del maestro, etc. pueden tener un papel muy importante: en primer lugar, pueden servir para llevar a cabo procesos de reflexión acerca de la

propia actividad que permitan mejorar actividades posteriores; en segundo lugar, pueden servir a los propios alumnos para observar y ser conscientes de su propia práctica; en tercer lugar, pueden servir para comunicar el trabajo realizado a las familias; y finalmente, también puede ser útiles para mostrar a la comunidad el trabajo que se realiza a través, por ejemplo, de presentaciones en el blog de la escuela.

Fase 4. Trabajo posterior en el aula

Esta fase es fundamental para que los alumnos compartan los conocimientos adquiridos en contexto, consiguiendo de esta forma fomentar la co-construcción de nuevo conocimiento matemático a través del andamiaje colectivo así como la consolidación de aprendizajes ya adquiridos previamente.

Para lograr estas finalidades, de nuevo es aconsejable establecer un diálogo con los alumnos para que comuniquen lo que han aprendido, procurando en todo momento que utilicen un lenguaje matemático adecuado. Además, para interiorizar los aprendizajes adquiridos en contexto, puede resultar muy eficaz que los alumnos representen gráficamente el trabajo realizado.

Fase 5. Formalización de los aprendizajes adquiridos

Una de las finalidades de las matemáticas es representar de manera simbólica las situaciones concretas de la realidad que nos rodea. Por esta razón, una actividad matemática competencial debería finalizar, a medida que avanzan las posibilidades de representación de los alumnos, con la formalización de los aprendizajes matemáticos adquiridos.

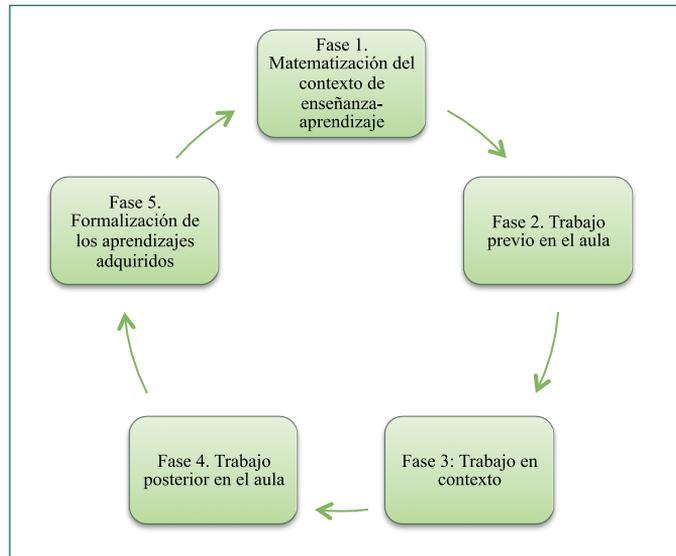
Desde esta perspectiva, los alumnos deben ir adquiriendo progresivamente herramientas que les permitan formalizar los aprendizajes a través del lenguaje escrito en general, y el lenguaje algebraico en particular.

En la Figura 4 se representan esquemáticamente las diferentes fases que debería contemplar una actividad matemática competencial. Como puede apreciarse, se trata de una secuencia continua de fases en un flujo circular. Ello significa que, una vez finalizada la actividad competencial, el alumno dispondrá de un nuevo aprendizaje que va a servirle de base para emprender un nuevo ciclo. En esta nueva secuencia se planificarán otros aprendizajes para que, desde lo concreto, el alumno pueda conectar con lo formal interiorizado en una actividad competencial anterior, aumentando de esta forma la comprensión del conocimiento matemático.

3. LA GESTIÓN DE ACTIVIDADES MATEMÁTICAS COMPETENCIALES EN EL AULA

En la introducción se ha indicado que la práctica docente del maestro determina el aprendizaje que realizan los alumnos. En este sentido, parece evidente que el tipo de gestión de una actividad matemática competencial que contemple el ciclo de fases descrito en el apartado anterior requiere un maestro que participe activamente en el

Figura 4: Fases de una actividad matemática competencial.



proceso de enseñanza-aprendizaje. Esta participación debería contemplar algunos aspectos básicos como por ejemplo plantear retos a los alumnos que despierten su curiosidad; formular buenas preguntas que lleven a razonar sobre lo que se ha hecho y justificar los resultados; fomentar la comunicación y el uso de lenguaje matemático cada vez más preciso en el aula; tener presente la importancia de la representación; conectar los conocimientos matemáticos entre ellos, etc. En otras palabras, se deberían trabajar de forma explícita los procesos matemáticos descritos por el NCTM (2003): resolución de problemas, razonamiento y prueba, comunicación, conexiones y representación.

Desde este prisma, a continuación se ofrece una síntesis de ideas clave en relación al trabajo sistemático de los procesos matemáticos que pueden servir de orientación para una gestión eficaz de las actividades matemáticas competenciales (para una ampliación, puede consultarse NCTM, 2003; Alsina, 2014).

Resolución de problemas

La resolución de problemas permite preguntar y responder preguntas dentro de las matemáticas y con las matemáticas (Niss, 2002). Si bien existe un consenso en este sentido, no parece existir el mismo grado de acuerdo respecto al significado y el uso de los problemas en el aula. Algunas ideas clave que deberían considerarse son:

- Hay cuatro aspectos referentes a la resolución de problemas que se deberían trabajar en el aula (NCTM, 2003): a) construir nuevo conocimiento matemático por medio de la resolución de problemas; b) resolver problemas que surgen de las matemáticas y en otros contextos; c) aplicar y adaptar una variedad de estrategias

apropiadas para resolver problemas; y d) controlar y reflexionar sobre el proceso de resolver problemas matemáticos.

- Una situación problemática es una situación nueva de la que no se conoce de antemano el método de resolución. Deben distinguirse de los ejercicios de aplicación, en los que se conoce de antemano el método de resolución y sirven principalmente para poner en práctica un conocimiento previamente aprendido.
- La resolución de problemas se puede entender como el marco de aplicación de los diferentes bloques de contenido matemático. Además de considerar los problemas según el contenido, también se pueden interpretar en base al tipo de enunciado (visual o verbal), la finalidad (aprender una estrategia, aplicar una técnica, etc.), o bien la respuesta (abierta, cerrada).
- Se aprende a resolver problemas haciendo, manipulando, simulando, discutiendo, compartiendo, imaginando, observando, visualizando, etc. En el proceso de resolución se tendría que permitir que cada niño utilice la estrategia que se ajuste mejor a sus posibilidades: un dibujo, un esquema, el cálculo mental, la manipulación de un determinado material, etc.
- Una posible secuencia de tipos de problemas en las primeras edades es la siguiente (Alsina, 2006): situaciones reales; situaciones dramatizadas; situaciones manipulativas; una parte del enunciado con material y la otra parte verbal; situaciones gráficas, con imágenes e ilustraciones; enunciado oral-respuesta oral; enunciado oral-respuesta gráfica; enunciado gráfico-respuesta gráfica; introducción al enunciado escrito y la respuesta oral o gráfica; introducción al enunciado escrito y la respuesta escrita. Se trata, en definitiva, de partir de lo concreto (situaciones reales) para avanzar progresivamente a lo simbólico (lenguaje escrito).

Razonamiento y prueba

El trabajo sistemático del razonamiento y la prueba es fundamental en todas las edades para que los niños aprendan desde pequeños a razonar (argumentar, explicar, justificar) y probar (en las primeras edades comprobar, más que validar o demostrar) sus acciones y proposiciones, puesto que es el camino necesario para comprender el verdadero significado de las matemáticas. Algunas ideas clave que deberían considerarse son:

- Hay cuatro aspectos referentes al razonamiento y la prueba que se deberían trabajar en el aula (NCTM, 2003): a) reconocer el razonamiento y la prueba como aspectos fundamentales de las matemáticas; b) formular e investigar conjeturas matemáticas; c) desarrollar y evaluar argumentos y pruebas matemáticas; y d) escoger y usar varios tipos de razonamiento y métodos de prueba.
- En las primeras edades el razonamiento es sobre todo informal y se refiere a la capacidad de explicar, argumentar o justificar las acciones realizadas y las proposiciones, mientras que la prueba implica comprobar el resultado de dichas acciones y proposiciones. Desde este prisma, razonar y comprobar implica argumentar las afirmaciones que se hacen (“¿por qué piensas que es verdad?”); descubrir (“¿qué piensas que pasará ahora?”); justificar proposiciones (“¿por qué funciona esto?”); y hacer razonamientos inductivos, basados en la propia experiencia.

- A medida que los niños avanzan en la escolaridad deberían interiorizar otros tipos de razonamiento propios de las matemáticas: el razonamiento algebraico, por ejemplo al argumentar que el patrón de dos series de cubos “azul-verde” y “rojo-amarillo” es el mismo, y representarlo; el razonamiento geométrico, que se puede iniciar describiendo y comparando propiedades geométricas elementales de formas geométricas que no están físicamente presentes; o los razonamientos estadístico y probabilístico, que en las primeras edades se puede fomentar a través de tareas que impliquen la recogida y organización de datos, la comparación, etc.
- Las proyectos pueden favorecer el razonamiento y la prueba, junto a otras prácticas como las situaciones de experimentación y juego, en contraposición a otras prácticas docentes más descontextualizadas, poco significativas y a menudo orientadas a la adquisición de técnicas y símbolos a través de la repetición y la práctica.
- Una gestión de las prácticas matemáticas que favorezca el razonamiento y la prueba implica plantear buenas preguntas, más que dar explicaciones; favorecer la interacción y el contraste; e incentivar la indagación y el aprendizaje autónomo con la guía del adulto.

La comunicación

Nadie niega que la matemática es, entre otras cosas, un lenguaje universal que permite comunicarse. Así, pues, los niños que tienen oportunidades y se sienten motivados y apoyados para hablar, escribir, leer y escuchar en las clases de matemáticas se benefician doblemente: comunican para aprender matemáticas y aprenden a comunicar matemáticamente. Algunas ideas clave que deberían considerarse son:

- Hay cuatro aspectos referentes a la comunicación que se deberían trabajar en el aula (NCTM, 2003): a) organizar y consolidar el pensamiento matemático a través de la comunicación; b) comunicar el pensamiento matemático con coherencia y claridad a los compañeros, maestros y otras personas; c) analizar y evaluar las estrategias y el pensamiento matemático de los otros; y d) usar el lenguaje matemático para expresar ideas matemáticas con precisión.
- El lenguaje oral y escrito son herramientas imprescindibles (y previas al lenguaje simbólico) para desarrollar y comunicar el pensamiento matemático, ya que favorecen la comprensión del conocimiento y la estructuración del pensamiento.
- La comunicación se tiene que distinguir de la información: informar implica transmitir en sentido unidireccional desde un emisor hacia un receptor; en cambio comunicar implica interactuar en sentido bidireccional dos o más personas.
- El trabajo sistemático de la comunicación en el aula de matemáticas requiere integrar los procesos de interacción, diálogo y negociación alrededor de los contenidos matemáticos y su gestión, puesto que los niños a menudo interpretan las normas establecidas de maneras diferentes, y muy a menudo también estas interpretaciones difieren de las que los maestros esperan.
- A nivel curricular se insiste en la necesidad de plantear buenas preguntas para favorecer la comunicación, sin embargo ha habido escasas aportaciones sobre qué características debería tener una buena pregunta, qué tipos de preguntas se tendrían

que formular y cómo se tendrían que formular para favorecer el desarrollo del pensamiento matemático. Las buenas preguntas para enseñar matemáticas, de acuerdo con Sullivan y Lilburn (2002), tienen tres características: a) más que recordar un hecho o reproducir una acción, requieren comprensión de la tarea, aplicación de técnicas y estrategias y análisis y síntesis de los conceptos implicados; b) permiten que los niños aprendan respondiendo preguntas, y que los maestros aprendan a partir de las respuestas de los niños; y c) permiten diversas respuestas aceptables.

Las conexiones

Se refieren a las relaciones entre los diferentes bloques de contenido matemático y entre los contenidos y los procesos matemáticos (intradisciplinariedad); las relaciones de las matemáticas con otras áreas de conocimiento (interdisciplinariedad); y las relaciones de las matemáticas con el entorno que nos rodea. Algunas ideas clave que deberían considerarse son:

- Hay tres aspectos referentes a las conexiones que se deberían trabajar en el aula (NCTM, 2003): a) reconocer y usar las conexiones entre ideas matemáticas; b) comprender cómo las ideas matemáticas se interconectan y construyen una sobre otras para producir un todo coherente; c) reconocer y aplicar las matemáticas en contextos no matemáticos.
- Las conexiones entre los diferentes bloques de contenido matemático ponen de manifiesto que las matemáticas no son una colección fragmentada de bloques de contenido, aunque con frecuencia se dividen y presentan así, sino que constituyen un campo integrado de conocimiento. Hay unas mismas estructuras matemáticas que se repiten: identificar (definir o reconocer); relacionar (comparar); y operar (transformar), lo único que varía es el tipo de contenido.
- Las conexiones entre los contenidos y los procesos matemáticos evidencian que no son conocimientos independientes de una misma disciplina sino que se interrelacionan, se retroalimentan para favorecer la competencia matemática.
- Las conexiones entre las matemáticas y las otras áreas de conocimiento ponen de manifiesto la relevancia de trabajar las matemáticas en conexión con el arte, por ejemplo, trabajando las matemáticas a partir de pinturas y esculturas; con la música, trabajando a partir de canciones; con la psicomotricidad, trabajando aspectos diversos relativos a la orientación y la estructuración espacial, etc.
- Las conexiones entre las matemáticas y el entorno evidencian que el uso de contextos de vida cotidiana puede contribuir a comprender el papel social de las matemáticas, al fomentar el uso de las matemáticas en contextos no exclusivamente escolares.

La representación

Las representaciones se refieren a las formas de representar las ideas y procedimientos matemáticos, como por ejemplo imágenes, materiales concretos, tablas, gráficos, números, letras, entre otras. Muchas de las representaciones que existen actualmente son el resultado de una construcción cultural, que llevó muchos años determinar. Cuando los

niños comprenden las representaciones matemáticas que se les presenta y además tienen oportunidades de crear otras, mejoran su capacidad para modelar e interpretar fenómenos físicos, sociales y matemáticos. La representación es, pues, un proceso indispensable para poder aprender. Si no hay representación del conocimiento no hay aprendizaje. Algunas ideas clave que deberían considerarse son:

- Hay tres aspectos referentes a la representación que se deberían trabajar en el aula (NCTM, 2000): a) crear y usar representaciones para organizar, registrar, y comunicar ideas matemáticas; b) seleccionar, aplicar y traducir representaciones matemáticas para resolver problemas; y c) usar representaciones para modelar e interpretar fenómenos físicos, sociales y matemáticos.
- La representación de las ideas y procedimientos matemáticos puede tener formas diversas en las primeras edades, por ejemplo a través de objetos físicos (una pieza con forma de triángulo), el lenguaje natural (la palabra “triángulo”), dibujos (triángulos de diferentes características), y símbolos convencionales (un triángulo equilátero).
- El desarrollo progresivo de la representación de las ideas y procedimientos matemáticos va de lo concreto a lo abstracto (Freudenthal, 1973). En este sentido, se respeta y favorece su proceso de adquisición cuando se fomenta por ejemplo que las primeras representaciones sean concretas, a partir de objetos o dibujos y usando el lenguaje natural; posteriormente pictóricas, usando tablas o diagramas; y finalmente convencionales, usando símbolos abstractos.
- La adquisición progresiva de la representación de las ideas y procedimientos matemáticos aumenta la capacidad para modelar e interpretar fenómenos físicos, sociales y matemáticos. En otras palabras, permite hacer modelos e interpretar la realidad. Un modelo es, pues, una representación ideal de un aspecto concreto de la realidad usada con finalidades de interpretación.
- Pueden usarse distintos tipos de modelos: a) modelos manipulables (materiales físicos con los que trabajan los niños, como por ejemplo una regleta que representa el número cinco); b) modelos ejemplificadores o simuladores (por ejemplo el dibujo de un itinerario que puede hacer un niño, o en términos más complejos, el plano esquemático de la red del metro de una gran ciudad).

4. LA EVALUACIÓN DE ACTIVIDADES MATEMÁTICAS COMPETENCIALES EN EL AULA

La evaluación de prácticas docentes que incorporen los procesos matemáticos de forma sistemática como herramientas para trabajar los diferentes contenidos requiere elaborar indicadores de referencia que permitan analizar la presencia (o no) de los procesos en dichas prácticas. Desde este punto de vista, Coronata (2014) y Alsina y Coronata (2014) han elaborado y analizado la validez de un instrumento de evaluación que incluye cinco categorías que se corresponden con los cinco procesos indicados por el NCTM (2003). Posteriormente se ha analizado la fiabilidad del instrumento (Maurandi, Alsina y Coronata, en revisión). La presencia de cada indicador se mide con una escala tipo Likert que va de 1 (ausencia) a 5 (presencia):

	Ausencia → Presencia				
1. Indicadores de RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS:	1	2	3	4	5
Plantea situaciones problemáticas usando diferentes tipos de apoyo (oral, concreto, pictórico).					
Contextualiza las situaciones problemáticas a la vida cotidiana de los alumnos.					
Propone situaciones problemáticas de diversos tipos.					
Realiza preguntas que generan la investigación y exploración para solucionar al problema.					
Permite a los niños la utilización de material concreto y/o pictórico con apoyo oral para la resolución de problemas.					
Mantiene a los niños comprometidos con el proceso de resolución de problemas.					
Promueve la discusión en torno a las estrategias de resolución de problemas y los resultados.					
2. Indicadores de RAZONAMIENTO Y PRUEBA:	1	2	3	4	5
Invita a hacer conjeturas.					
Permite que los propios alumnos descubran, analicen y propongan diversas vías de resolución.					
Pide a los alumnos que expliquen, justifiquen o argumenten las estrategias o técnicas que utilizaron durante la resolución.					
Plantea interrogantes para que los alumnos argumenten sus respuestas.					
Promueve que los alumnos comprueben conjeturas de la vida cotidiana.					
Promueve el apoyo del razonamiento matemático.					
Entrega retroalimentación con material concreto permitiendo el pensamiento divergente.					
3. Indicadores de CONEXIONES:	1	2	3	4	5
Considera las experiencias matemáticas cotidianas de los alumnos para avanzar hacia las matemáticas más formales.					
Realiza conexiones entre diversos contenidos matemáticos.					
Desarrolla actividades matemáticas vinculadas a contextos musicales.					
Trabaja las matemáticas vinculándolas con la literatura infantil.					
Relaciona las matemáticas con la expresión artística.					

	Ausencia → Presencia				
Genera conocimiento matemático a través de contextos vinculados a la psicomotricidad.					
Promueve que los alumnos apliquen el conocimiento matemático a las situaciones de la vida cotidiana.					
4. Indicadores de COMUNICACIÓN:	1	2	3	4	5
Promueve con mayor énfasis la comunicación en el aula que la entrega de información unidireccional.					
Favorece la interacción con otros para aprender y comprender las ideas matemáticas.					
Impulsa el intercambio de ideas matemáticas a través del lenguaje oral, gesticular, gráfico, concreto y /o simbólico.					
Pide al niño explicitar con lenguaje matemático adecuado sus estrategias y respuestas.					
Incentiva en los alumnos el respeto por la forma de pensar y de exponer sus puntos de vista en torno al contenido matemático.					
Fomenta la escucha atenta de los puntos de vista de los demás.					
Interviene mayoritariamente a través de preguntas, más que a través de explicaciones.					
5. Indicadores de REPRESENTACIÓN:	1	2	3	4	5
Pide a los niños que hablen, escuchen y reflexionen sobre las matemáticas para avanzar hacia la representación simbólica.					
Utiliza materiales concretos como recursos para representar ideas matemáticas.					
Utiliza modelos ejemplificadores (esquemas, entre otros) para mostrar maneras de resolver situaciones problemáticas.					
Trabaja en los niños las representaciones concretas (dibujos, etc.).					
Trabaja en los niños las representaciones pictóricas (signos, etc.).					
Trabaja en los niños las representaciones simbólicas (notación convencional).					
Muestra un trabajo bidireccional (de lo concreto a lo abstracto y de lo abstracto a lo concreto).					

A partir del análisis de la validez y la fiabilidad, se puede concluir que este instrumento permite evaluar de forma fiable la presencia de los procesos matemáticos en las prácticas docentes.

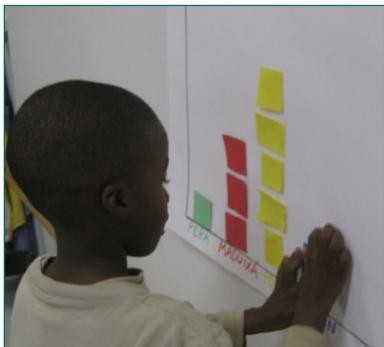


Figura 5. Recopilación previa de datos (tipo de fruta), organización, representación y comparación a partir de un gráfico de barras.



Figuras 6. Observación de las agrupaciones y clasificaciones de frutas según criterios diversos (tipo de fruta, tamaño, etc.), y situaciones de compra-venta.

5. ACTIVIDADES MATEMÁTICAS COMPETENCIALES EN EDUCACIÓN INFANTIL Y PRIMARIA

En este último apartado se muestra una selección breve de actividades matemáticas competenciales. Todas ellas tienen en común que, siguiendo las fases descritas para el diseño de una actividad matemática competencial, se realiza una planificación de los contenidos a trabajar en el contexto de aprendizaje y a través de qué procesos se trabajan, y durante toda la secuencia se lleva a cabo un tipo de gestión que prioriza la coconstrucción de conocimientos matemáticos mediante el andamiaje colectivo (trabajo por parejas, en pequeño grupo, en grupo medio o gran grupo).

Actividad 5.1. El Mercado de la Devesa

- Escuela: Balandrau (Girona).
- Nivel: 5-6 años (Educación Infantil).
- Maestra responsable de la implementación y la documentación: Fátima Dalmau.
- Asesoramiento pedagógico: Ángel Alsina

La actividad central consiste en ir al mercado a comprar fruta. Se realiza un trabajo previo en el aula para contextualizar la actividad en la que cada alumno elige la fruta que quiere comprar (figuras 5 a 11). El día siguiente los alumnos van al mercado a comprar la fruta y posteriormente, en el aula, surgen dos situaciones problemáticas que los alumnos resuelven a través del diálogo y la discusión de puntos de vista por parte del grupo, la búsqueda de alternativas, el tanteo, la manipulación directa con materiales, la verbalización y argumentación de ideas, del proceso seguido y de los resultados. Además, representan los resultados a través de materiales y/o dibujos.



Figuras 7-9. Reparto de cerezas en cuatro grupos.



Figuras 10-11. Partición de “plátanos” en tres trozos.

Actividad 5.2. El proyecto de los ajos

- Escuela: Bosc de la Pabordia (Girona).
- Nivel: 1º de Educación Primaria (6-7 años).
- Maestra responsable de la implementación: Anna Puig.
- Asesoramiento pedagógico: Ángel Alsina
- Documentación gráfica: Yenisel Acosta

La actividad se lleva a cabo en el contexto de dos asignaturas, que se trabajan de forma interrelacionada: Conocimiento del Medio Natural y Matemáticas. En primer lugar se plantea un reto a los alumnos: después de plantar ajos en el invernadero y en el huerto, se quiere analizar cómo se comporta la temperatura en estos dos lugares para ver cómo incide en el crecimiento de los ajos, y poder determinar donde crecen más.

En primer lugar se lleva a cabo un proceso de diálogo, discusión y negociación para pactar la forma más adecuada de recoger los datos (figura 12).

Se plantean diversas preguntas para recoger conocimientos previos sobre el funcionamiento de los termómetros y recogen las temperaturas durante una semana (figura 13 y 14).

Una semana después se ponen en común los datos, y los alumnos deciden la forma de representarlos (figura 15 y 16).

Posteriormente interpretan los datos y concluyen que en el invernadero la temperatura es más alta y los ajos crecen más en invierno que en el huerto que está en el exterior (figura 17 y 18).



Figura 12. Diseño de una tabla de recogida de datos entre todos.



Figuras 13 y 14. Recogida de temperaturas.

	23	24	25	26	27	FEBRA
	DILLUNS	DIMARTS	DIMECRES	DIJOUS	DIVENDRES	
	10°C	23°C	23°C	11°C		
	0°C	10°C	14°C	12°C	8°C	



Figuras 15 y 16: Lectura y representación de temperaturas mediante policubos (azul: huerto exterior; rojo o rosa: invernadero).



Figuras 17 y 18:
Interpretación del gráfico de barras.

Actividad 5.3. Gincana de medidas

- Escuela: L'Estació (Sant Feliu de Guíxols, Girona).
- Nivel: 3º a 6º de Educación Primaria.
- Maestro responsable de la implementación y documentación: Xavier Fernández.

La actividad consiste en llevar a cabo diferentes actividades de práctica de medida mediante pruebas que los alumnos, por parejas, deben ir superando. Tienen a su disposición diferentes instrumentos de medida, que eligen según el tipo de práctica que deben realizar (figura 19 y 20).

Una vez leída la prueba, cada pareja de alumnos la resuelve. A modo de ejemplo, se presentan tres de las pruebas (figuras 21a la 26):

Una vez finalizada la gincana, los alumnos anotan sus resultados y recogen el material (figura 27 y 28):

A modo de consideraciones finales, las actividades descritas parten de un enfoque competencial que favorece la conexión entre varios tipos de contenidos matemáticos y sobre todo, del trabajo sistemático de los procesos matemáticos para ayudar a los alumnos a comprender los conocimientos matemáticos: la resolución de problemas, a través de la formulación de preguntas que invitan a hacer pequeñas investigaciones; el razonamiento y la prueba, potenciando que expliquen, justifiquen, argumenten y razonen las acciones y los descubrimientos que hacen, y en algunos casos que los comprueben; la comunicación y la representación, incentivando la expresión verbal de las acciones hechas y su representación gráfica; y finalmente, las conexiones con otras áreas curriculares.



Figuras 19 - 20: Pruebas e instrumentos de medida a disposición de los alumnos.



Figuras 21 -22:
Medición del largo
del pasillo del
colegio.



Figuras 23-24: Miden $\frac{3}{4}$ de litro
de agua.



Figuras 25-26: Mide la superficie de un triángulo.



Figuras 27 y 28:
Finalización de la gincana.

REFERENCIAS

- Alsina Á. y López, P. (2014). Sobre la naturaleza de las Matemáticas en la formación inicial de maestros: los procesos matemáticos en el sistema de creencias de los estudiantes. *Epsilon*, 31(3), 7-20.
- Alsina, Á. (2014). Procesos matemáticos en Educación Infantil: 50 ideas clave. *Números* 86, 5-28.
- Alsina, Á. (2006). *Como desarrollar el pensamiento matemático de 0 a 6 años*. Barcelona: Editorial Octaedro-Eumo.
- Alsina, Á. (2010). La “pirámide de la educación matemática”, una herramienta para ayudar a desarrollar la competencia matemática. *Aula de Innovación Educativa*, 189, 12-16.
- Alsina, Á. (2012). Más allá de los contenidos, los procesos matemáticos en Educación Infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 1(1), 1-14.
- Alsina, Á. y Coronata, C. (2014). Los procesos matemáticos en las prácticas docentes: diseño, construcción y validación de un instrumento de evaluación. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 3(2), 21-34.
- Coronata, C. (2014). *Presencia de los procesos matemáticos en la enseñanza del número de 4 a 8 años. Transición entre la Educación Infantil y Primaria*. Girona: Universidad de Girona. Tesis Doctoral
- EACEA P9 Eurydice (2011). *La enseñanza de las matemáticas en Europa: Retos comunes y políticas nacionales*. Madrid: Secretaría General Técnica, Subdirección General de Documentación y Publicaciones del Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.
- Maurandi, A., Alsina, Á. y Coronata, C. (en prensa). Los procesos matemáticos en la práctica docente: análisis de la fiabilidad de un cuestionario de evaluación. *Revista de Investigación Educativa*.
- Mercer, N. (2001). *Palabras y mentes*. Barcelona: Paidós.
- NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, Va.: The National Council of Teachers of Mathematics
- NCTM. (2003). *Principios y estándares para la educación matemática*. Granada: Servicio de Publicaciones de la SAEM Thales.
- Niss, M. (2002). *Mathematical competencies and the learning of mathematics: the Danish Kom Project*. Roskilde: Roskilde University.
- OECD (2003). *The PISA 2003 Assessment Framework – Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills*. París: OCDE.
- OECD (2004). *Learning for tomorrow's world: First results from PISA 2003*. París: OECD.