ENSINO DO CÁLCULO COM O MAPLE NO CURSO DE ENGENHARIA DE ALIMENTOS.

Paulo Cléber Mendonça Teixeira – Daniella Oliveira Lopes
clebermt@mail.uft.edu.br - danioliveiralo@hotmail.com
Universidade Federal do Tocantins - Universidade Federal do Tocantins

Tema: La Resolución de Problemas como Herramienta para la Modelización Matemática.
Modalidad: CB
Nivel educativo: Terciario - Universitario
Palabras clave: Cálculo; Maple, problemas e Modelagem.

Resumen

O presente trabalho é resultado de uma atividade desenvolvida na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral II no Curso de Engenharia de Alimentos. Foi investigado como a utilização do software Maple na resolução do problema no Ensino do Cálculo. Para exemplificar esse trabalho, a atividade proposta consistiu em que uma substância A com uma substância B para formar uma terceira substância C, de tal forma que a taxa de variação da quantidade C seja proporcional ao produto das quantidades de A e de B ainda presentes em qualquer tempo dado. Para desenvolver a atividade foi necessária a utilização de conceitos básicos de Cálculo "técnicas de integração", onde pode ser realizada via simulações com o Maple, objetivando uma maior compreensão dos objetivos propostos nas disciplinas de cálculo e o estimulo do próprio aprendizado e manipulação dos conceitos e ferramentas matemáticas, onde mostrar a eficácia do software no ensino do cálculo.

Introdução.

Muitas vezes a Matemática é vista como uma disciplina isolada e sem aplicações na vida prática. Os professores, muitas vezes, são atropelados pelo excesso de assuntos a serem trabalhados num curto espaço de tempo. Muitas disciplinas de Matemática têm altos índices de rendimento insatisfatório, evasão e reprovação. Uma das principais razões para que isso ocorra é a pouca motivação dos alunos para aprendizagem, que pode ser desencadeada pela metodologia utilizada pelo professor, que geralmente é a aula expositiva . Esse método expositivo exige que o aluno use toda a sua capacidade de abstração para compreender determinados conceitos, mas sabe-se que nem todos os alunos têm a mesma facilidade para tal. Nesta perspectiva, quando o aprendiz consegue visualizar, de forma concreta, aquilo que o professor quer que ele abstraia, o aprendizado acontece com maior freqüência.

Quando utilizamos novas metodologias nas aulas de Matemática, percebemos que o processo ensino-aprendizagem se torna mais prazeroso para o aluno, pois ele consegue entender o que está sendo proposto em sala. Sendo assim, os softwares, neste caso o Maple, exercem grande influência no desenvolvimento intelectual dos alunos.

O uso do computador como ferramenta no ensino, é hoje bastante utilizado em quase todas as áreas. A informática é uma das alternativas mais poderosas no ensino moderno principalmente aqueles que envolvem modelos matemáticos, sendo que, foram desenvolvidos vários softwares nessa direção. Um deles é o Maple que tem uma capacidade extraordinária de lidar com os mais diversos conteúdos matemáticos, o qual sua expansibilidade fornece uma notável propriedade de permitir a elaboração de diversos modelos matemáticos.

Foi necessário fazer um aprofundamento no estudo do software Maple, além de pesquisas em livros que abordam a utilização do Maple no ensino de assuntos relacionados ao ensino-aprendizagem da disciplina de cálculo II com a utilização dessa ferramenta, observando aplicações no curso de Engenharia de Alimentos. Para isso, utilizamos o livro O Cálculo com Geometria Analítica, Volume 1 (LEITHOLD, 1994), no direcionamento teórico das atividades, em particular, a apresentação de cálculos envolvendo Técnicas de Integração: Frações Parciais, quando o denominador tem somente fatores lineares.

Modelagem Matemática

Modelagem *é a* operação de modelar; e modelar, por sua vez, significa fazer ou representar por meio de modelo. Dentre os vários significados atribuídos à palavra "modelo", os que parecem mais próximos de um contexto matemático estão relacionados à informática, à física e à economia. Por exemplo, em um contexto de informática, modelo seria a representação simplificada e abstrata de fenômeno ou situação concreta, e que serve de referência para a observação, estudo ou análise. O estudo da modelagem se estende na formação de professores, transformando a matemática pura em uma matemática aplicada, que interage com a realidade, sendo que "[...] O desafio do professor que toma o caminho da modelagem como método de ensino, é ajudar o aluno a compreender, construindo relações matemáticas significativas, a cada etapa do processo" (BASSANEZI, 1999, p.13). O essencial é privilegiar um ensino voltado para os interesses e necessidades da comunidade, onde o estudante seja considerado como um participante ativo (BASSANEZZI, 1999).

O Software Maple.

O Maple é um software que abrange uma ampla gama de assuntos relacionados ao aprendizado e ao uso de recursos matemáticos com fins em si mesmos ou que sirvam de ferramentas de trabalho para engenheiros, físicos, químicos acadêmicos e outros que necessitam de conhecimentos na área de exatas. Além disso, constitui um ambiente informático para a computação de expressões algébricas ou simbólicas, permitindo o desenho de gráficos em duas ou três dimensões. O seu desenvolvimento começou em 1981 pelo Grupo de Computação Simbólica na Waterloo University Inc. em Waterloo, no Canadá. Deste de 1988, o Maple tem sido desenvolvido e comercializado pela Maplesoft, uma companhia canadense baseada em Waterloo (MAPLESOFT, 2010).

Modelagem Matemática e Maple na Educação Matemática.

Os computadores têm-se revelado uma fonte fértil de possibilidades para o ensino e a aprendizagem de forma geral e da matemática, em particular.
Segundo a literatura, à medida que os computadores estão se tornando mais acessíveis, financeira e tecnicamente, estão entrando nas aulas de matemática e sendo utilizados para lidar com Modelagem Matemática. Nesse trabalho, os autores fazem um estudo da arte sobre resolução de problemas, Modelagem e aplicações a outras áreas na Educação Matemática. Eles apresentam algumas noções e conceitos básicos relacionados ao tema, os mais importantes argumentos a seu favor, a situação na época, as tendências e as linhas prospectivas de desenvolvimento da resolução de problemas, Modelagem e aplicações na Educação Matemática. Apresentam, também, algumas questões e problemas relacionados com o assunto.

Modelagem do Problema

O problema da lei de ação das massas fornece uma aplicação de integração que nos leva ao uso de frações parciais. Sob certas condições, sabe-se que uma substância A reage com uma substância B para formar uma terceira substância C, de tal forma que a taxa de variação da quantidade C seja proporcional ao produto das quantidades de A e de B ainda presentes em qualquer tempo dado.
Suponhamos que exista inicialmente α grama (g) de A e β grama (g) de B e que r gramas (g) de A combinem-se com s grama (g) de B para formar (r + s) grama de (g) de C. Se houver x grama (g) de C em t unidades de tempo, então C conterá $rx/(r+s)$

grama (g) de A e grama (g) de B. O número de gramas da substância A que restou é $\alpha-\left(rx/(r+s)\right)$, e o número de gramas de B que restou é $\beta-\left[sx/(r+s)\right]$. Logo, a lei de ação de massas dá:

$$dx/dt = K\left[\left(\alpha-(rx/(r+s))\right)\left(\beta-(sx/(r+s))\right)\right] \tag{01}$$

Onde K é a constante de proporcionalidade. Fazendo algumas operações matemáticas a equação (01) pode ser escrita como:

$$dx/dt = \left(Krs/(r+s)^2\right)\left((r+s/r)(\alpha-x)\right)\left((r+s/s)(\beta-x)\right) \tag{02}$$

Tomando:

$$k = \left(Krs/(r+s)^2\right) \tag{03}$$

$$a = \left((r+s)/r\right)\alpha \tag{04}$$

$$b = \left((r+s)/s\right)\beta \tag{05}$$

Substituindo as equações (03), (04) e (05) na equação (02), essa igualdade torna-se:

$$\left(dx/dt\right) = k\left(a-x\right)\left(b-x\right) \tag{06}$$

Podemos separar as variáveis em (06) e obter:

$$\left(dx/\left(a-x\right)\left(b-x\right)\right) = kdt \tag{07}$$

Que é o modelo matemático da lei de ação de massas procurado.

Se a = b, então o primeiro membro da equação pode ser integrado usando a fórmula da potência. Se a ≠ b podemos usar frações parciais para a integração.

Usando o Maple para calcular a Modelagem Matemática

> # A seguir, iniciaremos a utilização do Maple.
> # O problema da lei de ação das massas fornece uma aplicação de integração que nos leva ao uso de frações parciais.
> # sabe-se que uma substância A reage com uma substância B para formar uma terceira substância C, de tal forma que a taxa de variação da quantidade C seja proporcional ao produto das quantidades de A e de B ainda presentes em qualquer tempo dado.
> A:=alpha; # grama de A.

$$A := \alpha$$

> B:=beta; # grama de B

$$B := \beta$$

> C:= (r+s); # r gramas (g) de A combinem-se com s grama (g) de B para formar C.

$$C := r + s$$

> w:=(r*s/(r+s)); # quantidade de grama de A e B que C tem.

$$w := \frac{r\,s}{r+s}$$

> W1:=[alpha-(r*x/(r+s))]; # nº de gramas que restou na substância de A.

$$W1 := \left[\alpha - \frac{rx}{r+s}\right]$$

> W2:=[beta-(s*x/(r+s))]; # nº de gramas que restou na substância de B.

$$W2 := \left[\beta - \frac{sx}{r+s}\right]$$

> # Logo, a lei de ação de massas dá:

> Diff(k*[alpha-(r*x/(r+s))]*[beta-(s*x/(r+s))],t);

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(k\left[\alpha - \frac{r\,x}{r+s}\right]\left[\beta - \frac{s\,x}{r+s}\right]\right)$$

> #Onde K é a constante de proporcionalidade. Fazendo algumas operações matemáticas a equação pode ser escrita como:

> Diff([(K*r*s)/((r+s)^2)]*[(((r+s)/r)*(alpha)-x)]*[(((r+s)/s)*(beta)-x)],t);

$$\frac{d}{dt}\left(\left[\frac{K\,r\,s}{(r+s)^2}\right]\left[\frac{(r+s)\,\alpha}{r} - x\right]\left[\frac{(r+s)\,\beta}{s} - x\right]\right)$$

> # Encontramos a modelagem matemática utilizando o Maple

> #Fazendo

> k:=[(K*r*s)/((r+s)^2)];

$$k := \left[\frac{K\,r\,s}{(r+s)^2}\right]$$

> a:=[(((r+s)/r)*(alpha))];

$$a := \left[\frac{(r+s)\,\alpha}{r}\right]$$

> b:=[(((r+s)/r)*(beta))];

$$b := \left[\frac{(r+s)\,\beta}{r}\right]$$

> #Podemos separar as variáveis em (08) para resolver o modelo matemático.

> restart; with(student):

> Int(1/[(a-x)*(b-x)],x)=Int(k,t);

$$\int \frac{1}{[(a-x)\,(b-x)]}\,dx = \int k\,dt$$

> # Iremos resolver cada integral separadamente e depois iremos igualar.

> Int(1/((a-x)*(b-x)),x);# Vamos fazer o calculo da integral.

$$\int \frac{1}{(a-x)\,(b-x)}\,dx$$

> with(student):

> f:=(1/((a-x)*(b-x))):

> z:=Int(f,x);

$$z := \int \frac{1}{(a-x)\,(b-x)}\,dx$$

> w:=convert(integrand(z),parfrac,x);

$$w := \frac{1}{(a-b)\,(-a+x)} - \frac{1}{(a-b)\,(-b+x)}$$

> a1:=Int(w,x);

$$a1 := \int \left(\frac{1}{(a-b)\,(-a+x)} - \frac{1}{(a-b)\,(-b+x)} \right) dx$$

> Int(f,x)=value(a1)+C1;

$$\int \frac{1}{(a-x)\,(b-x)}\,dx = \frac{\ln(-a+x)}{a-b} - \frac{\ln(-b+x)}{a-b} + C1$$

> Int(k,t);# Vamos fazer o calculo da integral.

$$\int k\,dt$$

> Int(k,t)=int(k,t)+C2;

$$\int k\,dt = k\,t + C2$$

> (value(a1)-int(k,t)+C)=0;#Logo encontramos a solução do nosso modelo, onde C=C1+C2.

$$\frac{\ln(-a+x)}{a-b} - \frac{\ln(-b+x)}{a-b} - k\,t + C = 0$$

Encontramos a solução do modelo procurado utilizando o Maple, ou seja, os descritores matemáticos indicados anteriormente fornecem uma estimativa física inicial do comportamento das variáveis envolvidas no processo de o problema da lei de ação das massas fornece uma aplicação de integração que nos leva ao uso de frações parciais, o que nos remete a uma aplicação efetiva na engenharia de alimentos relacionada a testes de aplicações e estimativas de dosagens de determinadas substâncias, conforme veremos a seguir.

Uma aplicação do modelo da lei de ação das massas

> # Resolvendo o problema utilizando Maple.
> Int(1/((8-x)*(6-x)),x);# onde a = 8 e b = 6.

$$\int \frac{1}{(8-x)\,(6-x)}\,dx$$

> restart; with(student): Int(1/[(8-x)*(6-x)],x)=Int(k,t);# onde a = 8 e b = 6.

$$\int \frac{1}{[(8-x)\,(6-x)]}\,dx = \int k\,dt$$

> restart;
> Diff(k*(1/(8-x)*(6-x)),t)=0;

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{k\,(6-x)}{8-x}\right) = 0$$

> restart;# Resolvendo o problema utilizando Maple.
> with(student):
> Int(1/[(8-x)*(6-x)],x)=Int(k,t);# onde a = 8 e b = 6.

$$\int \frac{1}{[(8-x)\,(6-x)]}\,dx = \int k\,dt$$

> Int(1/((8-x)*(6-x)),x);# Resolvendo a integral do lado esquerdo primeiro.

$$\int \frac{1}{(8-x)\,(6-x)}\,dx$$

> with(student):
> f:=(1/((8-x)*(6-x))): z:=Int(f,x);

$$z := \int \frac{1}{(8-x)\,(6-x)}\,\mathrm{d}x$$

> w:=convert(integrand(z),parfrac,x);#Escrevendo o integrando como soma de frações parciais, iremos obter

$$w := \frac{1}{2\,(-8+x)} - \frac{1}{2\,(-6+x)}$$

> a1:=Int(w,x);

$$a1 := \int \left(\frac{1}{2\,(-8+x)} - \frac{1}{2\,(-6+x)} \right) \mathrm{d}x$$

> Int(f,x)=value(a1)+C1;

$$\int \frac{1}{(8-x)\,(6-x)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln(-8+x) - \frac{1}{2}\ln(-6+x) + C1$$

> Int(k,t)=int(k,t)+C2;;# Resolvendo a integral da direita.

$$\int k\,\mathrm{d}t = k\,t + C2$$

> (value(a1)-int(k,t)+C)=0;#Logo encontramos a solução do nosso modelo, onde C=C1+C2.

$$\frac{1}{2}\ln(-8+x) - \frac{1}{2}\ln(-6+x) - k\,t + C = 0$$

> solve((6/8)-C,C); #Substituindo x = 0, t = 0, nesta equação, obtemos C. Logo

$$\frac{3}{4}$$

> ((6-x)/(8-x))=(3/4)*exp(-2*k*t);

$$\frac{6-x}{8-x} = \frac{3}{4}\,\mathrm{e}^{-2\,k\,t}$$

> ((4)/(6))=(3/4)*exp(-20*k); #Substituindo x = 2, t = 10, teremos

$$\frac{2}{3} = \frac{3}{4}\,\mathrm{e}^{-20\,k}$$

> ((8)/(9))=exp(-20*k);

$$\frac{8}{9} = \mathrm{e}^{-20\,k}$$

> ((6-v)/(8-v))=(3/4)*exp(-30*k); #Substituindo x = v, t = 15, teremos

$$\frac{6-v}{8-v} = \frac{3}{4}\,\mathrm{e}^{-30\,k}$$

> ((6-v)/(8-v))=(3/4)*exp(-30*((ln(8/9.))/(-20)));

$$\frac{6-v}{8-v} = 0.628539361$$

> solve(((6-v)/(8-v))=(3/4)*exp(-30*((ln(8/9.))/(-20))),v);

$$2.61584945$$

Portanto, a quantidade do composto C que estará presente após 15 minutos é aproximadamente 2,615849459, gramas.

Acreditamos que essa atividade, assim como muitas outras relacionadas à modelagem dos sistemas naturais, desenvolvida através de conceitos básicos de Cálculo pode ser realizada via simulações com o Maple, objetivando uma maior compreensão dos objetivos propostos nas disciplinas de cálculo e o estimulo do próprio aprendizado e manipulação dos conceitos e ferramentas matemáticas. Torna-se necessário, então, criarmos situações ou ambientes de aprendizagem para que sejam estabelecidas conexões entre a modelagem de situações reais e sua representatividade em termos de comportamento e variação ao longo da linha do tempo e do espaço.

A atividade proposta nesta seção mostra uma compreensão e um maior entendimento dos aspectos comportamentais de conceitos e situações indicadas, do ponto de vista teórico, e situações reais analogamente idealizadas, conforme os indicativos propostos nas etapas de execução, do programa Maple.

Resultados da Pesquisa (Parciais ou Finais)

Muitos descritores de fenômenos naturais podem ser realizados com a ajuda de recursos informatizados atualmente. Eles representam, portanto, uma importante ferramenta para o estudo do comportamento destes fenômenos, bem como um entendimento maior, a partir da aplicação prática de determinados pressupostos teóricos e a viabilidade prática.

O trabalho desenvolvido em turmas de Cálculo II, no curso de Engenharia de Alimentos, com o auxilio do Maple, colaborou na elucidação dos aspectos envolvidos entre a correlação de variáveis existentes em um determinado fenômeno, além da variação existente (produzida ou estimulada por outras variáveis) entre as mesmas ao longo da linha do tempo ou do espaço.

Tal movimento (ou variação) é, na maioria das vezes, imperceptível, do ponto de vista prático e construtivo, para a maioria de nossos alunos de graduação. Estas características – a partir das experiências realizadas nesta pesquisa – mostram um sentido para o ensinamento e aprendizagem do cálculo, do ponto de vista prático.

Referencia

BASSANEZZI. Rodney Carlos. Modelagem Matemática: Uma Disciplina Emergente nos Programas de Formação de Professores. Biomatemática, Campinas, v. 9, p. 9 – 22. 1999. Disponível em: < http://www.ime.unicamp.br/~biomat/bio9art_1.pdf >Acesso em 25 de novembro de 2012.

LEITHOLD, Louis. O Cálculo com Geometria Analítica. V 2. Harbra São Paulo, SP.

Site oficial de representação do software Maple. Disponível em: . Acesso em: 01 dez. 2012.