Terciario

APUNTES A LA HISTORIA DE LA MATEMÁTICA DEL SIGLO XX: LA TEORÍA DE LAS CATÁSTROFES

Nápoles Valdes, Juan Eduardo — UTN- FRRE
De Lucca, Adriana — ISPRG – Tierra del Fuego- Argentina
e-mail: jnapoles@frre.utn.edu.ar
adridel2003@yahoo.com.ar

Nivel: Medio y Terciario
Palabras Clave: Teoría de las Catástrofes, René Thom, Matemática Siglo XX

RESUMEN

Las teorías matemáticas desarrolladas durante la segunda mitad del siglo XX requieren ser divulgadas tanto por la importancia de sus aplicaciones como por la necesidad de apoyarse en ellas para la comprensión, elaboración y construcción de nuevas teorías.
Así mismo, ofrecen una visión desde la complejidad de los procesos que estudian las otras ciencias. En particular, la *teoría de las catástrofes,* difundida a partir de 1970 permite explicar episodios de discontinuidad que ocurren en sistemas dinámicos de comportamiento continuo y que pueden observarse con cierta frecuencia en los fenómenos naturales que estudia la biología.
Este trabajo describe, de modo sencillo, las principales características de la teoría que desarrollaron Thom y Zeeman, las relaciones que la teoría guarda con otras teorías de la época, la incidencia en la enseñanza de la misma en la educación superior y las dificultades didácticas que presenta.

Introducción

A mediados de los años 60, comienza a hablarse del libro de René Thom **"Stabilité Structulle et Morphogénèse",** que apareció en forma acabada en 1972 y que rápidamente despertó la atención e interés de todos por una teoría conocida ahora como **Teoría de las Catástrofes**.
Thom proponía utilizar la teoría topológica de los sistemas dinámicos, para la modelación de diversos fenómenos de crecimiento y desarrollo en diversas ramas, principalmente la biología.
Él señaló que, bajo algunas condiciones exigidas, se deduce que el estudio de diversos sistemas se puede describir, localmente, mediante algunas formas estándar llamadas, catástrofes elementales.
Por aquellos tiempos se le acusó de hacer marketing con la denominación de catástrofe, René Thom se defendió -"Me gustaría decir que si he reemplazado la palabra discontinuidad por la de catástrofe es porque quería sugerir la idea de un mecanismo subyacente. Una discontinuidad no sugiere necesariamente la idea de dinamismo"-.
Algunos consideran que la Teoría de las Catástrofes, es una parte de la Teoría de las Singularidades, mientras otros afirman lo contrario. En los siguientes párrafos se detallarán las características de ésta teoría y algunas de sus aplicaciones y vinculaciones con la Educación Matemática.

Características de la Teoría

En el sentido de Thom(1972), la palabra "catástrofe" *expresa un proceso cuya evolución sufre discontinuidades en una o varias zonas*.

La Teoría de las Catástrofes podría definirse intuitivamente como “el lado opuesto” a lo que en Termodinámica se llama “proceso reversible”.
Un proceso reversible puede determinarse unívocamente en función de una serie de valores de control o variables independientes. Un ejemplo muy simple de un proceso unívoco es la longitud de una varilla metálica en función de la temperatura. A cada valor T de ésta corresponde otro L de la longitud, de forma que $L = f(T)$. El proceso está definido en cualquier sentido, con temperaturas ascendentes y descendentes, y no depende, por ejemplo, de la velocidad con que varía la temperatura. A cada valor de ésta corresponde unívocamente uno de la longitud.
También, se puede pensar que un determinado proceso depende de dos variables de control (x,y), en función de las cuales presenta unos estados caracterizables definidos por unos valores, que representaremos en el eje vertical (z). En general, variaciones de (x,y) conducirán a valores unívocamente definidos, representables mediante la superficie de ecuación z = f(x,y).
Sin embargo en la práctica, véase la Figura 1, hay procesos de este tipo cuya superficie característica manifiesta una divergencia, como vemos en la figura. Para dos valores muy próximos (x,y), (x,y+dy), puede ocurrir que las sucesivas variaciones de x conduzcan a dos regiones distintas de la superficie separadas por un “pliegue”, como ocurre con los puntos P y Q. Obsérvese que P y Q están situado en zonas distintas de la superficie, y no es posible el paso de una a la otra más que mediante un salto o discontinuidad
Un ejemplo típico puede verse en el cambio en la forma de un puente, mientras se va acumulando peso sobre el mismo. En ese caso, el puente comienza a deformarse de manera relativamente uniforme hasta que, una vez superado cierto peso crítico, el puente se viene abajo. Eso es una catástrofe: un cambio cualitativo en la estructura de un atractor o punto fijo (en este ejemplo, irreversible), mientras varía continua y suavemente un parámetro de control.
Se puede afirmar que, la Teoría de las Catástrofes, permite representar cambios drásticos. En procesos reales, estos cambios, pueden ser generados por crisis cambiarias, explosiones inflacionarias, desviaciones de genotipo, actitudes inesperadas, etc., implicando un poder de representación de problemas de muy distintas disciplinas.

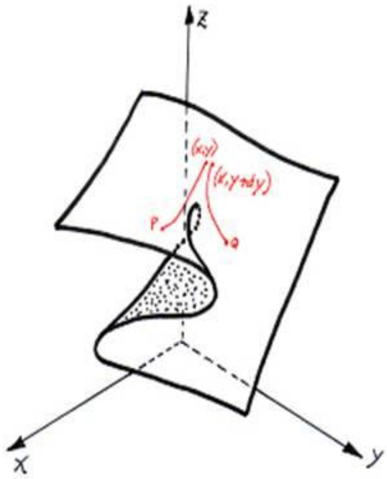


Figura 1

En su obra antes mencionada **“Structural Stability and Morphogenesis”**, Thom destacó que este instrumental analítico no es estrictamente una teoría, sino más bien un método que permite explorar los procesos dinámicos subyacentes a ciertos fenómenos reales. El enfoque es cualitativo, pero hace uso de instrumental matemático, como la teoría de las singularidades, las singularidades de formas diferenciales, la teoría de aplicaciones diferenciables y las nociones de bifurcación y de atractores.
Al analizar más de cerca el proceso que se describe mediante la superficie en la Figura 2: partiendo de un punto A definido por las coordenadas $z_A = f(x_A,y_A)$, se hace variar (x,y) según la línea roja (Figura 2). Al llegar al punto B, ya no es posible seguir manteniéndose en la superficie, y el valor de z sufre un brusco cambio, mediante el cual, sin variar (x_B,y_B) se pasa bruscamente del valor z_B al z_C. Ha habido lo que técnicamente se denomina una “bifurcación del equilibrio”. Este proceso discontinuo se da en multitud de fenómenos; en todos los casos el paso de z_B a z_C es brusco, y acontece espontáneamente, de forma imprevisible y sin que, en principio, varíen los valores, pues $(x_B,y_B) = (x_C,y_C)$.

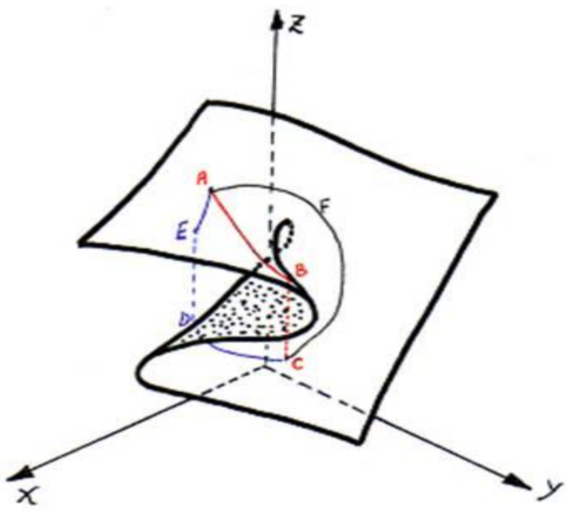


Figura 2

Analizando la superficie podría observarse que, en teoría, podría volverse al punto inicial (x_A,y_A,z_A) recorriendo la línea azul CD. Al llegar al punto D del pliegue, otro brusco cambio nos conduciría al punto E, mediante el cual podría alcanzarse el A, esta vez de manera continua según el camino EA. Se dice, en este caso, que el proceso ha recorrido un camino de *histéresis*.
Incluso, en lugar de los dos caminos indicados, podríamos haber recorrido la línea negra, pasando por el punto F, y recorriendo la línea AFC (o la CFA), esta vez de manera continua. Se habría dado en este caso un tránsito continuo entre dos puntos de equilibrio. El paso de determinados estados de hielo-líquido o de líquido-vapor puede alcanzarse en un cuerpo mediante procesos de ese tipo, como se estudia en Termodinámica.

Relación con otras teorías de la época

De acuerdo con Thom el término Teoría de las Catástrofes, es debido a su discípulo E.C. Zeeman (en 1971). Es posible visualizarla como la Teoría de la Bifurcación desde un punto de vista topológico; o sea, definirla como el estudio, desde un enfoque cualitativo, de las formas en que las soluciones de las ecuaciones diferenciales pueden variar.
En el momento de su aparición, medios de prensa como Newsweek reportaron una revolución en las matemáticas, comparable quizás, al descubrimiento del Cálculo Diferencial e Integral. Ellos afirmaron que la nueva ciencia, la Teoría de las Catástrofes, era mucho más importante que el Análisis Matemático: mientras este sólo considera procesos suaves, continuos, la otra provee un método universal para el estudio de todas las transiciones de salto, discontinuidades y cambios cualitativos súbitos.
El punto "filosófico" es que el conjunto de los puntos catástrofes K son los que contienen el comportamiento significativo del proceso, es decir, donde se trabaja es en el lugar geométrico de los puntos de equilibrio del sistema. Es el esqueleto, del cual el resto de la morfología depende.

Consideremos un sistema dinámico gradiente: $\frac{dx}{dt} = grad_x F_{(x,a)}$ (1)

Donde *x* y *a* son vectores de números reales (posiblemente, unidimensionales) y *F* es infinitamente diferenciable, o suave.
Llamemos a "*x*" variable de estado y "*a*" a la variable de control.
Busquemos los puntos de equilibrio, así tenemos: $grad_x F_{(x,a)} = 0$ (2)
El problema matemático es cómo varían las soluciones "*x*" de (2) con "*a*", para *F* general. Si al resolver esto desde un punto de vista topológico, diferentes funciones *F* tienen el mismo comportamiento (local), se dicen que son equivalentes.
Una clase de equivalencia de tales funciones *F* es llamada una ***catástrofe elemental***.
Para una familia de funciones $f : \Re^n \times \Re^k \to \Re$; es decir, con n variables de estado, y con k parámetros, denominados de control, si n≤2 y k≤5, Thom estableció la existencia de formas

canónicas, a las que hacíamos referencia antes. A ellas son reducibles las funciones en estudio, si cumplen con la restricción antes citada y otra que se comentará más abajo.
En las catástrofes elementales, que listamos a continuación, las componentes x_1, x_2, ... de x han sido reemplazadas por x, y, a_1, a_2, ...por *a, b,* ....

Nombre	***F(x,a)***	
Pliegue	$x^3/3 + ax$	A_2
Cúspide	$\pm x^4/4 + ax^2/2 + bx$	A
Cola de milano	$x^5/5 + ax^3/3 + bx^2/2 + cx$	A_4
Mariposa	$\pm x^6/6 + ax^4/4 + bx^3/3 + cx^2/2 + dx$	$A_{\pm 5}$
	$x^7 + ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$	A_6
Ombligo Elíptico	$x^2y - y^3 + ay^2 + bx + cy$	D_{-4}
Ombligo Hiperbólico	$x^2y + y^3 + ay^2 + bx + cy$	D_4
Ombligo Parabólico	$x^2y + y^4 + ax^2 + by^2 + cx + dy$	D_5
	$x^2y + y^5 + ay^3 + by^2 + cx^2 + dx + ey$	D_6

$x^2y - y^5 + ay^3 + by^2 + cx^2 + dx + ey$	D_{-6}
$x^3 \pm y^4 + axy^2 + by^2 + cxy + dx + ey$	$\Sigma_{\pm 5}$

Estos nombres son escogidos por una gran variedad de razones y deben ser tratados meramente como mnemotécnicos, las siglas de la última columna son las denominaciones de cada una de las catástrofes elementales.
Poseen una propiedad de estabilidad muy fuerte: la estabilidad estructural. Esta es una propiedad muy deseada y Thom (junto a nombres como Lefschetz y Arnold) la considera un requerimiento esencial.
La estabilidad estructural debe considerarse en un “contexto determinado”. El contexto comprende: a) una clase de sistemas matemáticos C, b) una clase de perturbaciones P, c) una relación de equivalencia R. En este contexto, un sistema es estructuralmente estable si demostramos que toda perturbación en P, lleva a un sistema en C que es equivalente, con respecto a R, al original.
Un péndulo simple, por ejemplo, considerado como un oscilador no forzado, es un sistema estructuralmente inestable (en el modelo usual) si la clase de perturbaciones incluye la posibilidad de términos de amortiguamiento.
Restringiendo las perturbaciones al caso no disipativo solamente, es posible restaurar la estabilidad estructural.
Si consideramos la existencia de simetría, debemos restringir las clases P y C consecuentemente y así debe procederse en lo sucesivo.
La descripción matemática del mundo depende, sobretodo, de una delicada interrelación entre la continuidad y discontinuidad: `fenómenos discretos', singularidades, bifurcación y catástrofe, son términos diferentes para la descripción del surgimiento de estructuras discretas a partir de otras suaves, continuas.
La teoría de las singularidades es una generalización del estudio de funciones en sus puntos máximo y mínimo. El término bifurcación, como se entiende ahora, significa rompimiento y es usado en un sentido amplio para designar toda suerte de reorganización cualitativa o metamorfosis de varias entidades que resultan de un cambio de los parámetros de los cuales ellas dependen. Catástrofes, son cambios bruscos que surgen como una respuesta súbita del sistema a un cambio suave en las condiciones externas.

Incidencia en la Matemática Superior

Es sabido que el estudio de las funciones (reales, de ahora en adelante), está sujeta a distintas dificultades didácticas. Algunas de ellas son:

- La determinación de los extremos de una función y el esbozo de su gráfico.
- La propia construcción del gráfico de las mismas, pues en la mayoría de los casos, trabajamos con el gráfico de la función propiamente dicha, y no con algunas variantes interesantes, como pueden ser: la derivada contra la función, la derivada contra la variable independiente, etc.

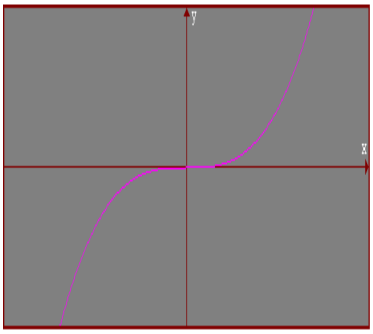
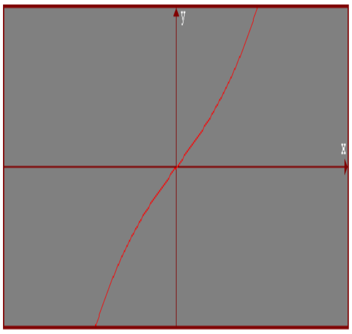
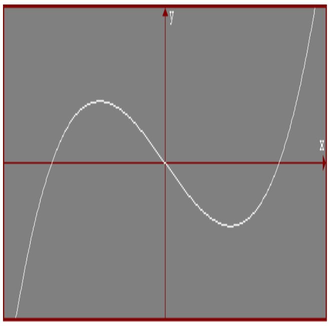
- La determinación de los puntos de acumulación, y las funciones definidas por series infinitas.

En el primer caso, abordamos dominios "plenos" casi siempre, cuando pudiéramos generar discusiones interesantes con nuestros estudiantes, si restringimos el dominio a determinados subconjuntos de **R.**
En el segundo caso, casi siempre el uso docente de las funciones continuas, o con series convergentes en dominios más o menos "cómodos", trae aparejado una convicción, en el estudiantes, sobre las "bondades" de las funciones, sin tener prácticamente en mente, la utilización de funciones discontinuas, o continuas no derivables, restringir series divergentes, para definir funciones apropiadas en algunos casos, etc.
A pesar de la existencia de técnicas constructivas en varias ramas de la Matemática, utilizaremos el concepto de función por considerarlo de capital importancia dentro de la misma.
El concepto de función, tal y como se utiliza actualmente en Matemática, se desarrolló progresivamente. A medida que las necesidades prácticas se hacían sentir, se agregaban las definiciones necesarias. Y es a causa de eso que se llegó a una proliferación de nociones vagas e inexactas.
No haremos un esbozo histórico de este concepto, pues existen varios trabajos dedicados al mismo, sólo retomaremos algunos datos para ilustrar nuestra exposición.
Si para Jean Bernoulli (1718), función de una variable es "una cantidad compuesta de una cierta manera de esta cantidad y de constantes" para Euler (1748), "es la expresión analítica cualquiera de las cantidades variables y de números o cantidades constantes". De aquí que la continuidad de la función es prácticamente asumida, pues una curva que estaba representada por una ecuación algebraica o trascendente se llamaba una curva continua.
Y ¿no es así como, prácticamente, nuestros alumnos asumen la noción de función? Mejor aún, ¿cuántos alumnos consideran funciones definidas por más de una rama, discontinuas o definidas por una serie infinita, digamos, su desarrollo en Serie de Fourier?
Estos aspectos muestran que es necesario hacer más énfasis en la construcción de funciones en la Educación Matemática. De hecho, no sólo este es un problema, resumiendo podemos presentar otros:

- obtener, dado el gráfico (ya sea, el de la función y la variable independiente, de la función y su derivada, o de esta última con la variable independiente), la representación algebraica de la función,
- construir los gráficos de las funciones y sus derivadas.

Por otra parte, el uso de los ordenadores como herramientas educacionales, hace muy difícil separar el concepto de función con valores reales de la idea intuitiva de función continua. Esto es quizás sugerido por el hecho que la mayoría de los "paquetes" usados presentan el concepto de función como sinónimo de una relación entre dos variables, relación expresada por una fórmula.
Por todo esto, nos parece meritorio la obtención del concepto de función desde un punto de vista histórico en el orden de dejar bien claro las relaciones entre el concepto de función y la continuidad de funciones. Este concepto de función y su devenir histórico permite, además, apuntalar la evidencia que una demanda de saber que se evalúa, puede cambiar a lo largo del tiempo conforme las viejas teorías son sustituidas por las nuevas. En realidad, está aceptado comúnmente dentro de la filosofía de la ciencia que incluso lo que se toma por conocimiento factual, depende de las teorías en uso (Popper, Kuhn, Lakatos, etc.). Por tanto, lo que puede ser llamado conocimiento en un tiempo, puede, a la luz de nuevas teorías posteriores, ser considerada creencia. Inversamente, una creencia sostenida alguna vez, con el tiempo, puede ser aceptada como conocimiento a la luz de nuevas teorías que la apoyen.
Quisiéramos presentar, ahora, algunas observaciones respecto a la determinación de los extremos de una función.

En nuestro trabajo docente, utilizamos el conocido algoritmo de determinar los puntos críticos de la primera derivada y después, mediante el signo de la misma en un entorno de dichos puntos, o evaluando directamente, decidir sobre la naturaleza de los mismos, y en ocasiones, cuando
$f'(a) = f''(a) = 0$, desechamos dichos puntos, por considerarlos sin ninguna importancia docente.
Sin embargo, esos puntos críticos degenerados, son los puntos de catástrofe de la aplicación.
La Teoría de las Catástrofes puede aplicarse a la modelación de fenómenos reales de diversas causas: cualitativas o cuantitativamente; desde un punto de vista conceptual, predominantemente descriptivo, a partir de las características de las superficies de equilibrio de las funciones de catástrofes, hasta un empleo rigurosamente matemático, cuando se conocen las funciones que gobiernan el fenómeno físico en estudio y éstas cumplen con las restricciones propias de la Teoría de las Catástrofes. Como modelos descriptivos permite agrupar en una sola geometría diversas características de un fenómeno que, de otro modo, permanecerían aislados o, incluso, pasarían inadvertidos.
Que mejor ejemplo para ilustrar lo anterior, que el de la función $f(x) = x^3 + cx$, $c \in \mathbf{R}$. A pequeños cambios en el parámetro c (considérese c>0, c=0 y c<0), se obtienen gráficos totalmente distintos de la función donde no existen extremos, existe uno y existen tres, respectivamente (ver las figuras sig.). Es decir, estamos en presencia de la catástrofe elemental tipo cúspide. Puesto que la función puede modificarse significativamente si se cambia c, por pequeños que sean estos cambios y el fenómeno físico que representa sufrirá alteraciones de importancia, pues cambia cualitativamente, es de interés estudiar el comportamiento de los puntos críticos de la función.

Por otra parte, este ordenamiento permite establecer programas experimentales con lo que es factible lograr una mejor presentación y comprensión de los resultados y, por tanto del fenómeno mismo. Además como método descriptivo permite introducir una nomenclatura y conceptos importantes, como el de estabilidad estructural, que facilita la comprensión de aquellos fenómenos complejos en los que la función que los gobierna se desconoce o es muy complicada. Se supone implícitamente la existencia de una relación funcional a la que puede aplicarse la Teoría de las Catástrofes. La justificación de esta hipótesis sólo se obtiene cuando los datos experimentales se ajustan a una geometría de catástrofes, cuestión esta que justifica su popularidad y uso entre los investigadores que a la vez se auxilian de sus computadoras y observan las trayectorias en el espacio de fases.
Por último, debemos señalar que los conceptos fundamentales de la Teoría de las Catástrofes son propios del lenguaje del Análisis Matemático, sus métodos, procedimientos y enfoques tanto geométricos como topológicos, son también análogos, es decir, esta nueva teoría ha surgido por continuidad para enfrentar y resolver nuevos y viejos problemas. Recordemos

que en los textos tradicionales no se analiza el caso de los puntos degenerados (excepto el criterio de la n-ésima derivada) y que sólo es abordada por la Teoría de las Catástrofes.
Por todas las razones analizadas consideramos que es posible, en los cursos de Análisis Matemático, abordar algunos conceptos, procedimientos, métodos y ejemplos de la Teoría de las Catástrofes así, en nuestro trabajo presentamos una propuesta didáctica que permite perfeccionar la modelación de procesos cuyo comportamiento no es continuo, señalando consideraciones didácticas que enfaticen este aspecto importante y esencial en la disciplina.
Aprovechar este resultado, significa que debemos vincularlo con otros conceptos como el de continuidad, y dicho análisis no debe resultar difícil, pues queda claro que para pequeñas variaciones del parámetro c en un entorno del punto O(0,0), la cuestión resulta muy interesante como ya analizamos. Luego, debemos relacionar dichos resultados con problemas de las ciencias. Reafirmando, entre otras, la noción de límite que un estudiante nunca debe perder.
Una de las relaciones que podemos establecer, es referida a la utilidad que tiene el análisis anterior y su vínculo con otros contenidos, y que en esencia, es el mismo caso de resolver la ecuación diferencial $f'(x) = 3x^2 + f(0)$, $f(0) = 0$, su solución es, por supuesto, $f(x) = x^3$, pero si consideramos que la condición inicial debemos hallarla como resultado de un experimento, es muy probable que el resultado que obtengamos sea no nulo y las justificaciones son abundantes.
Si aceptamos tan pequeño error, o un error tan pequeño como se quiera, podemos aceptar un valor positivo o negativo y el resultado como ya sabemos es cualitativamente distinto, el resultado de la ley que modela dicho problema es un caso muy diferente en esta disyunción y si no supiéramos a ciencia cierta cuál es el verdadero valor de la condición inicial, entonces estamos frente a un rompecabezas; por qué, cuál es la ley que modela dicho fenómeno, ya que se trata de tres curvas diferentes, ver las figura anteriores; en fin, puede plantearse el ejercicio de varias formas que resultan el mismo problema. En este caso, se nota la importancia de las condiciones iniciales en un problema, aún cuando para valores muy cercanos de las condiciones iniciales las soluciones no resultan aproximadas, y surgen buenas preguntas: en qué condiciones suceden dichos comportamientos, para qué tipos de fenómenos, para qué valor del parámetro c el resultado es divergente o cuál es el conjunto de valores donde las soluciones son diferentes (se bifurcan).
Continuando con nuestro ejemplo, para el caso $f'(x) = 3x^2 + f(0)$, resulta la solución general $f(x,c) = x^3 + cx$; pero para qué valores de x y c los resultados son cualitativamente análogos; en este caso, el estudiante puede llegar a describir las relaciones geométricas de la original y la perturbada en función de sus puntos críticos.
El ejemplo anterior resulta muy fácil de resolver pues no se necesitan métodos especiales, con conocimientos mínimos de diferenciación e integración se resuelve; pero la condición inicial impuesta convierte el ejercicio en un problema cuya solución no se encuentra al alcance de los conocimientos y habilidades que el Análisis Matemático ha brindado hasta el momento; pero es un buen inicio para relacionarse con la Teoría del Caos surgida en los últimos 30 años de nuestro siglo y que en la década de los años 90 ha planteado nuevos retos.
Deben concebirse actividades que conduzcan al estudiante a hacer descubrimientos personales. Esas actividades deben estar profundamente enraizadas en la realidad de modo que les permita explorar y examinar el mundo que les rodea. Hay que incitar a los estudiantes a copiar datos y a concebir problemas por su propia cuenta y fundamentalmente actividades relacionadas con la realidad circundante (recordemos a Aristóteles).
Por último, presentamos el siguiente procedimiento para determinar el tipo de función de catástrofe.

1) Se establece la función que gobierna el fenómeno a estudiar, se define la variable o variables de estado y el parámetro o parámetros de control, es decir, $f = f(x_i,c_j)$; $i = 1,2$; $j = 1,...,5$.

2) Se determinan los puntos críticos de la función $f(x_i,c_j)$ dados por las ecuaciones df/dx=0 ó $Df_{x_i} = 0, \; i = 1,2.$

3) Se determinan si existen los puntos críticos degenerados df/dx = 0, $df^2/dx^2 = 0$, ó $Df_{x_i} = 0, \; i = 1,2.$, det $H_f = 0$ y $d^2f = 0$.

4) Se analiza si es conveniente:

A) Escribir la ecuación de la superficie de equilibrio directamente grad $f(x_i,c_j) = 0$, a partir de la función que gobierna ó modela el proceso que estamos analizando.
B) Trabajar en la propia función que gobierna el fenómeno a estudiar de manera tal que $f(x_i,c_j) = 0$ y resolver dicha ecuación y comparar su solución con la geometría de cada función de catástrofe.
C) Se desarrolla la función que gobierna el fenómeno a estudiar en serie de Taylor, de forma tal que desechando los términos de orden superior, obtengamos las ecuaciones del tipo de una función de catástrofe.

5) Concluir el tipo de función de catástrofe que representa. Expresar por medio del plano de control el comportamiento de la función analizada o por el contrario, en caso que las derivadas o su determinante hessiano sean distintos a cero, se analiza la función como es conocido.

Esto no quiere decir que las únicas formas de analizar sean las variantes A, B y C, las cuales son las referidas en la literatura matemática.
Este "cuasi–algoritmo" posibilita estudiar e investigar, en particular, fenómenos de carácter estocástico, sin emplear técnicas estadísticas ni probalísticas, tan solo utilizando el lenguaje que se ha denominado Teoría de las Catástrofes. Por otra parte, él constituye un procedimiento de trabajo que le permite a los estudiantes concluir los casos en los cuales la función analizada se comporta de manera singular, debido a que se anulan sus derivadas de primer orden, el determinante de la matriz hessiana, así como la diferencial de segundo orden, por lo que pudiera parecer que en todos estos casos no puede decidirse; pero sabemos que es posible utilizar este procedimiento.
Consideramos que la ingeniería didáctica descrita, no conduce al fenómeno de egresar un profesor con mucho contenido de nivel superior y poca visión de la las necesidades de la escuela, sino que contribuye al desarrollo del pensamiento matemático ya que le provee de un método universal para el estudio de todas las transiciones de salto, discontinuidades y cambios cualitativos súbitos, cuestión esta que le permite interpretar de un modo más completo los fenómenos que estudie y por lo cual determina en la forma de analizar y enfrentar los nuevos retos, así como la aplicación de los conocimientos y habilidades que son propios del Cálculo Diferencial y sus aplicaciones.

A modo de conclusión

La Teoría de las Catástrofes forma parte de las Matemáticas y explica la discontinuidad de procesos, cuando el agua se congela o hierve, cambiando de estado, cuando un puente se derrumba, cuando una gota colma el vaso, o cuando un terremoto sacude la tierra, se produce lo que Thom denomina una catástrofe porque se interrumpen los procesos normales de las cosas.
En términos matemáticos "catástrofes" son formas geométricas abstractas que simbolizan los procesos evolutivos que generan discontinuidades en la realidad. El concepto matemático no significa tragedia, sino cambio brusco o discontinuidad.

Al igual que la teoría del caos, la teoría de las catástrofes, tiene como base de partida la idea de bifurcación o desdoblamiento del equilibrio en puntos críticos, así como el hecho de que las relaciones funcionales son del tipo no lineal. Fundamentalmente enfoca a la dinámica de las variables en estudio como una suerte de "evolución" cualitativa de un sistema a lo largo del tiempo.

El objetivo de representar discontinuidades observables en sistemas dinámicos es posiblemente uno de los que mejor se despliega, siendo un aporte importante al desarrollo de la dinámica y la topología diferenciales. Sin embargo, no pareció muy convincente su utilidad como instrumento de *predicción* de puntos de quiebre o ruptura razón por la que parece ser menos popular que la teoría del caos.

Esto no significa que no resulte un abordaje potente y enriquecedor para nuestros estudiantes que los sitúe en el paradigma de la complejidad y sus principios epistemológicos.

Bibliografía

- Albaiges i Olivart, J. M. (s/f). *La Teoría de las Catástrofes de René Thom***.** Disponible en: www.albaiges.com.es/catastrofes/teoriacatastrofe...

- Arnold, V. I. (1987). *Teoría de Catástrofes*. Madrid: Alianza.

- Montealegre, Mauro (2004). *Aspectos Algebraicos y geométricos de la Teoría de las Catástrofes*, Memorias del VIII Encuentro de Geometría. Colombia: Universidad Surcolombiana.

- Nápoles Valdes, J. E. (2007). *De las Cavernas a los fractales. Conferencias de Historia de la Matemática.* edUTecNe: U.T.N. Disponible en: http://www.edutecne.utn.edu.ar.

- Woodcock, A. y Davis, M. (1986). *Teoría de Catástrofe.* Madrid: Cátedra.