NO ES LO QUE PARECE. DE PERIMETROS, AREAS Y VOLUMENES

Wiliams Noel Uribe – Norma Di Franco
wiliams_uribe@hotmail.com – ndifranco@hotmail.com
Universidad Nacional de La Pampa – Argentina

Modalidad: Comunicación breve.
Nivel Educativo: Formación y actualización docente.
Tema IV.2 – Formación y actualización del profesorado.
Palabras clave: Formación de profesorado; relaciones entre perímetros y áreas; relaciones entre áreas y volúmenes

Resumen

Esta propuesta se desarrolla en el marco del Proyecto de Investigación: Prácticas Intensivas de Formación de Profesorado, de la Universidad Nacional de La Pampa. Con el fin de intentar aportar elementos de actualización para la comprensión de una complejidad ya presente en variada bibliografía como es la de las vinculaciones que se construyen entre perímetros y áreas y entre áreas y volúmenes. El análisis se concentra en la relación de conservación/modificación de perímetros y áreas ante determinadas transformaciones de figuras, y las respectivas relaciones entre áreas laterales y volúmenes en caso de transformaciones de cuerpos, en tareas que involucran procedimientos geométricos antes que numéricos, lo que implica tratamientos cualitativos antes que cuantitativos tanto del perímetro y el área de superficies planas, como del área y volumen de cuerpos. Nos interesa particularmente el análisis de la producción de estudiantes de diferentes niveles educativos (secundario, magisterio, universidad) cuando, luego de haber trabajado en estas relaciones con determinadas figuras poligonales y cuerpos, se propone un juego de transferencia de tales relaciones hacia otras configuraciones geométricas, bajo determinadas condiciones. Algunas hipótesis explicativas nos impulsan a pensar en la importancia de esta problemática en las prácticas de formación en el profesorado.

Introducción:

La propuesta que presentamos se desarrolla en el marco del Proyecto de Investigación “Prácticas Intensivas de Formación de Profesorado”, de la Universidad Nacional de La Pampa. Nos preocupa indagar e intentar aportar elementos de actualización para la comprensión de una complejidad en la enseñanza y el aprendizaje de la geometría como es la de las vinculaciones que se construyen entre perímetros y áreas de figuras planas y entre áreas laterales o totales y los volúmenes de los respectivos cuerpos.

En los colegios secundarios y en las escuelas con las que nos involucramos laboralmente desde la formación de profesorado, se trabaja fundamentalmente orientados por un tratamiento cuantitativo, desde el refuerzo de las fórmulas y los cálculos. Hemos detectado que, en muchos casos, la información de los resultados correctos en la resolución de situaciones problemáticas no garantiza la comprensión conceptual y, si se trata de respuestas incorrectas, el error enmascara si se trata de un problema de cálculos o de una confusión conceptual.

Sumado a ello, aunque se explicite que la modificación que sufre el área de una superficie cuando ésta se somete a una transformación no tiene que ser la misma que la que experimenta el perímetro (relaciones análogas con áreas y volúmenes), por ejemplo, algunas complejidades nos permiten hipotetizar que hay muchas dificultades para ‘ver’ el área como una propiedad de la superficie independiente del perímetro.

Por ello este trabajo focaliza en la relación de conservación/modificación de perímetros y áreas ante determinadas transformaciones de las figuras, y las respectivas relaciones entre áreas y volúmenes en caso de transformaciones de cuerpos, en tareas que involucran procedimientos geométricos antes que numéricos, que implicaron tratamientos más cualitativos que cuantitativos de longitudes, áreas y volúmenes.

Nos interesa particularmente el análisis de la producción de estudiantes de determinados niveles educativos. La tarea se concretó en cursos de secundario básico (estudiantes de 12-15 años), de secundario orientado (estudiantes de 15-17 años) y de profesorado en Educación Inicial y Profesorado en Educación Primaria, estos últimos de gran importancia ya que los saberes puestos en juego integran sus currícula y los de los niveles educativos para los cuales forman. Se recopilaron unos 250 protocolos en papel y filmaciones a partir de los cuales se realiza el análisis.

Metodológicamente el proyecto se desarrolló desde el diseño de diferentes modalidades de actividades –que describimos en adelante-, el trabajo en los cursos citados y el estudio y la reflexión sobre las producciones de los/as estudiantes.

La propuesta pone en prioridad un tratamiento:

. cualitativo, que permita reflexionar acerca, por ejemplo, del significado del área como extensión, como cantidad del plano ocupado por una superficie, o del perímetro como propiedad que caracterizan la longitud del borde de figuras planas.

. geométrico: de estimación, superposición, descomposición y recomposición estratégica, reconfiguración por complementariedad de formas, comparación. El objetivo no es cuantificar, aunque se lo haga para comparar o para determinar la medida de una magnitud, se busca comparar para establecer relaciones.

. que permita comparar una figura y su figura modificada, que distinga las equi-extensas o isoperimétricas de las figuras sobre las que se producen relaciones de desigualdad.
. que permita pensar en el área (perímetro / volumen) como magnitud autónoma – Corberán (1996), esto es, disociar el área de una superficie de su forma y del número que la mide.
. de estudio simultáneo de perímetros y áreas y de áreas y volúmenes, que permita compararlas/disociarlas para analizar las relaciones de conservación/no conservación, ante determinadas transformaciones de las figuras y los cuerpos.
Como sugiere la investigadora valenciana en referencia al área - una de las propiedades consideradas en este trabajo-, "trabajar la manifestación del área como producto de dos dimensiones lineales, la última, y siempre después de haber trabajado con profundidad, las otras manifestaciones del área: como cantidad de plano ocupado por la superficie, como magnitud autónoma y como número de unidades que recubren la superficie […] trabajar simultáneamente, el estudio del área y del perímetro de una misma superficie o varias. Así como también, del volumen." (Corberán, 1996: 9,10)

No es lo que parece

En primer lugar resulta destacable que en una mayoría que supera el 90% de los protocolos recopilados, las actividades están desarrolladas. Trabajar geométricamente con estas magnitudes es algo que todos se animan, que no paraliza y esto es muy bueno en nuestra consideración.
En segundo lugar es importante describir que metodológicamente, en todos los casos, comenzamos dialogando con los/as estudiantes a partir de ejemplos que explicitaran que no necesariamente al aumentar el perímetro de una figura aumenta el área, por ejemplo. Es decir quedaba señalado el supuesto consenso por el cual áreas y perímetros (volúmenes y áreas) son dos magnitudes que no necesariamente varían de la misma manera ante una transformación de una figura (un cuerpo).
Con respecto a la lectura de las producciones:
Caso A, figuras poligonales construidas con cuadritos unidad. Dada las nueve relaciones

P	A	P	A	P	A
>	>	>	=	>	<
=	>	=	=	=	<
<	>	<	=	<	<

, determinar si cada una de ellas es posible y, en tal caso, mostrar con una configuración de figura inicial y transformada, un ejemplo que verifique la relación.

Una primera observación acerca de las relaciones de conservación nos permite señalar que encontramos resuelto con alto porcentajes cuando se trata de a mayor P, mayor A y, un sorprendente porcentaje no puede o resuelve erróneamente cuando se trataba de a menor P, menor A. No hay señales de que se hubiera podido advertir que resolver el primero ya daba el dibujo respuesta del último.

Otra observación podemos establecer a partir de casillas como igual P, mayor A e igual P, menor A. Ratificando lo complejo de la construcción de relaciones y el análisis de regularidades, un dato para el análisis lo aportan los protocolos que registran la resolución de una sola de cada par de casillas de relaciones simétricas. En una se define la relación y en su par, no se ha logrado construir la relación ni se han podido advertir ayudas identificando la relación simétrica.

Nos ayuda a reflexionar acerca de la importancia del tipo de trabajo en la escuela, en particular, el estudio de las propiedades y relaciones entre las figuras y los cuerpos.

En el **caso B**, a partir de un hexágono y dada la relación, dibujar una figura que la muestre. Nuevamente, aumentar el área y aumentar el perímetro fue resuelto por mayor cantidad de estudiantes que el caso de "disminuir" tanto el área como el perímetro. Aunque en un 32% de los protocolos hay señales que se pudo advertir que resolver el primero ya daba el dibujo respuesta para la segunda relación, ya que utilizaron los mismos dibujos, no hay señales que se haya podido establecer la simetría del resto de las relaciones.

Al momento de completar el casillero donde se pedía mantener invariante tanto el perímetro como el área, la totalidad de los protocolos consideraron a la identidad o la isometría como una transformación.

Al igual que en el Caso A, se registra la resolución de una sola de cada par de casillas de relaciones simétricas, y tal como expresa D´Amore (2007) en su trabajo de investigación acerca de las convicciones de maestros y estudiantes en el trabajo con vinculaciones entre áreas y perímetros, la mayor dificultad se concentró en encontrar figuras donde el perímetro disminuya y el área aumente o se conserve. En la mayoría de los casos se dejó explícito que “no se podía” encontrar un ejemplo para tales relaciones.

Caso C: Hexágono rompecabezas. Dada la relación, armar el rompecabezas que muestre esa relación. Los/as estudiantes expresaron correctamente las relaciones vinculadas al área usando como referencia la cantidad de fichas utilizadas: si se usaban la misma cantidad de fichas se iba a mantener el área, si se usaban menos fichas se disminuía el área y en el caso de pedir mayor área, se necesitaban algunas fichas por duplicado.

Para la relación menor perímetro e igual área, en un 72% de los casos se explicitó que ambos hexágonos tenían la misma área y por ende el mismo perímetro. Sólo el 28% restante logró establecer que era menor perímetro utilizando alguna técnica para comparar el perímetro. Al momento de pedir la relación igual perímetro e igual área el 91% no se explicitó ninguna respuesta.

Las relaciones que porcentualmente presentaron mayor dificultad fueron: igual perímetro y mayor área, por un lado, y menor perímetro y mayor área por el otro, para las cuales sólo un 8% de los estudiantes dieron una respuesta correcta para ambos casos.

Ante la relación menor perímetro y menor área, se pudieron exhibir figuras de menor área pero el perímetro vuelve a estar presente obstaculizando en construcciones por las cuales si dos figuras tienen la misma cantidad de lados tienen el mismo perímetro.

Caso D: Círculos. Dada las figuras, escribir la relación. Se propone un juego de transferencia de relaciones ya analizadas hacia otras configuraciones geométricas que no son usuales en las aulas como son los círculos. No son habituales, no es usual la comparación entre perímetros o áreas de estas formas sin apelar a una fórmula. Nuevamente las planillas recopiladas están todas resueltas en casi todas sus casillas, sólo excepcionalmente alguna celda de un cuadro quedó sin completar. Los estudiantes pueden hacerse cargo de la situación, se animan, confían en que pueden resolver esto.

Los casos más naturalizados, menor P y menor A o mayor P y mayor A, resueltos correctamente en altos porcentajes.

Los casos simétricos no se advierten, a tal punto que en casillas diferentes, con figuras distintas que representan relaciones simétricas, escriben para ambos la misma relación.

Otras dos casillas de este cuadro para establecer una misma relación: igual perímetro, menor área. Una casilla con menos respuestas correctas que otra. Un alertante 45% de los protocolos erróneos por el perímetro. No entra en contradicción por lo sondeado, la misma relación para dos casillas con supuestas análogas formas de dibujo. Expresábamos que aún cuando se pudo “ver” que la figura transformada tiene el mismo perímetro que la inicial en la casilla ocho, eso no hizo entrar en contradicción con la lectura de la casilla seis, que incluye casi la misma forma del dibujo, y donde no se la indicó como aquella en que la figura inicial es de igual perímetro que la transformada.

Caso E: cubitos unidad para armar cuerpos y analizar sus áreas y sus volúmenes.

Se observan mayoritarias buenas respuestas aún en los casos de relaciones que no se conservan en el mismo sentido y que habían operado como dificultad en casos analizados anteriormente.

Reflexionamos acerca de la incidencia de las reflexiones previas al tratamiento con los cubitos, a partir del denominado por nosotros problema de Galileo, citado en Fandiño Pinilla (2012), por el cual "se entiende la razón de un hecho que no sin maravilla viene advertido por el pueblo; y es, cómo puede ser que el mismo pedazo de tela más largo de un lado que del otro, si se hiciera un saco para contener el trigo, como se acostumbra hacer con un mantel, tendrá mucho más trigo si se hace que la altura del saco sea de la menor medida de la tela que haciéndola al contrario" (2012: 30).

En todo caso, los cubitos unidad significaron un buen recurso y quizás el problema de Galileo aportó estrategias de aumento o disminución del área. El recurso para disminuir el área de ir 'tapando' caras de cubitos unidad y tratar de formar un cubo a modo de la bolsa menos alta, fue utilizado en casi todos los grupos. O, al revés, para ir aumentando el área la estrategia de armar la fila de cubitos más larga. Con el volumen, la referencia de conservación o no del volumen quedó bien vinculada a la conservación o no de la cantidad de piezas tomadas como unidad y permitió resolver sin dificultades.

A modo de cierre

La experiencia desarrollada nos ha permitido elaborar algunas explicaciones provisionales. En primer lugar el trabajo geométrico con los perímetros, áreas y volúmenes resulta un excelente recurso y un escenario al cual todos se animan, habilita la producción de los estudiantes. Esto es muy propicio en términos de enseñanza.

No se hallaron diferencias sustanciales entre las resoluciones realizadas por los estudiantes secundarios y los de nivel terciario –que no desconocíamos que aún no habían trabajado en estas temáticas-. Esto refuerza la idea de la construcción por la cual, si un estudiante no ha tenido oportunidades educativas de involucrarse con determinadas temáticas, poner en discusión y en contradicción sus ideas, interrumpir elaboraciones de sentido común, no importa cuánto tiempo permanezca en el sistema educativo, las modificaciones no se producen por que pase el tiempo, hay que provocar oportunidades educativas de que sucedan

Uno de los interrogantes que teníamos estaba vinculado a la forma de las figuras seleccionadas y su incidencia en las resoluciones. Las dificultades que registramos en el caso de figuras circulares son las mismas o comparables a los casos que no se trataba de círculos, con lo cual, desde esta experiencia, las complejidades y las posibilidades son independientes de la forma de la figura.

Ahora bien, sí advertimos y sigue fortaleciéndose -a medida que analizamos-, que no resulta la misma complejidad dar las figuras dibujadas y solicitar escribir la relación que dar la relación (mayor perímetro, menor área, por ejemplo) y pedir que se analice si existe la posibilidad y, en tal caso, que se diseñe una figura que muestre la relación. Esta consideración resulta de importantes connotaciones a la hora de pensar didácticamente en el aprendizaje.

Por otra parte, la asociación por la cual para mayor área mayor cantidad de fichas del rompecabezas y viceversa, contribuyó a la resolución sin dificultades de las relaciones de área en las figuras planas así como la asociación cantidad de cubitos unidad con la medida del volumen. Si agregamos la estrategia de dejar 'tapadas' caras de los cubitos para disminuir el área de los cuerpos armados –y esto también es una construcción-, las relaciones entre áreas y volúmenes, de lo aquí propuesto pudo resolverse sin dificultad.

Los errores más frecuentes están vinculados al perímetro. Dos confusiones opuestas fueron recurrentes: en un caso, el perímetro fue la suma de unos lados contabilizados como la cantidad de segmentos que formaban las fichas del rompecabezas -aunque técnicamente formaran el mismo lado-; y en el otro, se contaban los lados para comparar los perímetros sin comparar geométricamente –por superposición de fichas, por reconocimiento del lado de la misma ficha, etc.- la longitud de esos lados (esto es, dos hexágonos son de igual perímetro por ser tener seis lados, sin considerar ni cualitativamente la longitud de esos lados)

Otro elemento de análisis nos lleva a considerar que la identidad es muy difícil de pensarse. Quizás la identidad es un recurso matemático que completa un caso pero en el marco de pensar relaciones, una figura trivial como es la idéntica para considerar la relación de igual perímetro e igual área para la figura transformada no surge tan frecuentemente como alternativa.

Qué decir de la independencia del área de la forma de la superficie y del número que la mide: sigue siendo una deuda, una relación a trabajar en la escuela.

Por último, recuperar del todo el proceso que la explicitación inicial, en cada grupo de estudiantes y con ejemplos que identificamos como bien advertidos, por la cual no necesariamente ante transformaciones de las figuras y los cuerpos se cumple aquella 'ley de conservación' que atribuye aumento del área si aumenta el perímetro, por ejemplo, nos implica en algunas reflexiones:

.las relaciones en geometría no escapan a las lógicas de cualquier otra relación, son producto de construcciones, con todo lo que ello incluye.

.que 'denunciar', mostrar con algún ejemplo, explicitarlo, pueden ser modalidades poco suficientes y que resulta una tarea educativa compleja movilizar construcciones internalizadas que no se corresponden con las lógicas disciplinares de la geometría, en este caso. Hay que generar situaciones de enseñanza, diversas e insistidas, que lo habiliten. En ese sentido, ratificar la importancia de trabajar simultáneamente relaciones entre perímetros y áreas y entre áreas y volúmenes.

.que es de gran contribución identificar dificultades como la del enmascarado perímetro que, quizás disimulado en un menor valor educativo otorgado, se sostuvo con la fuerza que nos permite detectar la recurrencia de aparición errónea o no resuelta en los protocolos analizados

. que toda esta tarea tiene una gran potencialidad transformativa para la formación de profesorado

> "Las situaciones de enseñanza deberán tratar estos obstáculos y, sin reducirse a esto, introducirlos de nuevo para ser aceptados por los alumnos. […] Esto permite asimismo manejar la heterogeneidad, porque rever algo bajo un nuevo aspecto es útil a todos. Los alumnos de todas las edades, incluso los mejores, se sorprenden e interesan" (Bertè, 1996: 48)

Bibliografía

Berté, A. (1996). Matemática de EGB3 al Polimodal. Buenos Aires: A-Z Editora.

Corberán, R. (1996). El área: Recursos didácticos para su enseñanza en matemática. Disponible: http://www.kekiero.es/area/area/ElArea.pdf. Consultado 15/03/2013

D`Amore, B. y Fandiño Pinilla, M. I. (2007). Relaciones entre área y perímetro: convicciones de maestros y de estudiantes. En Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, año/vol. 10, numero 001. pp. 39-68. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Fandiño Pinilla, M. I. (2012). Convicciones de los docentes sobre área y perímetro: una investigación. In: Sagula J. E. (ed.) (2012). Actas del I SEM, Simposio de Educación Matemática. Universidad de la Cuenca del Plata, Corrientes, Argentina. 6 al 8 setiembre 2012. Corrientes: Universidad de la Cuenca del Plata. 25-30.

Itzcovich, H. (coord.); Ressia de Moreno, B.; Novembre, A y Becerril, M. M. (2007) La Matemática escolar. Las prácticas de la enseñanza en el aula. Buenos Aires: Aique.