UN RELEVAMIENTO DE DIFICULTADES QUE SUPONE EL APRENDIZAJE DE CONCEPTOS DEL CALCULO

Quiroga, Marisa; Sorribas, Estela
Facultad de Ciencias Bioquímicas y Farmacéuticas – UNR – Santa Fe (Argentina)
marisaquiroga@hotmail.com ; esorriba@fbioyf.unr.edu.ar
Palabras clave: Dificultades de aprendizaje, razonamiento deductivo, visualización, preconceptos
Nivel Educativo: secundario, universitario

RESUMEN

Desde nuestra experiencia observamos que los alumnos de primer año de la facultad, cometen errores que constituyen un verdadero obstáculo para el desarrollo de cualquier tipo de habilidad matemática. Estamos convencidas que los docentes del ciclo superior, debemos generar alternativas y comprometernos para que nuestros estudiantes puedan superar estos obstáculos.
Pretendemos, con este trabajo (enmarcado en el proyecto: "La significación de los contenidos conceptuales en la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo en las carreras de Ingeniería y Agrimensura"), analizar si los alumnos de este año en particular, siguen teniendo las dificultades que se repiten año a año, o si se ha producido alguna variación con respecto a otros grupos, para a partir de allí planificar actividades para superar estos problemas. Para ello, procedimos a la recolección de datos a través de una actividad e indagamos sobre cuestiones como: visualización, pasajes de registros, conocimientos previos y preconceptos, para trabajar las clases teniéndolas en cuenta.
Analizando los resultados, es que concluimos que no sólo persisten los errores sino que hasta podrían haberse profundizado respecto de años anteriores, no están familiarizados con el tipo de razonamiento lógico-deductivo que requieren; aún no han desarrollado completamente la capacidad de visualización y poseen preconceptos que obstaculizan el aprendizaje significativo de algunos conceptos matemáticos.
Nuestra propuesta sería entonces reforzar las cuestiones lógicas e incorporar herramientas (TIC´s) que faciliten la visualización de los objetos matemáticos. Consideramos que una actividad factible y muy beneficiosa es la implementación de talleres extracurriculares de resolución de problemas.

FUNDAMENTACION DE ESTE TRABAJO

Desde nuestra experiencia áulica e investigaciones realizadas acerca del tipo y la naturaleza de los errores cometidos por nuestros alumnos de primer año de la facultad (Quiroga *et al*, 2005; Sorribas *et al*, 2006), hemos observado que dichos errores se constituyen en un verdadero obstáculo para el desarrollo de cualquier tipo de habilidad matemática, llevando a muchos de ellos al fracaso. (Braccialarghe *et al*, 2004; Figueroa et al, 2004)
A partir del conocimiento de esta situación, estamos convencidas que los docentes del ciclo superior, debemos generar alternativas y comprometernos para que nuestros estudiantes puedan superar estos obstáculos.
Contextualizamos este trabajo en la Facultad de Ciencias Bioquímicas y Farmacéuticas de la Universidad Nacional de Rosario en la que somos docentes en la asignatura Matemática I correspondiente al Ciclo Básico de las carreras de Licenciaturas en Biotecnología, en Química y Profesorado en Química. Asimismo, con este trabajo complementamos uno análogo realizado en la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura (Introcaso *et al* 2009).

Ambos trabajos se enmarcan en el proyecto (Cod: ING 215 UNR): "La significación de los contenidos conceptuales en la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo en las carreras de Ingeniería y Agrimensura". Este proyecto se extendió este año (2009) a las carreras de Licenciaturas en Biotecnología y Química.

No pretendemos, con este trabajo, detectar las causas de estos errores sino analizar si los alumnos de este año en particular, tienen las dificultades que se repiten año a año, o si se ha producido alguna variación con respecto a otros grupos, para a partir de este análisis planificar actividades para superar estos problemas.

Estamos convencidas que los errores frecuentemente cometidos por los estudiantes de Matemática ponen de manifiesto falencias en su formación en lo que hace a temas de Precálculo que obstaculizan la comprensión de los conceptos básicos de esta disciplina. Estas falencias han sido analizadas por numerosos autores, notándose en la evolución de la investigación en Didáctica –como refieren Azcárate & Camacho (2003)– una clara evolución desde el estudio de los errores y dificultades del alumnado hacia investigaciones acerca del conocimiento de los estudiantes que subyace a dichas dificultades. Más aún, investigadores en Didáctica de la Matemática encuentran que los alumnos tienen “concepciones espontáneas” (Azcárate *et al*,1996) que pueden convertirse en obstáculos a la hora del aprendizaje de los conceptos; tienen también dificultades para utilizar adecuadamente las representaciones gráficas (Guzmán Retamal, 1998), y para la comprensión y el manejo de símbolos (Azcárate *et al*, 1996).

Los trabajos respecto a la formación matemática de los estudiantes en su educación preuniversitaria, coinciden, en general, en que resulta tan importante que el estudiante logre encontrar sentido a las ideas matemáticas como que adquiera las capacidades necesarias para *aplicarlas*. Sobre la base de nuestra experiencia docente en el ámbito universitario, consideramos fundamental que el alumno no sólo aprenda una gama de contenidos, reglas y fórmulas matemáticas, sino que también desarrolle un conjunto de habilidades y estrategias que le permitan la *aplicación* de los conceptos aprendidos. Para esto, es necesario un alumno que haya superado ciertas instancias de razonamiento, y haya logrado avanzar sobre el razonamiento inductivo, que no se apoye permanentemente en lo concreto. Según Piaget (1955):

en el período de las operaciones formales se alcanza el equilibrio operatorio, se producen cambios trascendentes que permiten que la inteligencia se libere de lo concreto para pensar lógicamente. El adolescente adquiere la capacidad de razonar en base a combinaciones proposicionales, puede elaborar hipótesis y razonar sobre enunciados sin necesidad de relacionarlos con la realidad. Las operaciones formales consisten, esencialmente en implicaciones (en el sentido estricto del término) e incompatibilidades establecidas entre proposiciones (Pag. 191).

Por su parte, en nuestra asignatura se requiere de una fuerte interpretación de gráficos, que pasa necesariamente por su *visualización;* entendiendo por ella la “habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual en el pensamiento y el lenguaje del que aprende” (Cantoral, 2002). Para realizar la actividad de visualización es necesario que el alumno sea capaz de lograr un fluido pasaje entre los diferentes registros (numérico, gráfico, algebraico o verbal) (Bonacina *et al* (2005). Respecto de la capacidad de visualización existen numerosas investigaciones que coinciden en que los estudiantes tienen muchas dificultades al usar las gráficas para comunicar o extraer información (Wainer, 1992), o aplicar lo aprendido en clases de matemática, física u otras materias (Mc Dermott et al, 1987).

Una clasificación de las dificultades de los estudiantes en la compresión de las gráficas realizada por Leinhardt el al, (1990) plantea cuatro tipos de categorías: la confusión entre pendiente y “altura”, la confusión entre un intervalo y un punto, el ver la gráfica como un dibujo y la concepción de gráfica como un conjunto.

A partir de todo lo expuesto es que indagaremos sobre estas cuestiones: visualización, pasajes de registros, conocimientos previos y preconceptos de los alumnos sobre algunos conceptos del Análisis con el objetivo primordial de poder trabajar la clase teniéndolas en cuenta.

TRABAJO DE CAMPO

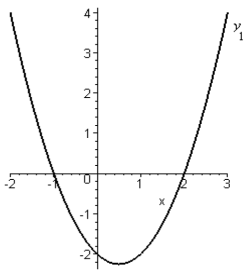
Se procedió a la recolección de datos a través de:

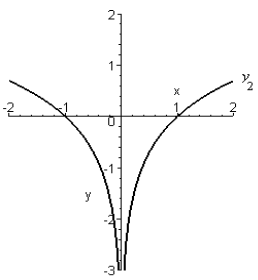
- Una actividad esencialmente de ejercitación
- La resolución y discusión grupal de la actividad.

Los participantes del estudio fueron 85 alumnos ingresantes a las carreras de Licenciatura en Biotecnología y Licenciatura en Química de la Facultad de Ciencias Bioquímicas y Farmacéuticas del año 2009.
La actividad se implementó una vez que los alumnos concluyeron el Curso de Nivelación, dictado en la Facultad al inicio del ciclo lectivo. Dicho curso tuvo por objetivo repasar y profundizar temas del ciclo anterior. Entre los conceptos involucrados en ella se encuentran los de: intervalo, gráfica de una función, distancia entre dos puntos, pendiente de una recta, números racionales e irracionales, sucesiones, que son parte de los temas desarrollados en el curso de Nivelación. Cabe destacar que los alumnos no fueron informados de la implementación de esta actividad con antelación.
La Actividad desarrollada por los alumnos fue la siguiente:

• EJERCICIO 1:

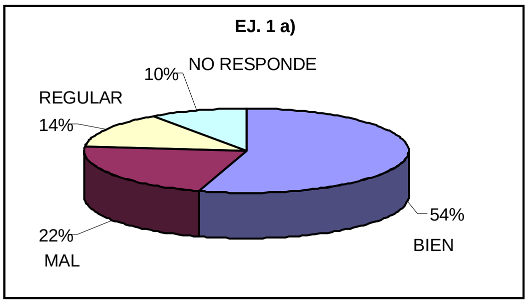
Observa las gráficas y completa la tabla:

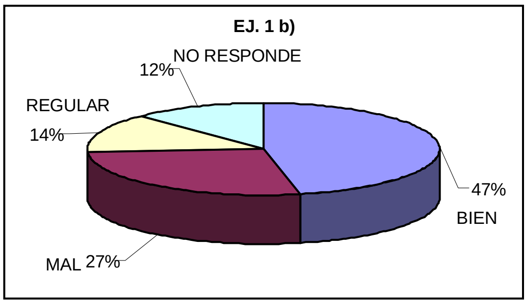


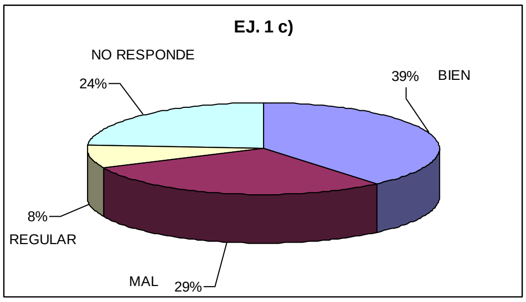


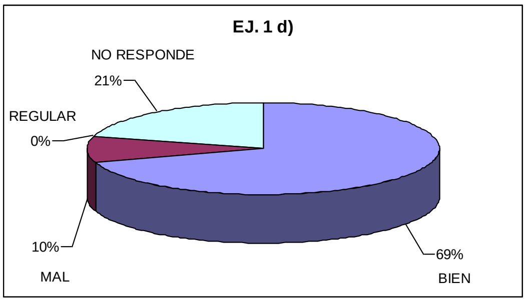
Intervalo	signo de y_1	signo de y_2	signo del producto $y_1 y_2$
a) $(-\infty,-1)$	> 0		
b) $(-1,1)$		< 0	
c)		> 0	< 0
d) $(2,+\infty)$			> 0

En este ejercicio nos planteamos como objetivo analizar cómo los alumnos relacionan el concepto de representación de puntos en un sistema coordenado, con la regla de los signos y con la noción intervalos.





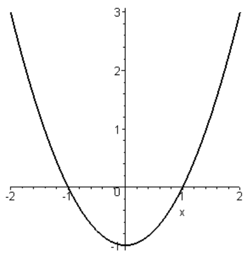




Observamos que, dado el intervalo, aproximadamente la mitad de los alumnos pudo determinar si la función es positiva o negativa pero no recíprocamente. Es notable el aumento de respuestas correctas al determinar el signo de la función cuando la gráfica de la curva se encuentra en el primer cuadrante. Asimismo detectamos que pueden aplicar la regla de los signos con más facilidad que leer un gráfico.

• <u>EJERCICIO 2:</u>

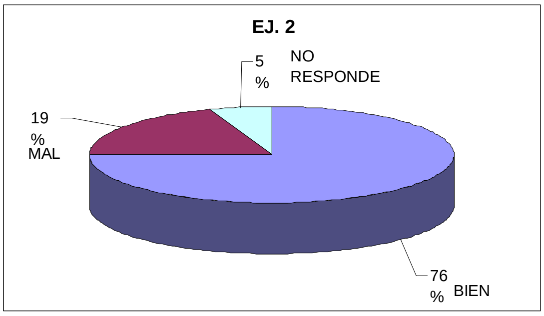
La siguiente es la gráfica de:



a) $y = x^2$ □ c) $y = x^2 - 1$ □
b) $y - 1 = x^2$ □ d) $y = (x-1)^2$ □

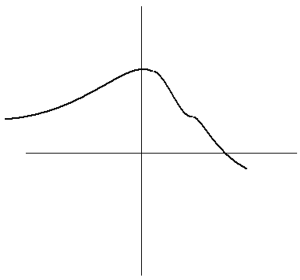
En este ejercicio pretendemos analizar si logran identificar una gráfica con su expresión algebraica.

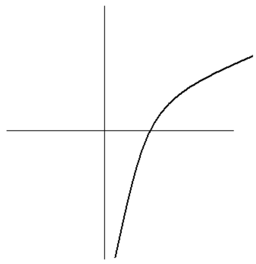
Como se observa, casi el 80% de los alumnos respondieron bien.



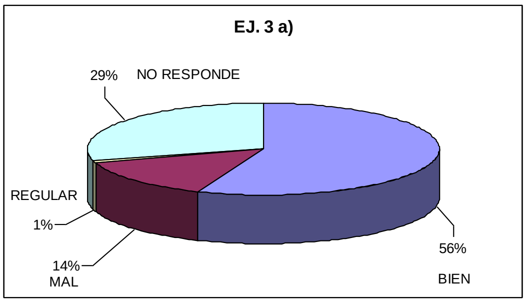
• <u>EJERCICIO 3:</u>

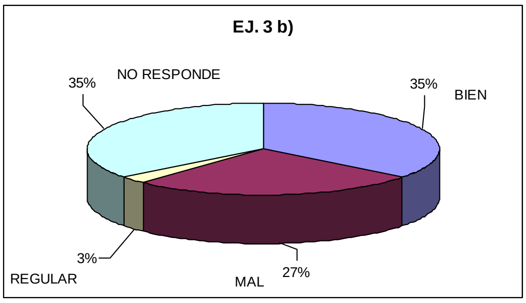
¿Cuál es la mínima distancia de la curva al origen de coordenadas? (marca el segmento que medirías)





En este ejercicio nos propusimos determinar si los alumnos conocen el concepto de distancia de un punto a una curva y cómo visualizan la misma.



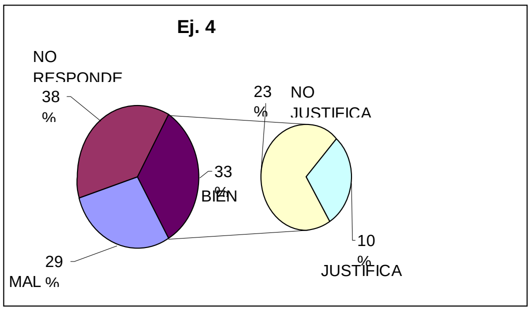


Como se observa en los gráficos, más de la mitad de los alumnos interpretan la noción de distancia de un punto a una curva cuando el segmento que mide la misma se encuentra en el primer cuadrante. En el otro caso, son pocos los que responden correctamente y entre los que lo hacen mal muchos toman como distancia el segmento de recta que mide la distancia del punto intersección entre la curva y el eje x con el origen de coordenadas.

• <u>EJERCICIO 4:</u>

El punto *P* (2,4) pertenece a una recta que pasa por el origen de coordenadas ¿cuál es la pendiente de dicha recta?

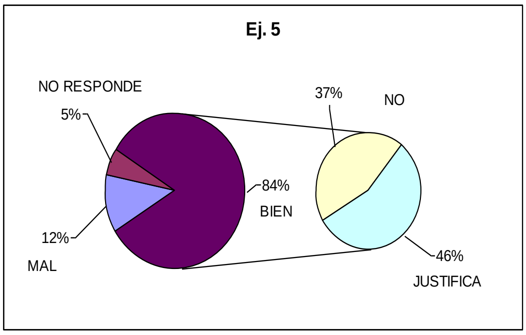
En este ejercicio, muchos de los alumnos que respondieron mal, dan el ángulo en lugar de la pendiente. Dentro de los que respondieron bien, el 10% sólo escribe 2, con lo que no se sabe si tienen idea de la pendiente o confunden con la abscisa del punto.



• <u>EJERCICIO 5:</u>

La siguiente afirmación ¿es verdadera o falsa? $-a < 0$, cualquiera sea $a \in R$

El objetivo que nos planteamos en este ejercicio fue determinar si los alumnos pueden reconocer que una letra representa un número que puede ser menor, mayor ó igual a cero.
A pesar que el 84% de los alumnos respondió bien, un poco más de la mitad justifica correctamente



• <u>EJERCICIO 6:</u>

¿Racional ó Irracional?
Completa la siguiente tabla:

Número	¿Racional o irracional?	¿Positivo o negativo?	Valor absoluto del número	Si el número es racional, su expresión como cociente de enteros es:
$0,\widehat{1}$				
$-0,1010010001...$				
$0,10101010...$				
$1-3,121212...$				

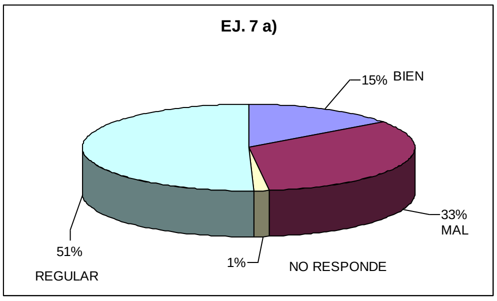
Con este ejercicio pretendemos analizar si los alumnos diferencian números racionales de irracionales, si conocen la representación decimal de los números reales y si manejan la definición de valor absoluto de un número real.
En general, casi todos los alumnos tienen la idea de orden en $\Re$. Nos resultó llamativo que la mayoría no puede representar en fracción a los números racionales. Además fue notorio el aumento en la dificultad que se produjo cuando el número está presentado como una diferencia.

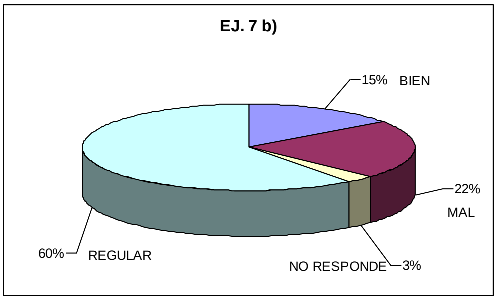
• <u>EJERCICIO 7:</u>

Se deja caer una pelota desde 2 m de altura sobre una superficie horizontal. Cada vez que la pelota llega al suelo, tras caer desde una altura *h*, rebota hasta una altura *h/2*.

a) ¿Podrías calcular la distancia total recorrida por la pelota? Explica tu respuesta.
b) ¿Podrías decir cuántos rebotes hará la pelota? Explica tu respuesta.

Para resolver este problema, los alumnos deberían conocer los conceptos de sucesión y serie, pero ese no fue el objetivo que nos planteamos sino analizar cómo interpretan la situación y que ideas previas tienen de procesos infinitos.





Un gran porcentaje hace cuentas comenzando con un valor arbitrario de “h”. Algunos, a pesar de no tener formalizado el concepto, se dan cuenta que no pueden dar el número de rebotes en la distancia recorrida.
Además observamos problemas en la comunicación escrita, desde la presentación del problema en la hoja durante la resolución, pasando por la falta de organización, coherencia con que presentan las respuestas.

• <u>EJERCICIO 8:</u>

La siguiente afirmación es verdadera: Juan aprueba la materia si contesta bien una última pregunta.

Decide entonces si es verdadera o falsa cada una de las que siguen:

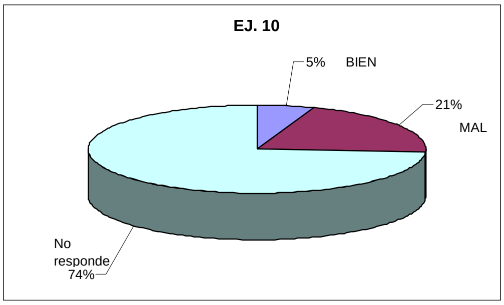
a) Si Juan no contesta la última pregunta, entonces no aprueba la materia ☐
b) Si Juan no aprueba la materia, entonces no contestó bien la última pregunta ☐
c) Juan aprueba la materia sólo si contesta bien la última pregunta ☐
d) Juan puede no haber aprobado la materia aún habiendo contestado bien la última pregunta ☐

En estos ítems se ponen en juego principios de Lógica proposicional y Tablas de verdad.
En general, parece que responden haciendo “TA TE TI”, no se puede evidenciar si relacionan lo pedido con el razonamiento lógico necesario para responder.
Lo que aquí queda al descubierto, es que – en general – los alumnos no son capaces de distinguir el nivel de asignación de valor de verdad a las proposiciones o enunciados, del nivel de validez de un razonamiento.

• <u>EJERCICIO 9:</u>

una curva en ¿Qué entiendes por *recta tangente* a un punto?

La mayoría de los alumnos no contesta. De los pocos que intentan dar una definición matemática (que casualmente son los recursantes), el 100% lo hacen mal.



ANALISIS DE RESULTADOS Y PROPUESTAS

Analizando los resultados de la actividad y en base a las justificaciones dadas por los alumnos en cada una de sus respuestas, es que concluimos que no sólo persisten los errores sino que hasta podrían haberse profundizado respecto de años anteriores, no están familiarizados con el tipo de razonamiento lógico-deductivo que requieren para afrontar la asignatura Matemática; aún no han desarrollado completamente la capacidad de visualización y poseen preconceptos que obstaculizan el aprendizaje significativo de algunos conceptos matemáticos.
La pregunta es: ¿Qué podemos hacer, los docentes, conociendo las causas de las dificultades de nuestros alumnos para facilitarles la tarea de aprender?
Suponemos que los alumnos que recibimos en primer año de la facultad deberían poder razonar lógicamente, razonar sobre enunciados en los que se combinen proposiciones lógicas. Sin embargo, la realidad nos presenta generalmente un panorama bastante más desalentador que atenta contra la rigidez de las divisiones cronológicas establecidas por Piaget y las que separan niñez, adolescencia y juventud. Al respecto, pensamos que las edades que marcan tales divisiones pueden haber sido desplazadas en el mismo sentido en que lo fueron las edades que limitan por ejemplo las etapas de adolescencia o juventud; todo esto respondiendo en gran medida a sobredeterminaciones provenientes del entorno físico, cultural, social e histórico.
Frente a esto consideramos que los aprendizajes que deben realizarse a partir de poder razonar sobre enunciados en donde se combinen proposiciones lógicas que sean acompañados por ejemplos, gráficos y/u objetos concretos que sean necesarios.
De ahí la importancia que adquiere la visualización para la comprensión e interpretación de ciertos conceptos matemáticos. Si sólo damos la definición del concepto, las manipulaciones puramente sintácticas pueden ocasionar un aprendizaje memorístico, desprovisto de sentido. Si acompañamos al concepto con la visualización lograremos a nuestro entender una mejor comprensión.
La visualización se ha convertido en un tópico importante de las diversas escuelas del pensamiento relacionadas con la enseñanza y aprendizaje de la matemática. Principalmente se la ubica como componente de los procesos mentales que tienen lugar en la actividad matemática, aunque se tiene claro que al relacionarse estrechamente con la percepción se presenta también en diversas situaciones de la vida cotidiana. Creemos que la capacidad de visualizar no es sencilla ni simple. En los últimos años observamos que son cada vez más los estudiantes que no pueden valerse de la visualización como una herramienta útil y paso previo para relacionar, clasificar, organizar…, en definitiva, *conceptuar.*
Por otro lado, las concepciones espontáneas sobre algunos conceptos centrales en Análisis Matemático que poseen nuestros alumnos, pueden convertirse en obstáculos a la hora del aprendizaje significativo de los mismos en el contexto de esta materia. Es conocida la idea de

Bachelard (1988) sobre *obstáculo epistemológico,* como el efecto limitativo de un sistema de conceptos sobre el desarrollo del pensamiento. Un obstáculo es entonces una concepción que ha sido en principio eficiente para resolver algún tipo de problemas pero que falla cuando se aplica a otro. Debido a su éxito previo se resiste a ser modificado o a ser rechazado: viene a ser una barrera para un aprendizaje posterior. Una actividad posterior podrá ser realizada con el objetivo de corroborar estas ideas.
Nuestras propuestas serían entonces, por un lado, reforzar las cuestiones lógicas con actividades tendientes a poner en claro el tipo de razonamiento que se espera que ellos sean capaces de llevar a cabo en el desarrollo de los diversos temas de la materia, y por otro, incorporar herramientas (TIC´s) (Quiroga, Sorribas *et al*, 2005) que faciliten la visualización de situaciones y que les permitan "manipular" los objetos matemáticos en juego con el fin de facilitar el paso de registro y lograr que estos objetos puedan ser utilizados en diferentes contextos y para resolver situaciones diversas. Consideramos que una actividad factible y muy beneficiosa es la implementación de talleres extracurriculares de resolución de problemas.

BIBLIOGRAFIA

- Azcárate, C.; Bosch, D.; Casadevall, M. y Casellas, E. (1996). *Cálculo Diferencial e integral*. España: Editorial Síntesis.
- Azcarate, C y Camacho Machın,M. (2003*). Sobre la Investigación en Didáctica del Análisis Matemático*. Boletín de la Asociación Matemática Venezolana Vol. , N. 2. 135.
- Bracchialarghe, D.; Cattaneo, L y Gonzalez, M.I: (2004). *La formación matemática del ingresante a la Universidad en el marco del sistema educativo actual*. Proyecto Ing. 108. FCEIA- UNR.
- Bonacina, M., Haidar, A., Paván, G., Quiroga, M., Sorribas, E., Teti, C. (2005). *La Didáctica Andamiada.* Montevideo- Uruguay. Actas Relme 19.
- Bonacina, M., Haidar, A., Paván, G., Quiroga, M., Sorribas, E., Teti, C. (2005). *Sobre las gráficas cartesianas y los cuerpos en movimiento.* Buenos Aires. V CAREM- SOAREM.
- Bonacina, M., Haidar, A., Paván, G., Quiroga, M., Sorribas, E., Teti, C. (2006). *Obstáculos pedagógicos en la formalización de conceptos.* Buenos Aires. VI CAREM- SOAREM.
- Bonacina, M., Haidar, A., Paván, G., Quiroga, M., Sorribas, E., Teti, C. (2005). *La integración de las TIC´s en Matemática.* Santa Fe. Congreso Internacional: Educación Superior y Nuevas Tecnologías.
- Cantoral, R y Montiel,G. (2002). *Visualización y pensamiento matemático.* México. Área de Educación Superior del Departamento de Matemática Educativa Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN.
- Duval, R. (1999). *Semiosis y Pensamiento Humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales.* Medellín, Colombia: Universidad del Valle.
- Figueroa, T, Lagreca, L, Lagreca, N., Romero, M. (2004). *Los ingresantes a la Universidad; entre las exigencias de contenidos y competencias planteadas en las admisiones universitarias y los adquiridos en la Educación Polimodal en sus diversas modalidades tesis correspondiente a la Licenciatura en Gestión Educativa.* Universidad Nacional del Litoral.
- Guzmán Retamal, I. (1998). *Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones*. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, Vol. 1, Nº. 1, 1998 , pags. 5-21.
- Introcaso, B.; Gonzalez, M.; Emmanuele, D. y Bracchialarghe, D. (2009). *La actividad del docente en relación a los conocimientos e ideas previas de los alumnos. Un estudio contextualizado al Análisis Matemático de una variable*. (paper)
- Leinhardt *el al*, (1990). *Functions, graphs and graphics: tasks, learning and teaching*. Review of Educational Research 60, 1-64.

- McDermott, C., Roenquist, M. y Van Zee, E. (1987). *Students difficulties in connecting graphs and physics: Examples from kinematics*. American Journal of Physics. vol. 55 (6).
- Piaget, J. (1955). *Psicología de la inteligencia.* Ed. Psique, Pág. 191.
- Vigotsky, L. (1996). *Pensamiento y Lenguaje.* México: Ediciones Quinto Sol.
- Wainer, H. (1992). *Understanding graphs and tables.* Educational Research, 21(1) 14.23.