



## SECUENCIA DIDACTICA PARA LA ENSEÑANZA DE TRIANGULOS

María J. Rey Genicio, Liliana R. Tapia, Clarisa Hernández, Héctor R. Tarifa  
Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Jujuy. Argentina  
tresm@imagine.com.ar

**Nivel educativo:** Nivel Medio

**Palabras Clave:** Triángulo, enseñanza, secuencia, didáctica

### RESUMEN

La propuesta se sostiene en un Proyecto de Investigación que busca el desarrollo de estrategias innovadoras en la enseñanza de la matemática. Se apoya en una concepción de aprendizaje constructivo y significativo que adopta la «Ingeniería Didáctica», como metodología para la investigación. Pretende brindar al profesor un material estructurado en forma clara, precisa y amena, elaborado con todos los elementos que consideramos necesarios para ser un instrumento eficaz para la enseñanza de Triángulo. Fue diseñado, no como algo prescriptivo sino, como una reflexión sobre la "buena receta", es decir, para que oriente el análisis y los criterios de acción, discuta y exprese los supuestos y permita al docente decidir entre alternativas y comprobar resultados. A través de esta secuencia el alumno investiga, utilizando el software Cabri Gèomètre, si es posible la construcción de triángulos que cumplen determinadas características, puede explorar de forma interactiva, conjeturar y, en algunos casos demostrar, las propiedades de los ángulos interiores y exteriores, la propiedad de los ángulos opuestos a lados iguales, la propiedad triangular (correspondiente a los lados) y las rectas y puntos notables de un triángulo (mediatrices, bisectrices, alturas, medianas y recta de Euler).

### INTRODUCCIÓN

Al encontrarnos insertos en un mundo de calculadoras, microcomputadoras y computadoras es preciso que profesionales, empresarios, docentes, estudiantes, entre otros, adquieran nuevas aptitudes acordes con esta nueva forma de vida que, sin duda, los llevará a tener nuevos enfoques para el desarrollo diario de sus actividades. En particular en la educación, este hecho implica un condicionamiento no sólo al alumno sino también para el docente que es el motor del proceso educativo y gestor de la innovación educativa.

El uso de una computadora y software con capacidad gráfica están dirigidos a lograr un mejor y más completo aprendizaje por parte del alumno ya que, entre otros aspectos, se puede reducir el tiempo de cálculo lo que permite disponer de más tiempo para encarar los aspectos conceptuales y cualitativos de un problema o experimento, el alumno puede adquirir destrezas en el manejo de modelos descriptivos, probar hipótesis o conjeturas más rápidamente adquiriendo así habilidades específicas en resolución de problemas y en toma de decisiones.

Al encarar el proceso de aprendizaje de un contenido de geometría plana, mediante el uso de software específico para tal fin, intentamos que el estudiante mediante el manejo de modelos sencillos, previamente analizados y concebidos para ese fin, experimenten distintas situaciones que lo lleven al descubrimiento de leyes, relaciones y comportamientos. Él mismo puede introducir nuevas conjeturas sobre los modelos experimentados, para preguntarse, por ejemplo, "¿ qué pasaría si..." llegando así a confirmar o descartar esas conjeturas, proponer otros modelos, demostrar una propiedad o generalizar una idea.

Convencidos que los medios informáticos con capacidad gráfica son un instrumento poderoso con el cual puede contar el profesor en el aula, hemos diseñado una secuencia didáctica para el aprendizaje de triángulos utilizando Cabri realizando la experiencia áulica con alumnos del nivel medio de la Escuela Agrotécnica N° 4 de Libertador General San Martín de la Provincia de Jujuy.



## MARCO TEÓRICO

Intentar cambios en los modelos tradicionales de la enseñanza, en este caso específico en la enseñanza de la matemática y en particular de la Geometría, es una tarea compleja. Si estamos dispuestos a construir una didáctica transformadora de tradiciones pedagógicas rutinarias, necesariamente hay que admitir que el docente debe reflexionar sobre sus prácticas, interiorizarse sobre los resultados de las nuevas investigaciones educativas, analizar y debatir sus resultados, cotejar lo viejo y lo nuevo para hacer las rupturas necesarias y obtener nuevas conclusiones, rescatando lo positivo de cada una de ellas. Pero este es un camino que no es fácil de andar, por eso se justifica crear modalidades que nos posibiliten *acompañarnos*.

Esta secuencia está dirigida al docente de matemática que cotidianamente está en la búsqueda de actividades y estrategias nuevas, o bien diferentes, para que los alumnos se sitúen frente a los problemas de la matemática, pongan en juego sus estrategias personales y discutan, analicen, comparen, etc, actividades mentales que los ayudarán a construir nuevos conceptos, aprehenderlos, y finalmente aplicarlos

Esta propuesta didáctica se sostiene en un Proyecto de Investigación que busca el desarrollo de estrategias innovadoras en la enseñanza de la matemática. El proyecto se nutre teóricamente de las contribuciones de la Psicología constructivista del aprendizaje y de la Didáctica de la Matemática. Desde estos marcos se toman aportes relevantes, que se presentan sintéticamente a continuación.

De la fuente psicológica tomamos en especial las teorías cognitivas, las que en general entienden que el aprendizaje efectivo requiere que el estudiante participe activamente en la construcción del conocimiento y que aquel es mediado por los procesos de pensamiento, de comprensión y de dotación de significado (Constructivismo psicogenético, la Teoría Socio-Histórica de Vigotsky y el Aprendizaje Significativo de Ausubel) .

Tenemos entonces que la actividad de los alumnos es base fundamental para el aprendizaje en tanto que la acción del docente es intervenir aportando las ayudas necesarias, estableciendo los esquemas básicos sobre los cuales éstos pueden explorar, observar, y reconstruir conocimientos. En esos esquemas se articulan la información (aportada por el docente, los textos, los materiales y los alumnos) con las acciones cognitivas de los sujetos.

De esta misma fuente se toma el concepto de Interacción Socio-Cognitiva, entendiendo que la cognición humana óptima se lleva a cabo con la colaboración de otras personas y de objetos físicos y simbólicos que potencian las capacidades individuales. De allí sostenemos que los procesos grupales de construcción de conocimientos se constituyen en medios altamente eficaces para el logro de un aprendizaje significativo. Sin embargo en ellos se hace necesaria una intervención muy cuidadosa del docente tendiente a optimizar las actividades, supervisando cada grupo, facilitando los intercambios de tipo cognitivo, recuperando oportunamente lo producido en cada uno y logrando una reorganización final de los conocimientos trabajados.

Por otra parte, de la fuente didáctica tomamos en primer lugar el concepto de estrategia didáctica de Bixio que designa al conjunto de las acciones que realiza el docente con clara y explícita intencionalidad pedagógica. Algunas de sus componentes son el estilo de enseñanza, la estructura comunicativa de la clase, el modo de presentar los contenidos, las consignas, los objetivos y su intencionalidad, la relación entre materiales y actividades, los criterios de evaluación, etc. Las estrategias deben apoyarse en las construcciones de sentido previas de los alumnos (significatividad), orientar la construcción de conocimientos a partir de materiales adecuados y ser factibles de desarrollarse en el tiempo planificado, con la cantidad de alumnos con que se cuenta y con la carga horaria destinada.

En segundo lugar, la propuesta se apoya por un lado en la Didáctica francesa de la Matemática, con Brousseau y Chevalard como referentes, y en la «*Ingeniería didáctica*» de Douady. En su Propuesta, Regine Douady caracteriza lo que denomina «*dialéctica instrumento-objeto*»: un concepto matemático funciona como «*instrumento*» cuando es la herramienta que



permite resolver un problema; y funciona como «objeto» cuando es descontextualizado y aislado como objeto matemático. La dialéctica instrumento – objeto exige que el alumno enfrente situaciones en las que aparece un mismo «significante» con distintos «significados» (Una misma expresión fraccionaria puede significar, entre otras, una relación parte-todo, una razón de proporcionalidad o una probabilidad). Como así también que un mismo concepto, en diferentes marcos, se presente con diferentes significantes. (Un sistema de ecuaciones lineales puede ser presentado algebraicamente o mediante su representación gráfica en un sistema de coordenadas cartesianas).

Este enfoque requiere que el docente, antes de presentar el problema que haya seleccionado de acuerdo al contenido elegido, pueda anticipar las posibles estrategias y respuestas que puedan dar sus alumnos, los errores que puedan surgir a fin de prever las dificultades con las que pueda encontrarse y decidir sus probables intervenciones.

En base a esta ideas base, para esta experiencia se elaboró un conjunto de actividades concebidas, organizadas y articuladas en el tiempo para efectuar un proyecto de aprendizaje sobre el tema mencionado. En los análisis preliminares se tuvieron en cuenta: las dificultades y los errores más frecuentes de estos aprendizajes, las prácticas habituales de los docentes para el tratamiento de este tema y los diferentes enfoques que presentan los libros de texto sobre el mismo.

## EL POR QUÉ DE LA PROPUESTA

La confluencia de varios factores hizo nacer la propuesta de estudiar los triángulos con el software Cabri.

- La poca motivación por las matemáticas que encontramos en el grupo de alumnos requería idear estrategias validas para motivar al grupo-clase.
- El boom de la informática, la moda del ordenador, el desarrollo de las nuevas tecnologías, el énfasis que pone nuestra actual Ley Nacional de Educación N° 26.206, que dice que la escuela debe garantizar no sólo el acceso al conocimiento a través de los medios convencionales sino también a través de los medios tecnológicos.
- El convencimiento, tal como decía Luis Santaló, de que para aprender matemática hay que usarla “como una manera de conocer, más que de hacer”, y esto implica pensar u organizar secuencias didácticas donde el eje sea la resolución de problemas.

## PROPÓSITOS QUE PERSEGUIMOS

Entre los propósitos perseguidos con la implementación de esta propuesta podemos mencionar los siguientes:

- Que los alumnos aprendan de una manera entretenida  
Nos interesa que descubran por ellos mismos las propiedades de los ángulos de un triángulo, propiedad triangular, los puntos notables, reconceptualizando y significando saberes abordados en la escuela primaria.
- Introducir a los alumnos en el dominio de los ordenadores.  
La idea fue que las herramientas tradicionales lápiz y papel, empiecen a compartir protagonismo con las herramientas del software, ya que su manejo será imprescindible dentro de muy pocos años. Consideramos que es importante que el estudiante descubra las limitaciones y alcances de ambas herramientas, las convencionales y las informáticas.
- Dar oportunidades para expresar la creatividad.  
Comentaba Giménez (2004) haciendo referencia a una cita de Sawyer: «Al finalizar una clase de arte, el alumno puede decir, éste es el dibujo que he hecho. Al finalizar una clase de inglés, ésta es la historia que he escrito. ¿Qué dice después de una clase de

matemática? “¿He hecho los cálculos correctamente...?”. Nos gustaría que fuese: “He deducido tal propiedad y la expresé de esta manera” o “Aquí tienen un patrón o regularidad que he observado por eso deduzco que siempre se va a dar de esta manera”.

- Fomentar el trabajo cooperativo y el trabajo en grupo  
Porque resolver un problema en grupo implica muchas ventajas: escuchar, explicar, descubrir, razonar, compartir, intercomunicar, aprender, enseñar, descubriendo la matemática como una actividad interactiva y comunicativa.

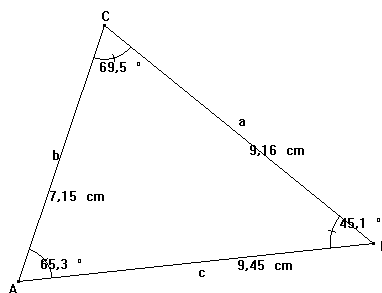
## DESCRIPCIÓN, OBJETIVOS Y ANÁLISIS DE LAS ACTIVIDADES

A continuación sólo analizaremos la primera actividad de la secuencia.

### 1.- Descripción de la actividad: Clasificación de triángulos.

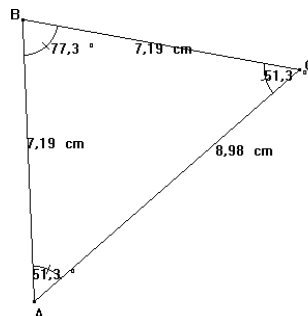
1.- Modifica el triángulo escaleno ABC, de forma de obtener en cada caso el triángulo especificado, siempre que sea posible. Indica en cada caso el valor de los lados y ángulos. Ver Fig. 1

- acutángulo
- rectángulo
- obtusángulo



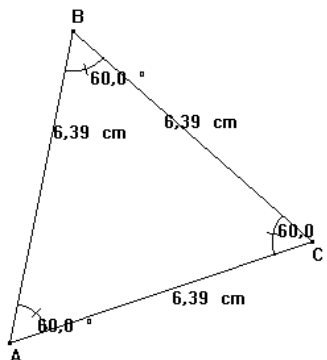
2.- Modifica el triángulo isósceles ABC, de forma de obtener en cada caso el triángulo especificado, siempre que sea posible. Indica en cada caso el valor de los lados y ángulos.

- acutángulo
- rectángulo
- obtusángulo



3.- Modifica el triángulo equilátero ABC, de forma de obtener en cada caso el triángulo especificado, siempre que sea posible. Indica en cada caso el valor de los lados y ángulos.

- acutángulo
- rectángulo
- obtusángulo



## 2.- Objetivos:

Que el alumno sea capaz de lograr

- Descubrir
- Expresar las propiedades de los triángulos.
- Conjeturar y confrontar sus posturas con las de sus compañeros y con los atributos del software

## 3.- Análisis de la actividad

Una de las intenciones de esta primera actividad fue recordar la clasificación de los triángulos según sus lados, según sus ángulos, los elementos de un triángulo y ver cómo en determinadas situaciones hay problemas que pueden tener varias soluciones (por ejemplo: escaleno acutángulo), una sola solución (isósceles rectángulo) o bien no tener solución (equilátero rectángulo).

Destacamos que respecto de esta última posibilidad se generó, en la clase correspondiente, un ameno debate entre los educandos, para justificar la imposibilidad de lo solicitado.

Con la participación de los distintos grupos formados y la guía del docente se logró llegar a la conclusión de que estas situaciones se generan cuando se solicita que propongan un triángulo con dos condiciones contradictorias, por ejemplo que un triángulo sea simultáneamente equilátero y obtusángulo.

## ORGANIZACIÓN DEL TALLER

Del taller participaron aproximadamente 84 alumnos de 1° año 3° y 4° división. Los estudiantes provenían de la escuela Agrotécnica N°4, de Libertador General San Martín de la Provincia de Jujuy.

Se los distribuyó en tres grupos de 28 alumnos cada uno, trabajando dos alumnos por ordenador. La duración de cada encuentro fue de 80 minutos, una vez por semana.



## RESULTADOS DE LA EXPERIENCIA

Entre los aspectos relevantes de esta experiencia podemos remarcar los siguientes:

- Relacionar la clasificación de los triángulos según sus lados y ángulos fue una de las actividades que más le costó a los alumnos. Consideramos que esta dificultad se debe a que en la primaria se trabaja dicha clasificación por separado, y no hay un análisis de la interrelación de ellas. Les sorprendía que les propusiéramos situaciones imposibles, como la de un equilátero rectángulo



- Los procesos de generalizar y simbolizar, fue otra de las grandes dificultades que tuvieron los estudiantes. Expresar sus conclusiones utilizando el lenguaje matemático fue todo un desafío. Con las herramientas del software Cabri, ellos observaban las regularidades, pero extender esas regularidades a todos los triángulos les parecía algo muy apresurado. Esta primera apreciación se fue superando a medida que se analizaba el alcance, hecho que se vio favorecido por la potencia que nos daba el software, para ver en cuestión de minutos lo que con las herramientas tradicionales nos llevaría un tiempo más.
- Después de superada la dificultad de generalizar, el otro inconveniente fue cómo expresar los resultados a los que habían arribado: los alumnos utilizaron sus propios códigos y estilos de lenguaje. Tomando como punto de partida sus conclusiones, se analizó su pertinencia. De ello surgió la necesidad de aunar criterios de notación, utilizando, para que podamos entendernos, un mismo lenguaje.

## CONCLUSIÓN

El carácter interactivo del programa fue muy valioso porque le permitió al alumno contrastar la realidad con las respuestas dadas en un comienzo, lo que generó un debate de gran riqueza en las distintas instancias de la secuencia.

Así mismo les ayudó a mirar la propuesta haciendo una lectura crítica, valorando la necesidad de la coexistencia de ambas herramientas: papel y lápiz por un lado y recursos informáticos por otro.

Los alumnos estuvieron motivados y comprometidos con la tarea, entre otras cosas, porque era una de las primeras veces que utilizaban la computadora en la clase de matemática.

Se pudo observar que por las actividades propuestas y el medio utilizado, los educandos vieron la necesidad de tener una mayor precisión y comprensión del lenguaje, debido a que el manejo del software lo requiere.

## REFLEXIÓN FINAL

Utilizar como metodología de enseñanza la dialéctica instrumento-objeto de Douady, implica reconceptualizar nuestras concepciones de lo que significa enseñar y aprender matemática.

Es una forma de trabajo que requiere pensar no sólo como se va a enseñar si no también cuáles serán las distintas estrategias que utilizará el alumno. Implica todo un cuestionamiento previo, acompañado de una posible propuesta, que se termina configurando en la implementación.

En la experiencia llevada a cabo, sin duda el aprendizaje de los alumnos se vio, si no mejorado por el tipo de propuesta, al menos movilizado a tareas de mayor compromiso intelectual y más actividad personal y grupal.

## BIBLIOGRAFIA

- Abdala C. & M. Real, *Carpeta de matemática 1*, Aique, Argentina, 2001.
- Berté A., *Matemática de EGB 3 al Polimodal*, A-Z Editora, Argentina, 1996
- Berté A., *Matemática dinámica*, A-Z Editora, Argentina, 1993
- Bruno de Marti, M. E., *Matemática 2001*, Novelibro S. A., Argentina, 1997
- Chemello G. & A. Díaz, *Matemática, metodología de la enseñanza*, Prociencia, Argentina, 1997.
- Chevallard Y., M. Bosch & J. Gascón, *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*, Horsori, Barcelona, 2000.
- Douady R., M. Artigue, L. Moreno & P. Gómez, *Ingeniería didáctica en educación matemática*, Iberoamericana, Bogotá, 1995.



- Garaventa L. & P. Rodas, *Carpeta de matemática 7*, Aique, Argentina, 2001
- Kaczor P. & V. Machiunas V, *Matemática EGB 8*, Santillana, Argentina, 2002
- Ponce H., *Enseñar y aprender matemática*, Novedades educativas, Argentina, 2005
- Vilella J., *Didáctica de la matemática*, UNSAM, Argentina, 2002.
- Giménez S., *La actividad matemática en el aula*, Grao, Barcelona, 2004.