EPISTEMOLOGÍA Y METAMATEMÁTICA

María Rosa Rodríguez de Estofán y Jesús Alberto Zeballos
Universidad Nacional de Tucumán-Argentina
marosarodriguez@arnet.com.ar; jesuszeballos@tucbbs.com.ar
Nivel Educativo: Postgrado
Palabras Clave: Fundamentación, Paradojas, Consistencia, Completitud

Resumen

La Epistemología es una metateoría acerca de las teorías científicas. Reflexiona sobre: la determinación de su objeto, su metodología, la relación lógica de sus enunciados, la manera en que valida sus conocimientos y el grado de aceptación en la comunidad científica. En relación a la Matemática, se interesa en su Fundamentación y se interroga acerca de ciertas cuestiones filosóficas. Este interés estuvo presente en toda su historia; pero se acrecienta especialmente a partir de mediados del siglo XIX, cuando se advierte que los sistemas formales elaborados durante este largo período han derivado en paradojas.
Para superar estas dificultades, se han formulado respuestas lógico-matemáticas que se clasificaron en tres grandes líneas: *el logicismo, el formalismo y el intuicionismo.* Kurt Gödel demostró que las paradojas internas eran insalvables. Sólo podían ser superadas con la formulación de sistemas más amplios y potentes, expresados en un lenguaje metamatemático.
Sostenemos que en esta constitución paradojal o antinómica de los sistemas formales se oculta el dinamismo y el espíritu creador de la matemática. Esto nos permite afirmar que el quehacer matemático es al mismo tiempo descubrimiento e invención. Quizás una futura Fundamentación de la Matemática deba recurrir a la Lógica dialéctica o a las Lógicas paraconsistentes.

1.- Introducción

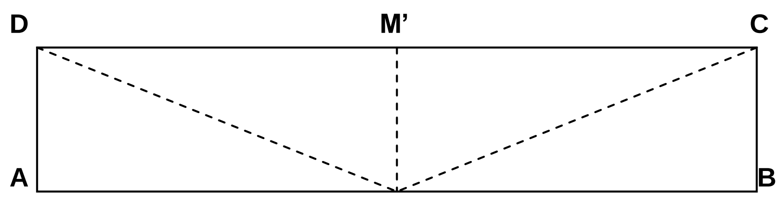
La Epistemología es una metateoría acerca de las teorías científicas. Reflexiona sobre: la determinación de su objeto, su metodología, la relación lógica de sus enunciados (sintaxis), la manera en que valida sus conocimientos (semántica) y el grado de aceptación en la comunidad científica (pragmática). En relación a la Matemática, se interesa en su Fundamentación y se interroga acerca de ciertas cuestiones filosóficas como: ¿En qué consiste? ¿Acerca de qué trata? ¿Cómo se puede acceder al conocimiento matemático? ¿Cómo se lo puede justificar? ¿De qué manera se lo puede ampliar?
Se destacan al menos tres ámbitos interrelacionados y fácilmente discernibles: el plano lógico-formal, que atiende la estructura interna por la cual se deducen los teoremas a partir de los axiomas, el plano ontológico o de la existencia de los objetos matemáticos, y el plano pragmático que incluye la interpretación y aplicación de la Matemática a la realidad.
En relación al primer aspecto, se han señalado paradojas o inconsistencias surgidas de la construcción de sistemas en la fundamentación de las teorías matemáticas. Para superar estas dificultades se han formulado respuestas lógico-matemáticas que se clasificaron en tres grandes escuelas: *el logicismo, el formalismo y el intuicionismo.*
Kurt Gödel demostró que las respuestas de estas escuelas fueron insatisfactorias, ya que las paradojas internas eran insalvables. Sólo podían ser superadas con la formulación de sistemas más amplios y potentes, expresados en un lenguaje metamatemático.
Este trabajo pretende mostrar que estas soluciones al problema de la fundamentación matemática son también lógicamente insatisfactorias. Una alternativa de solución podría ser la lógica dialéctica, que asume la significación de las paradojas como un motor que dinamiza el progreso del saber matemático.

2.- El Ideal de la Sistematización

Siempre, filósofos, lógicos y matemáticos se interesaron en precisar los conceptos matemáticos y a construir pruebas rigurosas de demostración. En los siglos XIX y XX se acentúa este interés, recurriendo a la abstracción y formalización del lenguaje matemático. De ello se obtienen dos efectos: el afinamiento riguroso de los razonamientos matemáticos y el desarrollo de la lógica-matemática, que a veces se confunde con la metamatemática.
A partir de entonces, tanto la lógica como la matemática se estructuraron en sistemas axiomáticos deductivos, consistentes, completos, decidibles e independientes. Lo que significa en primer término la eliminación de paradojas y/o contradicciones; en segundo lugar, la demostración completa de todos los teoremas en base a los propios axiomas del sistema; luego, que contenga algoritmos para determinar si una fórmula cualquiera dentro del sistema es válida o no; y por último, que ninguno de los axiomas o supuestos pueda derivarse como teorema a partir de los restantes.

2.1.- Formalización Geométrica

Desde el siglo III a. C. se consideró como un modelo de sistema axiomático-deductivo a la geometría euclidiana. Efectivamente, en base a unos pocos principios, que Euclides denomina Postulados y Nociones Comunes, se deducen todos los teoremas de la geometría. Durante siglos se consideró que esta geometría era la descripción del espacio físico-real. Nunca se cuestionó la verdad de las proposiciones euclideanas, esto es, el espacio se comportaba aparentemente tal y cual lo decía su geometría. Sumada a esa adecuación ontológica, se daba el rigor lógico de las demostraciones deductivas. Aunque los geómetras posteriores descubrieron algunos errores de derivación, como por ejemplo la utilización de algunos supuestos no explícitos, en general se aceptó el rigor de las pruebas lógicas de demostración de los teoremas. Ni el rigor sintáctico ni la verdad semántica del sistema euclidiano estaban cuestionados. Pero, siempre se sospechó de la independencia de sus axiomas. Concretamente el postulado 5º de las paralelas parecía no ser una proposición axiomática. Este postulado fue siempre cuestionado, no desde el punto de vista de su verdad sino de su evidencia y, por lo tanto, se intentó demostrarlo, infructuosamente, como teorema a partir de los cuatro axiomas restantes.
Muchos matemáticos lograron demostrarlo agregando una nueva suposición; pero todas estas resultaron ser equivalentes al 5to postulado de Euclides.
Girolamo Saccheri de Milán (1667 – 1733) matemático y sacerdote jesuita, publica el libro *Euclides ab omni naevo vindicatus,* donde demostraba por reducción al absurdo que el postulado de las paralelas era un axioma. En él trató de demostrar el 5to postulado utilizando un razonamiento por el absurdo. Si aceptamos como verdaderos los postulados 1, 2, 3, 4 y además la verdad de la negación del 5to, y de allí obtuviésemos una contradicción, ello significaría que el 5to postulado debe ser verdadero, lo cual bastaría para afirmar que es independiente de los anteriores.
Para ello se recurre a la construcción del cuadrilátero ABCD de Saccheri, con el cual se demuestra que dos ángulos son iguales. Ahora bien, ¿son rectos, obtusos o agudos? En cualquiera de los casos, si se arriba a una contradicción, quedaría demostrado que el 5to postulado es independiente de los 4 anteriores.



Los ángulos C y D son rectos: De aquí Saccheri demuestra la verdad del 5to postulado, lo que involucra una contradicción con el supuesto original que dicho postulado era falso.
Los ángulos C y D son obtusos: Aquí Saccheri arriba a la negación del postulado 2, que afirma que todo segmento de recta se puede prolongar en ambas direcciones.
Los ángulos C y D son agudos: Aquí Saccheri no arriba a ninguna contradicción, pensando que alguna vez la encontrará. Si hubiese continuado sus desarrollos habría sido el creador de la primera geometría *no euclideana*.
En la demostración para los ángulos agudos, la interpretación de Saccheri incurre en el error lógico de aceptar como contradictorias proposiciones que en realidad no son. Efectivamente, las proposiciones “la suma de los ángulos interiores de un triángulo es mayor que 180º” y “la suma de los ángulos interiores de un triángulo es menor que 180º” no contradicen lógicamente a ninguno de los axiomas. Son proposiciones con distinto contenido; como si formalmente se confrontara la proposición “p” con la proposición “~q”.
Si se hubiera percatado de ese error lógico, habría descubierto un nuevo sistema axiomático para la geometría. Logró demostrar todos los teoremas bajo la validez de la hipótesis denominada del ángulo agudo. Las demostraciones lógicas fueron consistentes aunque algunos teoremas resultaron en su contenido, contraintuitivos. Lo que estimó como absurdo porque tenía la convicción de que la única geometría “verdadera” era la euclídea. Es decir, Saccheri identificaba el espacio geométrico euclidiano con el espacio físico.
En el año 1829, Lobachewsky Nicolai Ivanovitch (1793-1856) publicó en el *Kazan Messenger* un artículo titulado “Sobre los Principios de la Geometría”, que marca el inicio de las geometrías no euclideanas. En él se demuestra que el postulado 5º no podía ser derivado a partir de los otros cuatro y construye una geometría sobre una hipótesis que contradecía dicho postulado: “Por un punto C exterior a una recta AB puede trazarse más de una recta contenida en el plano ABC que no corta a la recta AB”. Con este postulado dedujo una teoría geométrica consistente, sin contradicciones lógicas. Lobachewsky no se preocupó si el espacio geométrico supuesto se aplicaba a algún espacio físico. Pero esta geometría parecía tan opuesta al sentido común que el mismo Lobachewsky la consideró un *Gedanke Experiment* y la denominó “Geometría Imaginaria”.
Riemann Georg Friedich Bernhard (1826-1866), en cambio, no se interesó sólo en la cuestión de cuántas paralelas podían trazarse por un punto exterior a una recta. Sostenía que la geometría no necesariamente debiera referirse a puntos, rectas y otros conceptos espaciales, sino de conjuntos de n-uplas ordenadas que se pueden combinar de acuerdo a ciertas reglas lógicas, con lo que logra una concepción abstracta de relaciones en múltiples espacios posibles. Entre las reglas más importantes está la “métrica” a definir, que determinará a priori las propiedades del espacio a considerar. Un modelo de la geometría riemanniana, por ejemplo, toma al ‘plano’ como la superficie de una esfera y una ‘línea recta’ como la circunferencia de un círculo máximo en dicha esfera y en este caso la suma de los ángulos de un triángulo es siempre mayor que dos rectos.
Lobachevsky y anteriormente el alemán Gauss (1777- 1855), junto con Bolyai concibieron una variedad de Geometría no Euclideana, a partir de la negación del 5to postulado, llamada *hiperbólica,* que se corresponde con la suposición de los ángulos agudos de Saccheri. Esta nueva geometría presupone que *por un punto exterior a una recta pasa más de una paralela.* En contraposición, Bernhard Riemann presupone que *por un punto exterior a una recta no pasa paralela alguna.* Esta Geometría no Euclideana, fue denominada *elíptica.*
Las Geometrías no Euclideanas confirmaron que un sistema geométrico axiomático es válido por su consistencia lógica interna, es decir no existe contradicción alguna, aunque se arriben a “teoremas contraintuitivos”. El metateorema de la consistencia muestra, precisamente, que las geometrías, son construcciones lógicas, sintácticas, teóricas y puramente formales. Desde una perspectiva semántica, pueden ser interpretados con ciertos modelos: ellos constituyen el ámbito casi infinito de la Matemática aplicada. Por ejemplo:

- La Geometría supuesta en la mecánica newtoniana es euclideana o parabólica.
- La Geometría supuesta en la teoría de la relatividad es riemanniana o elíptica.
- La Geometría supuesta en los modelos del alemán Felix Klein (1849 – 1925) y del francés Henri Poincaré (1854 – 1912) es de Lobachevsky o hiperbólica.

No existiría la física de Newton sin los supuestos de la geometría de Euclides, ni la de Einstein sin los de la geometría riemanniana. Esto es, no puede haber física sin geometría pero sí geometría sin física.
A partir de David Hilbert (1862-1943) sólo se tiene en cuenta el rigor lógico-sintáctico, interno al sistema mismo, alcanzando la máxima expresión de abstracción y formalización, en la cual no se alcanza a discernir la geometría pura de una lógica y una sintaxis pura. En 1899, Hilbert publica su *Grundlagen der Geometrie* donde realiza un esfuerzo sistemático por dar un carácter absolutamente formal deductivo a la geometría.
Frente a la necesidad de una fundamentación axiomática, Hilbert advierte que no todos los términos se pueden definir, ni todas las proposiciones se pueden demostrar. Hay puntos de partida para las definiciones, que son los términos indefinidos, y puntos de partida para las demostraciones, que son los axiomas. Hilbert propone 21 axiomas, llamados “axiomas de Hilbert”, que incluyen a los postulados y a las nociones comunes de Euclides. De esta manera quedó perfectamente axiomatizada la geometría en el siglo XX.
En la reformulación que David Hilbert (1862 – 1943) hizo de la Geometría de Euclides, se agregan los axiomas de orden de los puntos de una recta, de continuidad y congruencia. Con ellos se obtienen veinte axiomas divididos en cinco grupos: Axiomas de Enlace; Axiomas de Ordenación; Axiomas de Congruencia; Axiomas de Continuidad y el Quinto Postulado de Euclides o postulado de las Paralelas.
Hilbert recurre a la teoría de conjuntos para mostrar que las ideas geométricas debían ser eliminadas y los puntos, rectas y planos debían ser considerados simplemente como elementos pertenecientes a conjuntos dados. Como resultado el espacio geométrico se constituyó en un concepto absolutamente abstracto, cuya descripción teoremática no requiere de la intuición ni de su aplicación al espacio físico. Su definición total queda contenida en las bases axiomáticas del sistema: términos primitivos, definiciones, reglas de formación, reglas de transformación, axiomas y teoremas. Ilustración de estas abstracciones es no sólo la geometría pura, sino también el álgebra de conjuntos, los números complejos, la aritmética transfinita y las topologías, entre otras.

2.2.- Formalización Aritmética
Giuseppe Peano italiano (1858 – 1932) propuso introducir los números naturales por medio de un sistema axiomático formal, conocido como “axiomática de Peano”, que consta de: Términos Primitivos: cero (0), siguiente (o sucesor) y número natural.
Términos Definidos: 1 = def. el siguiente de 0
2 = def. el siguiente de 1 (el siguiente del siguiente de 0)
Cuasiproposiciones:
Axioma 1: Cero es un número natural: N(0)
Axioma 2: Si x es un número natural, el siguiente de x también es un número natural:
$(\forall x)\ (Nx \supset Nx')$
Axioma 3: Cero no es el siguiente de ningún número natural:
$\sim(\exists x)\ [(Nx \wedge (0=x')]$
Axioma 4: Si dos números naturales x e y tienen siguientes idénticos, es que ellos son idénticos: $(\forall x)\ (\forall y)\ [(Nx \wedge Ny) \wedge x' = y'] \supset x=y$
Axioma 5: Principio de Inducción Matemática
Para toda propiedad P, si cero tiene la propiedad P y, supuesto que, del hecho de que un número natural cualquiera tiene la propiedad P resulta que el siguiente de ese número también tiene la propiedad P, entonces todos los números naturales tienen la propiedad P:

$(\forall P) \{[P(0) \wedge (\forall x) (Px \supset Px')] \supset (\forall x) Px\}$
Peano consideró que su sistema daba una definición contextual de los números naturales y que éstos serían el único modelo de su axiomática. Pero el lógico, matemático y filósofo inglés Bertrand Russell (1872 – 1970) mostró que si hay un modelo de un sistema, entonces hay más de uno y en realidad hay infinitos modelos isomórficos.
Russell encontró un modelo de la axiomática de los números naturales sin presuponer nociones aritméticas. Definió el *número cardinal* de un conjunto como el conjunto de todas las clases coordinables con él. Para hacer esta reducción Russell se apoya en la teoría de conjuntos de Georg Cantor (1845 – 1918). Del mismo modo, Hilbert toma a la teoría de conjuntos de Cantor como base para hacer una fundamentación absolutamente formal de la geometría, del mismo modo en que Russell lo hizo para la aritmética.
Pero la teoría de conjuntos de Cantor encierra contradicciones o paradojas lógicas, con lo cual el ideal de formalización para mostrar la consistencia de los sistemas matemáticos, se vio frustrado.
Un elemento fundamental en la teoría de conjuntos cantoriana es la de número Cardinal, concepto derivado del conjunto cuando se hace abstracción de la calidad y el orden de sus elementos. Dos conjuntos tienen el mismo cardinal si se pueden poner en correlación los elementos de uno y otro, por una función biyectiva. Por otra parte, su célebre teorema enuncia que "Para todo conjunto E existe un conjunto de cardinal mayor que el cardinal de E, en particular el conjunto cuyos miembros son todos los subconjuntos de E", conjunto éste denominado "el conjunto potencia de E, PE". Pero (y aquí radica la paradoja de Cantor), el cardinal de E es inferior al cardinal de PE, es decir, que el conjunto de los subconjuntos es siempre mayor que E.
Esta paradoja estrictamente formal y/o lógico-matemática, se debe a que el número ordinal y el cardinal que corresponden a un conjunto de números serán siempre mayores en una unidad al mayor número de los que constituyen el conjunto, perteneciendo al mismo tiempo a dicho conjunto.
En la misma paradoja incurre Gottlob Frege (I, 1893; II, 1903) señalada por Bertrand Russell en una carta dirigida a Frege y fechada el 16 de Junio de 1902. En ella argumenta que: "una función no puede jugar el papel del elemento indeterminado" o, en otros términos, "una función no puede ser una función de sí misma". En gramática lógica diríamos que "un predicado no siempre predica de sí mismo", relación que Frege inadvertidamente sostuvo y que dio origen a la paradoja de Russell acerca del conjunto de todos los conjuntos que no son miembros de sí mismo. Para dar solución a estas paradojas, Russell en 1908 formula su *teoría ramificada de los tipos* y Zermelo intenta otra solución con la *teoría axiomática de los conjuntos.* Más tarde, Chwistek en 1921 y Ramsey en 1926 modifican la teoría de Russell formulando la *teoría simple de los tipos.*
En suma, podemos decir que la Matemática y la Lógica, que se origina en ella, buscaron su propia fundamentación con la obtención de mayor rigor en las demostraciones que, a medida que va acrecentándose, va plasmando un lenguaje específico y constituyendo una nueva disciplina: la Metamatemática o teoría de la demostración.

3.- Inconsistencias de la Sistematización
En 1931, Kurt Gödel (1906-1978) matemático austríaco radicado en Estados Unidos publicó un artículo con el título "Sobre sentencias formalmente indecidibles de Principia Matemática y Sistemas afines" donde muestra que el programa de Hilbert era irrealizable, dando por tierra con todas las esperanzas de poder demostrar la completitud y consistencia de un sistema axiomático. Comenzó haciendo una aritmetización de la sintaxis, que consiste en asociar a cada símbolo del sistema axiomático un determinado número natural. Demostró que es posible asignar un único número natural a cada signo del sistema, a cada expresión y a cada sucesión de expresiones (demostraciones). Estos números se denominan *números de Gödel.*

Las propiedades sintácticas del sistema vinculadas con axiomas, demostraciones y teoremas se pueden codificar como relaciones aritméticas entre los números gödelianos.
Como en cualquier cálculo los signos elementales se clasifican en constantes y variables. En los siguientes cuadros ilustramos la asignación del número gödeliano a cada uno de estos signos:

Constantes	**Número de Gödel**	**Significado**
~	**1**	No
$\vee$	**2**	O
$\supset$	**3**	Si...... entonces...
$\exists$	**4**	Existe un.....
=	**5**	Igual a....
0	**6**	Cero
S	**7**	El sucesor inmediato de....
(	**8**	Signo de puntuación
)	**9**	Signo de puntuación
,	**10**	Signo de puntuación

Existen tres tipos de variables en el vocabulario fundamental:

Variables	**Sustituye**	**Regla de Asociación**	**Número Gödel**	**Ejemplos de Sustitución**
Numéricas (x, y, z,....)	A los numerales y expresiones numéricas	A cada variable un número primo distinto y mayor que 10	X – 11 Y – 13 Z - 17	0 s0 y
Sentenciales (p, q, r,...)	A las fórmulas	A cada variable el cuadrado de un número primo mayor que 10	p - 11^2 q - 13^2 r - 17^2	0 = 0 ($\exists$ x) (x = sy) p $\supset$ q
Predicativas (P, Q, R,….)	A los predicados	A cada variable el cubo de un número primo mayor que 10	P - 11^3 Q - 13^3 R - 17^3	Primo Compuesto Mayor que

Ejemplo de una fórmula del sistema ($\exists$ x) (x = sy). Existe un x tal que x es el sucesor inmediato de y. Los números asociados son:

(	$\exists$	x	)	(	x	=	s	y	)
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
8	4	11	9	8	11	5	7	13	9

Se asocia a la fórmula un único número que es el producto de los 10 primeros números primos en orden de magnitud, estando cada uno de ellos elevado a una potencia igual al número Gödel del correspondiente signo.
Recíprocamente de todo número de Gödel se puede encontrar la fórmula correspondiente, por ejemplo:

A	243.000.000
B	$2^6 \;.\; 3^5 \;.\; 5^6$
	6 5 6
	↓ ↓ ↓
C	0 = 0
D	0 = 0

Gödel toma la expresión, digamos *a* , aritmetizada por un determinado número gödeliano, que enuncia que ella misma no es demostrable dentro del sistema. De la autoreferencia de *a* se infiere que no se puede demostrar *a* ni tampoco su negación. Con lo cual se prueba lógicamente la incompletitud de cualquier sistema que contenga la aritmética elemental incluidos *Principia Matemática, La Aritmética Formal de Peano, La teoría Axiomática de Conjuntos, etc.* Del mismo modo mostraba que es imposible deducir una fórmula que pruebe la consistencia del sistema, o sea que era imposible demostrar, usando los métodos a los que hacía referencia tanto Hilbert como Russell, que los axiomas de la aritmética no conducirían a contradicciones. En otros términos, no puede demostrarse la consistencia de la teoría elemental de los números, por medio de las reglas de derivación propias de la misma teoría.

3.1.- Primer Metateorema de Gödel

Cualquier sistema axiomático que contenga a la aritmética (Peano, Zermelo, Principia Matemática, etc.) es incompleto.

Se supone que el sistema es consistente, que el conjunto de axiomas es decidible y que contenga al menos las operaciones suma y producto.

Sea *a* la proposición que afirma "*a* no es demostrable" caracterizada por un cierto número gödeliano.

Supongamos que *a* es demostrable en el sistema. Si lo es, *a* es verdadera, es decir que lo que afirma se cumple. Esto es, que *a* no es demostrable. Nuestra suposición de que *a* es teorema nos lleva a contradicción. Por lo tanto la suposición es falsa.

Pero esto es lo que *a* afirma de sí misma, lo que establece que *a* es verdadera.

Entonces: 1) *a* no es teorema y

2) que *a* es verdadera, es decir que $\sim a$ es falsa ($\sim a$ no es teorema)

Por lo tanto, existe una *a* verdadera que no es demostrable; ni tampoco su negación. En consecuencia el sistema es incompleto en dos sentidos: sintáctico y semántico.

3.2.-Segundo Metateorema de Gödel

Ningún sistema axiomático que contenga a la aritmética (Peano, Zermelo, Principia Matemática, etc.) puede demostrar su propia consistencia.

Dado un sistema S supongamos la proposición *c* que expresa "S es consistente" y el primer metateorema de Gödel que afirma que *a* es indemostrable, obtenemos el condicional "si *c* entonces *a*" que es un teorema.

Supongamos que "S es consistente" es un teorema, entonces por *modus ponens*:

$c \supset a; \quad c \quad / \therefore \quad a$

a resultaría ser un teorema, pero por primer metateorema, ello es imposible. Como la primera premisa es un teorema, entonces la segunda no puede serlo. En consecuencia "S es consistente" es indemostrable.

Conclusión de ambos metateoremas: Si el sistema es consistente no es completo; y si el sistema es completo no es consistente.

4.- Conclusiones

El desarrollo formal y abstracto de la Matemática cobra gran relevancia en el siglo XIX, enfatizando la *Fundamentación de la Matemática* para dotarla de rigor metodológico, epistemológico y filosófico; exigencia que perdura hasta nuestros días.
Pero Gödel demostró que el ideal de sistematización formal al estilo de Hilbert o Russell es lógicamente imposible. Estimamos que tal ideal se hace inalcanzable, además, porque todo sistema axiomático contiene reglas operativas: de formación y de transformación. Las primeras establecen cuáles son las fórmulas que pertenecen al sistema (fórmulas bien formadas) y las segundas determinan cómo se pueden obtener nuevas fórmulas a partir de las primitivas. En otros términos, diríamos qué procedimientos nos permiten obtener nuevos teoremas a partir de los axiomas o de teoremas previamente demostrados. Ahora bien, una regla es una norma de acción que no puede ser totalmente formalizada.
En consecuencia el tratamiento puramente sintáctico, al que se remitían en exclusividad tanto formalistas como logicistas, es necesario pero insuficiente para una fundamentación. A la sintaxis, se debe agregar una semántica, que tiene que ver con el contenido significativo de las reglas operativas y una pragmática, que esclarece lo apropiado de su interpretación.
Se han ensayado otras demostraciones de consistencia distintas a las "internas al sistema mismo" acudiendo a técnicas más potentes que las de la propia teoría, como por ejemplo la de inducción transfinita que es una extrapolación a los números ordinales transfinitos. Pero estas técnicas, al igual que la teoría de los tipos de Russell, nos llevan a una regresión al infinito, en la cual no habría una base determinada de fundamentación.
Por último, queremos señalar que el intento de formalización de los sistemas axiomáticos no ha sido estéril. Como sostenía Poincaré, los sistemas formales no son estériles, ya que engendran paradojas. En esta constitución paradojal o antinómica de los sistemas formales se oculta el dinamismo y el espíritu creador de la Matemática. Esto nos permite afirmar que el quehacer matemático no sólo es descubrimiento e invención, sino al mismo tiempo retroalimentación. Para atender a esta condición filosóficamente polimorfa de la Matemática, quizás se deberá recurrir a Lógicas no tradicionales, como la Lógica dialéctica y la Lógica paraconsistente.

Referencias Bibliográficas

- Boyer, C. B. (1999). *Historia de la Matemática.* Madrid: Alianza.
- Camino Cañón, L. (1993). *La Matemática Creación y Descubrimiento*. Madrid: Universidad Pontificia Comillas.
- Frege, G. (1974). *Escritos Lógico-Semánticos.* Madrid: Tecnos.
- Gödel K. (1981). *Obras Completas.* Madrid: Alianza.
- Klimovsky, G. y Boido G. (2005). *Las Desventuras del Conocimiento Matemático.* Buenos Aires: A-Z.
- Lakatos, I. (1978). *Pruebas y Refutaciones.* Madrid: Alianza.
- Russell, B. (1967). *Los Principios de la Matemática.* Madrid: Espasa-Calpe.