Épsilon - *Revista de Educación Matemática* *2015, Vol. 32(2), nº 90, 7-20*

La dispersión como elemento estructurador del currículo de estadística y probabilidad

Carmen Batanero
Universidad de Granada

Ignacio González-Ruiz
Universidad de Cantabria

M. del Mar López-Martín
Universidad de Granada

J. Miguel
Universidad de Granada

RESUMEN: *Las medidas de dispersión complementan a las de posición central para caracterizar una distribución. En el currículo se introducen en primer lugar en relación con las distribuciones de datos, generalizándose progresivamente a las distribuciones de probabilidad. En el estudio de la inferencia será necesario coordinarlas con las distribuciones muestrales de los estadísticos, que permiten realizar estimaciones con una valoración de su precisión. En los datos bivariantes, la dispersión se relaciona con la intensidad de la relación y se descompone en componentes que separan la variabilidad explicada y no explicada por los modelos de regresión. El objetivo de este trabajo es analizar la riqueza del concepto y la forma en que se contempla en el currículo en las diversas etapas educativas.*
Palabras clave: *Dispersión, ideas estadísticas fundamentales, currículo.*

Dispersion as a curriculum structuring statistics and probability

ABSTRACT: *Spread measures provide additional information to central tendency measures when characterizing a distribution. In the Spanish curricula, they are firstly introduced linked to data distributions, and afterwards they are generalized to probability distributions.*

In the study of statistical inference, it is necessary to coordinate them with the summaries of the sampling distributions, in order to make estimates with a value of their accuracy. In bivariate data, spread is related to the strength of the relationship between two variables and can be split in components that measure the variability that is explained and unexplained by a regression model. The aim of this paper is to analyze the wealth of the concept and the way it is considered in the Spanish curricula, along the different educational levels.
Keywords: *Spread, basic stochastic ideas, curriculum.*

INTRODUCCIÓN

Las medidas de dispersión son esenciales en una distribución de datos, complementando a las de posición central, al caracterizar la variabilidad de los datos respecto a las mismas. Su relevancia en la formación estadística ha sido señalada por Wild y Pfannkuch (1999), que incluyen la percepción de la variabilidad de los datos (y por tanto de su dispersión respecto a un promedio) como uno de los componentes básicos en el pensamiento estadístico. Igualmente, de los cinco elementos fundamentales de este tipo de pensamiento propuestos por Moore (1990), tres están en relacionados con la variabilidad aleatoria: la percepción de su ubicuidad en el mundo que nos rodea, la competencia para su explicación, identificando los factores de las que depende, y la habilidad de cuantificarla (que implica comprender y saber aplicar el concepto de dispersión).

A pesar de esta importancia, la didáctica sobre las medidas de dispersión es escasa, y se centra principalmente en la forma en que los estudiantes comprenden el tema (los principales trabajos sobre el tema se resumen en Estepa y del Pino, 2013; y Sánchez, Borim y Coutinho, 2011). Para completar estas investigaciones, la finalidad de nuestro trabajo es analizar la forma en que introduce y se va ampliando el concepto en las directrices curriculares españolas, con niveles progresivos de amplitud y complejidad. Este es un punto no tratado en investigaciones previas; sin embargo, es necesario para prever la comprensión progresiva del concepto por parte del estudiante.

En lo que sigue analizamos la dispersión desde cuatro puntos de vista: la estadística descriptiva univariante y bivariante; la probabilidad y la inferencia. Utilizando algunas ideas del enfoque ontosemiótico (Godino, Batanero y Font, 2007) mostramos que estos puntos de vista suponen significados diferenciados del concepto, cada uno de los cuáles contribuye a desarrollar el sentido de la dispersión en el estudiante.

FUNDAMENTOS

En nuestro análisis nos basamos en el enfoque ontosemiótico, que considera la actividad matemática como un conjunto de prácticas realizadas en la resolución de problemas (Godino, Batanero y Font, 2007). En este enfoque se diferencia entre prácticas institucionales (aceptadas por una institución, por ejemplo, de enseñanza) y personales (específicas de una persona). El significado de un objeto sería el conjunto de prácticas asociadas a dicho objeto y puede ser asimismo institucional y personal.

Las prácticas matemáticas se caracterizan mediante los objetos que intervienen en ella, que pueden ser de diferente naturaleza:

- *Situaciones-problemas.* Aquellas en las que surge la actividad matemática, en nuestro caso las situaciones que motivan la idea de dispersión; por ejemplo, valorar la bondad de ajuste de un modelo en el estudio de la regresión.
- *Lenguaje.* Son los términos, expresiones simbólicas, tablas o gráficos usados para representar la información proporcionada en una situación problemática, las operaciones y objetos utilizando en su resolución y las soluciones encontradas. Por ejemplo, las palabras *varianza, rango* o *variabilidad,* los símbolos específicos del tema, el gráfico de la caja o los diagramas de dispersión.
- *Conceptos.* Son los objetos matemáticos que se utilizan implícita o explícitamente en la actividad matemática y que pueden ser definidos. Asociados a la idea de dispersión aparecen otros conceptos matemáticos y estadísticos, como dato, distribución, promedio, o medida.
- *Propiedades o proposiciones* que relacionan entre sí los conceptos. Un ejemplo en probabilidad es la desigualdad de Tchebycheff, que relaciona la distribución de una variable aleatoria con la media y desviación típica.
- *Procedimientos.* Incluyen los algoritmos, operaciones o técnicas que constituyen parte de la enseñanza; entre otras las distintas técnicas de cálculo de las medidas de dispersión (datos aislados, distribución de datos agrupados o no, etc.).
- *Argumentos. Son las* justificaciones empleadas para mostrar la validez de una proposición o de la solución a un problema. Estas justificaciones incluyen las habituales en matemática: inducción, deducción, análisis-síntesis, etc., y también algunas específicas de la probabilidad e inferencia.

Todos estos objetos están relacionados, entre sí, formando configuraciones, que serán epistémicas si son propias de una institución matemática o de enseñanza y cognitivas si son específicas del alumno. En nuestro trabajo tratamos de identificar las diferentes configuraciones epistémicas relacionadas con la dispersión en los cuatro puntos de vista antes señalados, que para nosotros definen significados diferenciados del concepto. Nos centramos en los últimos decretos curriculares publicados (MECD, 2014, 2015), cuyo contenido respecto al tema de la dispersión no es muy diferente al que ha estado vigente hasta la fecha (MEC, 2006, 2007a, 2007b). Aunque el nuevo currículo añade más detalle en los criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables, nos limitamos a mostrar los contenidos en las diferentes tablas que se incluyen en el trabajo, para no extender excesivamente el mismo.

EL SIGNIFICADO DESCRIPTIVO UNIVARIANTE DE LA DISPERSIÓN

El primer contacto del estudiante con la idea de dispersión es desde la perspectiva de la estadística descriptiva, es decir, cuando el interés de un estudio estadístico radica en analizar un conjunto de datos sin pretensiones de generalizar los resultados del análisis.

Como vemos en la Tabla 1, este contacto se inicia ya desde la Educación Primaria, donde encontramos una mención tangencial a conceptos como *variabilidad estadística,* cuando se propone el trabajo con colecciones sencillas de datos, y la realización de tablas o gráficos elementales o su interpretación. Una primera medida elemental de dispersión en este nivel es *el rango*, fácil de calcular e interpretar por los niños, y que se asocian a las medidas de posición central: media aritmética y moda. La situación- problema que la determina es el encontrar una medida de la variabilidad de un conjunto de datos, que inicia la introducción del concepto de rango y algunas propiedades sencillas (el rango es la diferencia entre los valores máximos o mínimos). Las representaciones elementales de datos numéricos (como gráfico de barras y líneas) permiten visualizar la variabilidad.

Tabla 1. Contenidos relacionados con el significado descriptivo univariante de la dispersión en el currículo

Curso	Contenidos relacionados con la dispersión
Educación primaria	Iniciación intuitiva a las medidas de centralización: la media aritmética, la moda y el rango. Realización e interpretación de gráficos sencillos: diagramas de barras, poligonales y sectoriales.
1º y 2º ESO	Organización en tablas de datos recogidos en una experiencia. Diagramas de barras, y de sectores. Polígonos de frecuencias. Medidas de tendencia central. Medidas de dispersión.
3º ESO, enseñanzas académicas	Frecuencias absolutas, relativas y acumuladas. Agrupación de datos en intervalos. Gráficas estadísticas. Parámetros de posición. Cálculo, interpretación y propiedades. Parámetros de dispersión. Diagrama de caja y bigotes. Interpretación conjunta de la media y la desviación típica
3º ESO, enseñanzas aplicadas	Igual que en Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas. Se añade: Rango, recorrido intercuartílico y desviación típica. Cálculo e interpretación.
4º ESO, enseñanzas académicas	Medidas de centralización y dispersión: interpretación, análisis y utilización. Comparación de distribuciones mediante el uso conjunto de medidas de posición y dispersión.
4º ESO, enseñanzas académicas	Similar al anterior

A lo largo de la Educación Secundaria Obligatoria se reformula el problema de medir la dispersión *respecto a una medida de posición central* y se introduce otro relacionado, consistente en la comparación de dos distribuciones, teniendo en cuenta su variabilidad. Estos problemas motivan los conceptos de *desviación respecto a la media, varianza* y *desviación típica* y *recorrido intercuartílico,* así como la terminología y simbolización asociada. Cuando se desea que la medida de dispersión sea relativa (a la medida de valor central) se introduce el *coeficiente de variación*. Algunas propiedades importantes serían que las medidas de dispersión no pueden tomar valores negativos y además, algunas como la varianza, se ven afectadas por los cambios de escala de los datos mientras que quedan invariantes bajo cambios de origen.

Progresivamente, a partir de tercer curso, se trabaja con variables agrupadas, lo que amplía el repertorio de algoritmos y procedimientos; las directrices curriculares

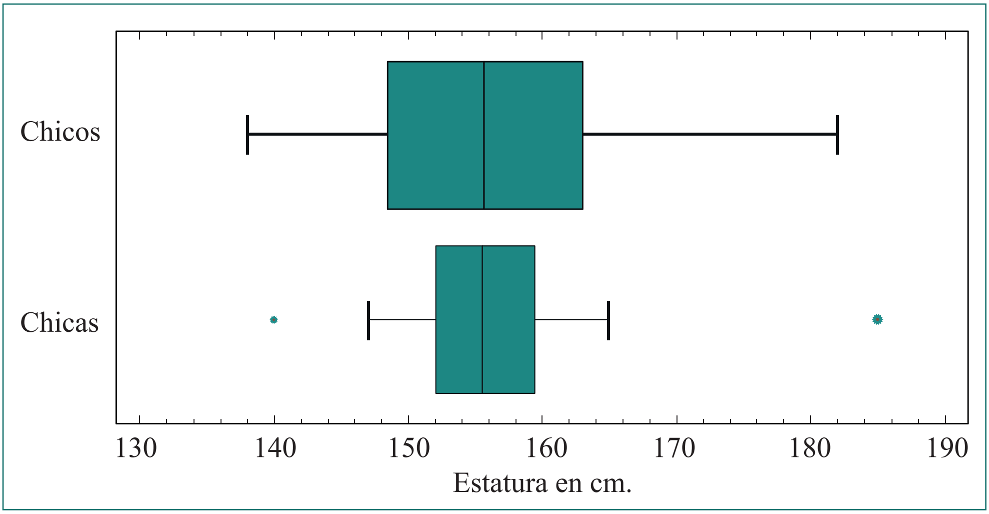

Figura 1. Distribución de estaturas de alumnos de una clase.

recomiendan el uso de la calculadora gráfica o la hoja de cálculo para facilitar estos algoritmos. Para dotar de mayor sentido la idea de dispersión se emplean los gráficos de frecuencias agrupadas, gráficos múltiples o de caja. También se recomienda el uso de las medidas de posición central y dispersión para la comparación de distribuciones. Aunque cualquier representación gráfica de una distribución de datos lleva implícita la idea de dispersión en los datos y rangos, los gráficos de cajas constituyen una representación idónea para comparación de distribuciones y el estudio de la dispersión- Así, en la Figura 1, observamos que los valores centrales de las estaturas de chicos y chicas de una clase de Educación Secundaria Obligatoria son similares, pero la dispersión es mucho mayor en los chicos. El gráfico muestra también los cuartiles y los valores atípicos, así como los intervalos en los que varía el 50% de valores de cada distribución.

4. LA DISPERSIÓN EN EL ANÁLISIS DESCRIPTIVO BIVARIANTE

Al iniciar el estudio de datos bivariantes, nos encontramos con dos nuevos problemas diferenciados que motivarán nuevos puntos de vista sobre la dispersión (Batanero, 2001). El primero se centra en analizar la posible existencia e intensidad de una relación entre dos variables cuantitativas, llevando a la introducción del concepto y métodos de correlación. El segundo consiste en determinar una función (entre una familia dada) que permita estimar una de las variables (dependiente) conocida el valor de la otra (independiente), de acuerdo con un criterio de *bondad de ajuste*; dando lugar a la introducción del concepto de regresión. Es claro que, en ambos casos, la dispersión juega un papel central. Los contenidos relacionados del currículo se resumen en la Tabla 2.

Ya en el cuarto curso de la Educación Secundaria Obligatoria, se introduce el *diagrama de dispersión.* Esta representación (Figura 2) ayuda a generalizar la idea de

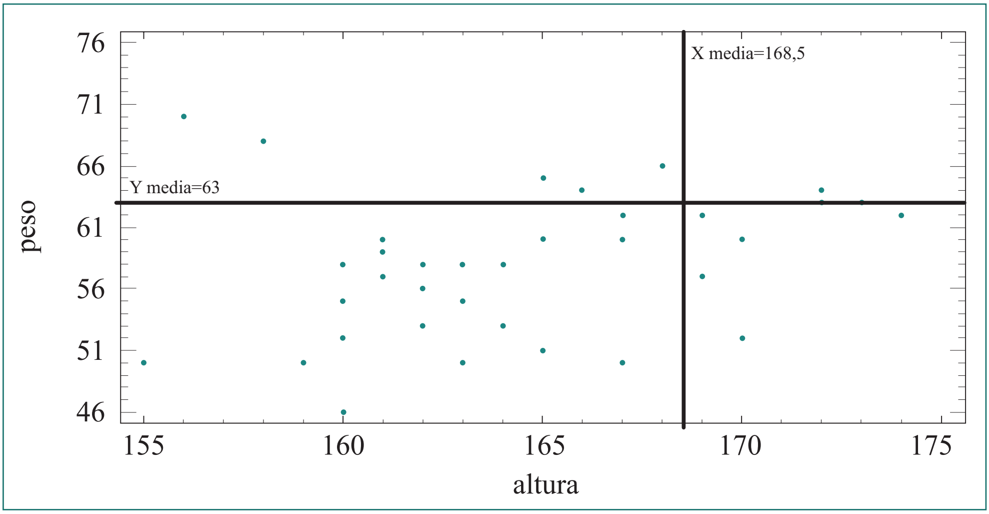

Figura 2. Distribución de alturas y pesos de un grupo de chicas

dispersión al caso bivariante y permite considerar diferentes componentes de la misma: a) dispersión de los puntos respecto al centro de gravedad formado por las dos medias (visualizado en la Figura 2 como intersección de las dos rectas paralelas a los ejes que pasan por el centro de gravedad); b) dispersión respecto a la variable *X* (dispersión de alturas en el ejemplo); c) dispersión respecto a la variable *Y* (dispersión de los pesos).

Tabla 2. Contenidos relacionados con el significado bivariante de la dispersión en el currículo

Curso	Contenidos relacionados con la dispersión
4º ESO, enseñanzas académicas y aplicadas	Construcción e interpretación de diagramas de dispersión. Introducción a la correlación
1º Bachillerato, Ciencias Sociales y Ciencias	Estadística descriptiva bidimensional: Distribución conjunta y distribuciones marginales. Distribuciones condicionadas. Medias y desviaciones típicas marginales y condicionadas. Independencia de variables estadísticas. Dependencia de dos variables estadísticas. Representación gráfica: Nube de puntos. Dependencia lineal de dos variables estadísticas. Covarianza y correlación: Cálculo e interpretación del coeficiente de correlación lineal. Regresión lineal. Predicciones estadísticas y fiabilidad de las mismas. Coeficiente de determinación (sólo en Ciencias)

En las materias Matemáticas I (Bachillerato de Ciencias) y Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I (Bachillerato de Humanidades y Ciencias Sociales) estas ideas se formalizan al introducir las nociones de distribución marginal y distribución condicionada.

Se introduce también la correlación y regresión, relacionadas directamente con la dispersión; cuanto mayor sea la dispersión de los puntos respecto a un modelo matemático de ajuste a los datos (línea o recta de regresión), menor será la intensidad de la relación (o de la correlación) entre las variables. La covarianza y el coeficiente de correlación lineal serán nuevos estadísticos que permiten valorar la intensidad y signo de la relación, pero también son nuevos indicadores de la dispersión conjunta de los datos.

$$S_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}(x_i - x)\cdot(y_j - y)\cdot n_{ij} \ ; \ r = \frac{S_{xy}}{S_x S_y}$$

Como vemos en sus fórmulas, está claro esta relación; la covarianza S_{xy} será mayor o menor cuanto mayor o menor sea la diferencia de los puntos a su media (más o menos dispersión); el coeficiente de correlación se expresa como cociente entre esta y las desviaciones típicas de las variables; para que tome un valor alto, estas (la dispersión) debe ser pequeña. Por otro lado, es posible descomponer la varianza de la variable dependiente en dos componentes:

$$S_Y^2 = S_{\text{explicada}}^2 + S_{residual}^2$$

donde S_y^2 es la varianza total de la variable Y, $S_{\text{explicada}}^2$ es la varianza explicada por la regresión y $S_{residual}^2$ es la varianza no explicada o varianza residual.

Es precisamente el cuadrado del coeficiente de correlación (coeficiente de determinación) el que nos da la proporción de varianza de la variable dependiente Y explicada por el modelo línea de regresión (recta de regresión). Cuanto mayor sea este coeficiente más proporción de la varianza de Y es explicada por el modelo de regresión o, lo que es lo mismo, es mejor la bondad de ajuste. De este modo, se relaciona también la idea de dispersión con la bondad de ajuste de un modelo.

LA DISPERSIÓN EN PROBABILIDAD

La introducción de algunas variables aleatorias sencillas y sus distribuciones (binomial, normal), en el 1º curso de Bachillerato para los alumnos de Ciencias Sociales y del 2º curso para los alumnos de Ciencias (ver Tabla 3), permite considerar un nuevo punto de vista para las medidas de posición central y dispersión: su carácter de parámetro de las distribuciones de probabilidad. La situación-problemática principal que motiva el estudio de estos conceptos será la de determinar modelos generales de distribuciones (familias) que permiten resolver una gama de situaciones probabilísticas y encontrar las expresiones de sus distribuciones de probabilidad. Así, en el caso de la distribución normal (Figura 3) un cambio en su desviación típica no sólo produce una mayor menor dispersión de la función de densidad, sino que reduce el apuntamiento de la misma.

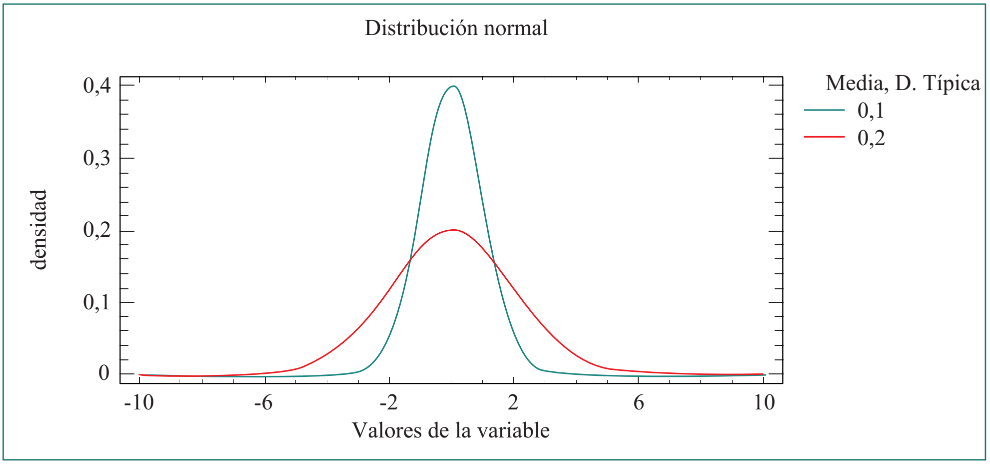

Figura 3. La desviación típica como parámetro en la distribución normal

Tabla 3. Contenidos relacionados con el significado probabilístico de la dispersión en el currículo

Curso	Contenidos relacionados con la dispersión
1º Bachillerato, Ciencias Sociales	Variables aleatorias discretas. Distribución de probabilidad. Media, varianza y desviación típica. Distribución binomial. Caracterización e identificación del modelo. Cálculo de probabilidades.
2º Bachillerato, Ciencias	Variables aleatorias continuas. Función de densidad y de distribución. Interpretación de la media, varianza y desviación típica. Distribución normal. Tipificación de la distribución normal. Asignación de probabilidades en una distribución normal. Cálculo de probabilidades mediante la aproximación de la distribución binomial por la normal.

La tipificación o procedimiento que permite reducir cualquier distribución normal a la normal estándar de media 0 y desviación típica 1, es también específico del significado probabilístico de la dispersión. Una propiedad importante en la distribución normal es que un 99.97% de sus valores están comprendidos en el intervalo $\mu \pm 3\sigma$; es decir $P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) = 0.9997$. Más adelante se mostrará una propiedad similar, la desigualdad de Tchebycheff, la cual permitirá obtener la probabilidad de que los valores de una distribución se encuentren en intervalos que distan k desviaciones típicas de la media.

LA DISPERSIÓN EN INFERENCIA

En Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II, asignatura opcional en el segundo curso del Bachillerato de Humanidades y Ciencias Sociales, se introducen contenidos propios de la inferencia estadística (ver Tabla 4). En este contexto, un problema de interés radica en la estimación de los parámetros de las distribuciones de probabilidad en una población (por ejemplo, la media de una distribución normal) a partir de los datos de una muestra aleatoria tomada de dicha población. Un segundo problema consiste en contrastar hipótesis sobre los valores de dichos parámetros.

Estos problemas llevan a la introducción de muchos conceptos nuevos, como *distribución muestral*, *error de estimación*, *intervalo de confianza,* relacionados con la idea de dispersión. Son características propiedades como la relación entre tamaño de muestra, precisión y confianza o la relación entre la desviación típica de la variable en la población y la de la distribución de la media muestral.

Tabla 4. Contenidos relacionados con el significado inferencial de la dispersión en el currículo

Curso	Contenidos relacionados con la dispersión
2º Bachillerato, Ciencias Sociales	Estadística paramétrica. Parámetros de una población y estadísticos obtenidos a partir de una muestra. Estimación puntual. Media y desviación típica de la media muestral y de la proporción muestral. Distribución de la media muestral en una población normal. Distribución de la media muestral y de la proporción muestral en el caso de muestras grandes. Estimación por intervalos de confianza. Relación entre confianza, error y tamaño muestral. Intervalo de confianza para la media poblacional de una distribución normal con desviación típica conocida. Intervalo de confianza para la media poblacional de una distribución de modelo desconocido y para la proporción en el caso de muestras grandes.

La gran dificultad que para los alumnos supone con frecuencia la comprensión de la inferencia se debe a que es necesario manejar simultáneamente tres tipos de distribuciones (cada una de ellas con su correspondiente dispersión):

- La distribución de probabilidad de la población, cuyos parámetros quedemos estimar o contrastar; por ejemplo la distribución normal N (μ, σ);
- La distribución de los datos de una muestra; con su media y deviación típica $\overline{x}$, S_x
- La *distribución muestral:* Cuando consideramos un resumen estadístico, por ejemplo, la media de una muestra, en todas las muestras del mismo tamaño que es posible extraer de la población dada, este estadístico es considerado como una variable aleatoria con una distribución de probabilidad. En el ejemplo, la media de una muestra de tamaño n de una población normal N (μ, σ) también sigue una distribución normal $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$.

Esta dificultad puede hoy día disminuirse con la ayuda de la simulación; por ejemplo, en la Figura 4 mostramos un simulador de la distribución de la media muestral disponible en: www.rossmanchance.com/applets/SampleMeans/SampleMeans.html.

En diferentes ventanas el simulador representa la distribución poblacional (izquierda-superior), la distribución de datos en la última muestra simulada (derecha-superior), la distribución muestral empírica de todas las medias que se van obteniendo en sucesivas muestras (izquierda – inferior) y la misma distribución muestral estandarizada, que se va aproximando a la distribución normal N (0,1) cuando se repite el proceso de muestreo.

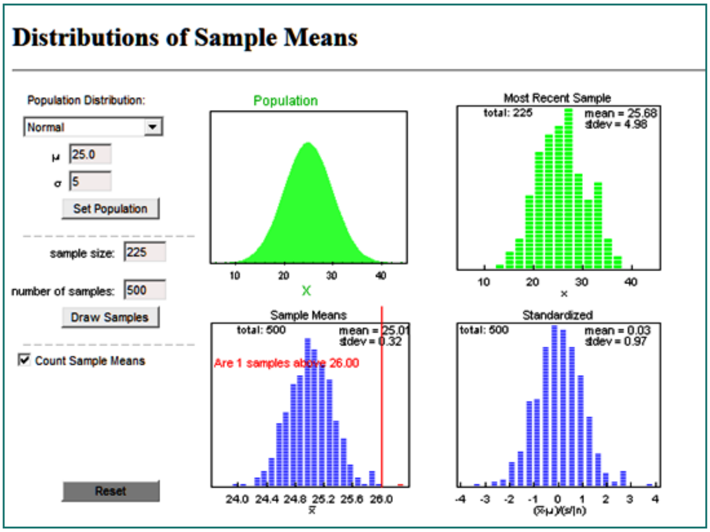

Figura 4. Simulación de la distribución de la media muestral (applet de la colección Rossman y Chance, http://www.rossmanchance.com/applets/).

SINTESIS DE SIGNIFICADOS DE LA DISPERSIÓN

A pesar de la brevedad de nuestro análisis, es posible observar cómo, cada nuevo capítulo de la estadística (estadística descriptiva univariante, bivariante, probabilidad e inferencia) da un papel relevante al concepto de dispersión en la resolución de problemas estadísticos. Cada uno de ellos introduce, además, nuevos objetos matemáticos, terminología o gráficos y procedimientos específicos relacionados con la dispersión.

Consecuentemente, de acuerdo a nuestro marco teórico, podemos diferenciar significados parciales de la dispersión, que denominaremos significado descriptivo univariante, descriptivo bivariante, probabilístico e inferencial. Cada uno de ellos viene definido por una configuración específica de objetos matemáticos, algunos de los cuáles se presentan en la Tabla 5.

Se trata de proposiciones o razonamientos que, en lugar de expresarse con certeza, incluyen afirmaciones de probabilidad. Un ejemplo es la desigualdad de Tchebycheff, que nos indica que para toda variable aleatoria ζ, con media μ y varianza σ^2 finitas, podemos acotar los valores que toma la variable alrededor de su media, tanto como queramos en el intervalo $(\mu - \varepsilon, \mu + \varepsilon)$ siendo $\varepsilon > 0$ todo lo pequeño que se desee. Ahora bien, esta acotación no es segura sino probable (con una alta probabilidad), como indica la desigualdad:

$$P\left(\xi - \mu \geq \varepsilon \right) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

Asimismo, en inferencia el rechazo y aceptación de una hipótesis no son simétricos; la confirmación de una teoría a partir de datos empíricos nunca es definitiva, porque los datos futuros podrían contradecirla. En cambio, si los datos del experimento se apartasen del patrón esperado, la teoría sería refutada (Batanero, 2000; Rivadulla, 1991).

Tabla 5. Significados diferenciados de la dispersión

	Descriptivo univariante	**Descriptivo bivariante**	**Probabilístico**	**Inferencial**
Situaciones problemas	Análisis de variabilidad producida en los datos.	Estudiar relación entre variables. Analizar la bondad de ajuste de un modelo.	Análisis de variabilidad probable en un modelo.	Precisión de una estimación. Riesgo de error en un contraste
Lenguaje	Gráficos estadísticos univariantes Símbolos: $\bar{x}$, S.	Gráficos estadísticos bivariantes Símbolos: r; S_{xy}	Representación gráfica de distribuciones. Tablas de distribuciones. Símbolos: σ, ξ, $N(\mu, \sigma)$	Representación de distribuciones muestrales. Símbolos: $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$
Conceptos	Resúmenes estadísticos descriptivos	Covarianza, Correlación, Coeficiente de determinación	Distribuciones de probabilidad Parámetro	Distribución muestral, estimación, intervalo de confianza, error tipo I y II
Propiedades	La suma de la distancia de datos a la media es cero. Las medidas de dispersión siempre son positivas	Partición de la varianza en parte explicada y no explicada por la regresión	Desigualdad de Tchebycheff	Insesgadez (de un estimador) Relación entre confianza, precisión y tamaño de la muestra
Procedimientos	Cálculo numérico de estadísticos	Mínimos cuadrados Otros modelos de ajuste	Cálculo de probabilidades Simulación	Muestreo Contraste de hipótesis Simulación
Argumentos	Similares a otras ramas de la matemática	Similares a otras ramas de la matemática	Incluyen expresiones de probabilidad	Incluyen expresiones de probabilidad. No simétricos (en el rechazo o aceptación de una hipótesis)

IMPLICACIONES DIDÁCTICAS

A lo largo de la escolaridad, cada uno de los capítulos analizados de la estadística se estudia en cursos diferentes y, por la falta de tiempo, no siempre se conectan entre sí. Sería importante para conseguir el aprendizaje significativo del alumno que los diversos significados mostrados de la dispersión se enlacen entre sí, para contribuir a la construcción de un significado global que abarca todos ellos. Así, al estudiar la estadística bivariante, es sencillo recordar el significado univariante de la dispersión, en el cálculo de las medidas para cada una de las distribuciones marginales; por ejemplo, al calcular las varianzas y desviaciones típicas que intervienen en las fórmulas del coeficiente de correlación y regresión. Sería también útil presentar analizar con los estudiantes las diversas formas de descomponer la dispersión total en el análisis bivariante.

Las variables aleatorias se suelen introducir como generalización de la idea de variable estadística, al considerar una variable en una población hipotética; es sencillo entonces concebir las medidas de posición central y dispersión de las variables aleatorias como generalización de las correspondientes al caso descriptivo.

Finalmente, en el estudio de la inferencia, como hemos indicado, los alumnos han de manejar a la vez las variables estadísticas y aleatorias, junto con sus distribuciones y las distribuciones muestrales. El uso de la simulación, como hemos sugerido, puede ayudarles a conectar los sentidos descriptivos, probabilísticos e inferenciales de la inferencia estadística.

Para finalizar, es importante que el profesor sea consciente del papel destacado de la dispersión en estadística. Puesto que, como indicó Moore (1990), la estadística es la ciencia de los datos y estos están caracterizados por la variabilidad, la habilidad para percibir, medir y explicar la dispersión de los datos y de los modelos que utilizamos para describirlos es la clave del razonamiento estadístico.

AGRADECIMIENTOS

Proyecto EDU2013-41141-P (MEC) y grupoFQM126 (Junta de Andalucía).

REFERENCIAS

Batanero, C. (2000). Controversies around significance tests. Mathematical Thinking and Learning, 2(1-2), 75-98.

Batanero, C. (2001). Didáctica de la estadística. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática.

Estepa, A. y del Pino, J. (2013). Elementos de interés en la investigación didáctica y enseñanza de la dispersión estadística. Números 83, 43-63.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM, The International Journal on Mathematics Education, 39(1-2), 127-135.

MECD (2014). Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria. Madrid: Autor.

MEC (2006). Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación primaria. Madrid: Autor.

MEC (2007a). Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. Madrid: Autor.

MEC (2007b). Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas. Madrid: Autor.

MECD (2015). Real Decreto 1105/2014 de currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. Madrid: Autor.

Moore, D. S. (1990). Uncertainty. En L. A. Steen (Ed.). On the shoulders of giants. new approaches to numeracy. Washinton, D. C.: National Academy Press.

Rivadulla, A. (1991). Probabilidad e inferencia científica. Barcelona: Anthropos.

Sánchez, E., Borim,, C. y Coutinho, C. (2011). Teachers' understanding of variation. En C. Catanero, G. Burrill, & C. Reading (Eds.), Teaching statistics in school mathematics-challenges for teaching and teacher education (pp. 211-221). New York: Springer.

Wild, C. J. y Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. International Statistical Review, 67(3), 223-263.