



## ESTRATEGIAS PARA RESOLVER PROBLEMAS

Silvia Salomone - Ana Mabel Juárez  
Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires – República Argentina  
[ssalomon@fio.unicen.edu.ar](mailto:ssalomon@fio.unicen.edu.ar) - [mjuarez@fio.unicen.edu.ar](mailto:mjuarez@fio.unicen.edu.ar)

**Nivel Educativo:** Medio - Terciario – Universitario

**Palabras Clave:** estrategias – resolución de problemas – procedimientos heurísticos

### Resumen

La resolución de problemas juega un papel fundamental en la enseñanza de la Matemática, en todos los niveles educativos. En el caso que nos ocupa, nivel universitario, se refleja en los perfiles profesionales, cuando se plantea la necesidad de formar un profesional con un nivel de desarrollo de las habilidades en la resolución de problemas que le permitan enfrentar con éxito las tareas y retos de su futura esfera profesional. Mediante la resolución de problemas, los estudiantes experimentan la potencia y utilidad de las Matemáticas en el mundo que les rodea. Para resolver problemas no existen fórmulas mágicas; no hay un conjunto de procedimientos o métodos que aplicándolos lleven necesariamente a la resolución del problema (aún en el caso de que tenga solución) pero sí se encuentran indicaciones generales, que ayudan, en alguna medida, a las personas que intentan resolverlos. Estas indicaciones están contenidas en los llamados elementos heurísticos.

Es por ello, que resulta de gran utilidad para los alumnos conocer técnicas y procedimientos, pero vistos en acción, como recursos básicos a través de los cuales es posible desarrollar esta importante capacidad para que se enfrenten con mayor seguridad y confianza a la hora de resolver problemas.

En consecuencia, hay que hacer cuantos esfuerzos sean necesarios para que la resolución de problemas sea el núcleo central de la enseñanza matemática.

En ese sentido, se propone en este trabajo la enseñanza de algunos procedimientos heurísticos como un aporte significativo para contribuir al desarrollo de tan importante habilidad.

### Introducción

Una de las tendencias actuales en educación matemática es poner mayor énfasis en el desarrollo de procesos de pensamientos más que en la mera transferencia de contenidos o de recetas adecuadas en cada materia.

De Guzmán (1993) afirma que, en este mundo tan rápidamente cambiante, vale mucho más acumular procesos de pensamiento útiles, que de contenidos. En esta dirección se encauzan los esfuerzos por transmitir estrategias heurísticas adecuadas para la resolución de problemas en general, interpretándolas como medio, modelo y fin del trabajo en el aula de matemática, como también, estimular la resolución autónoma de verdaderos problemas.

La matemática es, sobre todo, saber hacer, es una ciencia en la que el método claramente predomina sobre el contenido. Por ello se concede una gran importancia al estudio de las cuestiones referidas a los procesos mentales de resolución de problemas.

El proceso de resolución de problemas es muy complejo, teniendo en cuenta las distintas facetas que se debe recorrer hasta llegar a su solución, si existe, como también el conjunto de acciones y operaciones que se desarrollan desde el reconocimiento del mismo hasta la valoración de la respuesta encontrada.

Por otro lado, son muchas las dificultades que se observan en los alumnos cuando se enfrentan con los problemas, en muchos casos les parece una tragedia, experimentando grandes desilusiones.

Se considera, entonces, imprescindible brindarles a los alumnos estrategias de resolución de problemas que le permitan guiarlo en las distintas etapas por las que debe transitar.



## Fundamentación Teórica

Son muchos los textos que abordan la definición de un problema (Polya, 1969, Schoenfeld, 1991), pero todas conceptualmente parecidas. En todas ellas, se encuentran en común el hecho de que una situación solamente puede concebirse como un problema, en la medida en que no se disponga de procedimientos de tipo automático para solucionarla de forma inmediata, sino que requiere de un proceso de reflexión o toma de decisiones sobre los pasos a seguir.

El proceso de resolución de problemas es muy complejo, teniendo en cuenta las etapas que se debe transitar y las acciones a desarrollar desde el reconocimiento del mismo hasta la valoración de la respuesta encontrada.

En el campo de la resolución de problemas matemáticos es innegable la contribución de G. Polya. El modelo que propone coincide en sus rasgos más generales con otros más actuales. Según el clásico modelo de Polya, las cuatro fases a seguir en la actividad de resolución de problemas son: comprender el problema, concebir un plan, ejecución del plan y examinar la solución obtenida.

Si bien no existe una forma exacta de proceder, que lleve a la solución de cualquier tipo de problema matemático, sí se han elaborado indicaciones generales, que permiten guiar en alguna medida, a las personas que estén tratando de resolver un problema. Estas indicaciones están contenidas en lo que se suele llamar elementos heurísticos.

Entre sus principales componentes están los medios auxiliares heurísticos y los procedimientos heurísticos. Dentro de estos últimos se encuentran los principios heurísticos de analogía, inducción, reducción y generalización; las reglas heurísticas que representan impulsos en el proceso de búsqueda de solución y las estrategias heurísticas de trabajo hacia adelante o método sintético y de trabajo hacia atrás o método analítico.

La Psicología del Aprendizaje sostiene que los alumnos que se apropian de procedimientos que apoyan la realización consciente de actividades mentales exigentes, llegan a mejores resultados en el proceso de resolución de problemas. Estos procedimientos se basan en la heurística, y son llamados procedimientos heurísticos.

“Un procedimiento es un conjunto de acciones ordenadas, orientadas a la consecución de una meta” (DCB, pp. 41-42). Se pueden señalar los rasgos característicos de todo procedimiento:

- que se refieren a una actuación.
- que no es una actuación cualquiera, sino ordenada.
- que esta actuación se orienta hacia la consecución de una meta.

Es decir, lo que se propone al aprendizaje de los alumnos son conjuntos de actuaciones cuya realización permite llegar finalmente a determinadas metas. Esto es lo que se pretende, de un modo fundamental, con la inclusión de los procedimientos en el currículum. Trabajar los procedimientos significa, en definitiva, revelar la capacidad de saber hacer, de saber actuar de manera eficaz.

Entre los diferentes tipos de procedimientos se pueden mencionar los de componente motriz y los de componente cognitivo.

En cualquier actividad humana la acción externa (acción corporal observable en forma directa) y la acción interna; que no es tan evidente, se complementan y son como dos caras de una misma moneda. Esta clasificación se basa en la conocida distinción entre destrezas motrices y habilidades o estrategias cognitivas.

Son procedimientos del primer tipo los que se necesitan, por ejemplo, para el manejo correcto, fácil y preciso de instrumentos, objetos y aparatos.

Una atención muy especial merece aquellos procedimientos que implican un curso de acciones y decisiones de naturaleza interna que sirven de base a la realización de tareas intelectuales. El saber hacer consiste en saber operar con objetos y con información.



Es fundamental facilitar el acceso de los alumnos a estas habilidades cognitivas, puesto que se trata de unas herramientas muy potentes de la cultura humana mediante las cuales se accede a metas superiores.

Precisamente nos encontramos en un momento en que se está dedicando una atención particular por parte de los estudiosos a este tipo de procedimientos. Se habla ya con cierta profusión de las destrezas cognitivas, de las estrategias superiores de pensamiento, de aprender a pensar, de aprender a aprender, de habilidades metacognitivas, de estrategias de aprendizaje, etc.

Con el aprendizaje de los procedimientos, se trata de conocer las formas de actuar, de usar este conocimiento, así como de usar esas formas para conocer más cosas. Aprender procedimientos significa también ponerlos en práctica.

Sería insuficiente si una vez adquiridos los procedimientos (o durante el proceso de adquisición del conocimiento y de la aplicación), el alumno no fuera capaz de llegar a realizar mediante ellos nuevos aprendizajes.

En matemática, tenemos procedimientos dirigidos fundamentalmente a la resolución de problemas y se pueden clasificar en dos grandes tipos:

**Procedimientos algorítmicos:** contienen exactamente el total de pasos necesarios para llegar de forma correcta a la meta o solución. Los algoritmos especifican de forma muy precisa la secuencia de acciones y decisiones que debe respetarse para resolver un determinado problema. Si se realiza completamente y en el orden propuesto, seguro que se llega a la solución.

**Procedimientos heurísticos:** sólo orientan de manera general en la secuencia a respetar, y no dicen exacta o completamente cómo se ha de actuar. Su uso y aplicación no siempre hacen previsible un resultado concreto o una manera idéntica de obrar por parte de aquellos que los utilizan.

### Procedimientos heurísticos

La palabra heurística, aparece en más de una categoría gramatical. Cuando se encuentra como sustantivo, se identifica con el arte o la ciencia del descubrimiento. Cuando aparece como adjetivo, se refiere a cosas más concretas como estrategias heurísticas, reglas heurísticas o incluso silogismos y conclusiones heurísticas.

La instrucción heurística es la enseñanza consciente y planificada de reglas generales y especiales de la heurística para la solución de problemas, las cuales deben ser declaradas de un modo claro y firme, insistiéndose en clases posteriores, hasta que los alumnos las aprendan y las utilicen de forma independiente y generalizada, por lo que debe ejercitarse su uso en numerosas y variadas tareas.

Los elementos heurísticos se pueden clasificar en dos categorías: **procedimientos heurísticos y medios auxiliares heurísticos.**

Según H. Müller (1987) los procedimientos heurísticos son formas de trabajo y de pensamiento que apoyan la realización consciente de actividades mentales inteligentes. La introducción de estos procedimientos en la clase y su aplicación por parte de los alumnos propicia la asimilación de los conocimientos, su capacidad para resolver problemas para los cuales no existen procedimientos algorítmicos y el desarrollo del pensamiento creador.

Se pueden clasificar en principios, reglas y estrategias, los cuales pueden ser generales o especiales.

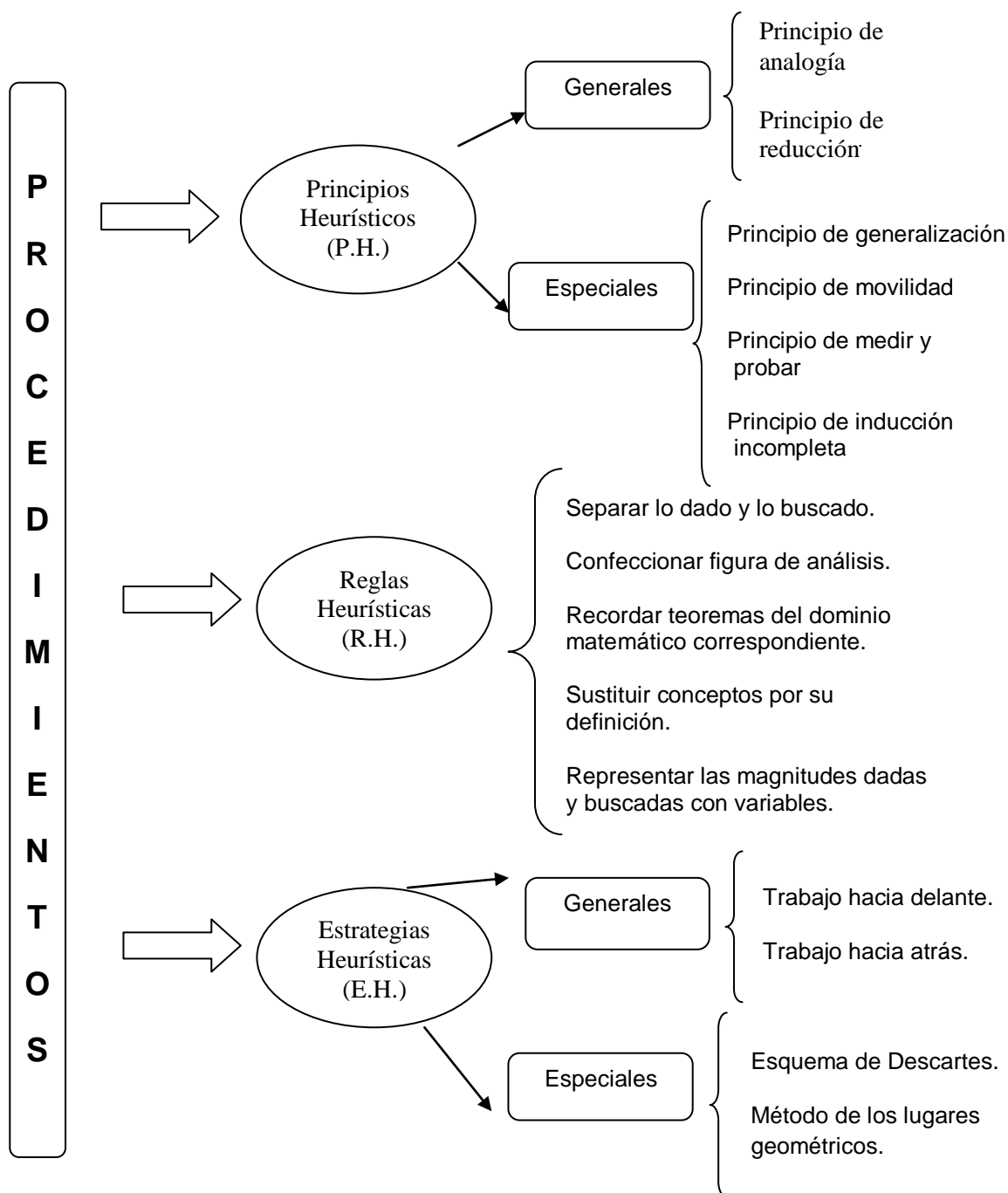
**Principios Heurísticos (PH):** Son de gran utilidad para la búsqueda de nuevos conocimientos y para su fundamentación, también sugieren ideas para la solución de diferentes problemas.

**Reglas Heurísticas (RH):** Tienen carácter de impulsos dentro del proceso de búsqueda de nuevos conocimientos y de la resolución de problemas. Aunque comparadas con los principios no ofrecen prácticamente ninguna sugerencia para encontrar la idea principal de solución, contienen en sí acciones y operaciones a realizar en la búsqueda de los medios matemáticos y de la vía para resolver un problema. Pueden darse como indicadores o preguntas.

**Estrategias Heurísticas (EH):** Se llaman también estrategias de búsqueda, pues constituyen el método para buscar los medios matemáticos concretos, que se necesitan para resolver un problema y para buscar la idea fundamental de solución.

**Medios Auxiliares Heurísticos (MH):** son herramientas que facilitan a la situación problemática o demostración como por ejemplo figuras informativas, tablas, compendios de diferentes estructuras, grafos de solución, etc.

En el siguiente esquema aparecen algunos de los procedimientos heurísticos.





Propuso además lo que se ha dado en llamar el programa heurístico general para la resolución de problemas, el cual consta de cuatro fases fundamentales que a su vez se desglosan en fases parciales:

**I. Fase de orientación:**

- Búsqueda del problema o motivación.
- Planteamiento del problema.
- Comprensión del problema.

**II. Fase de elaboración o de trabajo en el problema:**

- Análisis y precisión.
  - Búsqueda de la idea de solución.
1. Reflexión sobre los métodos.
  2. Elaboración de un plan de solución.

**III. Fase de realización:**

- Realización del plan de solución.
- Representación de la solución.

**IV. Fase de evaluación:**

- Comprobación de la solución.
- Determinación del número de las soluciones.
- Subordinación de la solución en el sistema existente.
- Memorización de la “ganancia” de información metodológica.
- Consideraciones perspectiva

A continuación, se muestra un problema resuelto mediante la aplicación de algunos procedimientos heurísticos. El problema planteado puede corresponder a un contenido de nivel medio, terciario ó universitario.

**Ejemplo de resolución de un problema aplicando algunas reglas y principios heurísticos**

Una firma de transporte posee tres tipos distintos de camiones A, B y C. Los camiones están equipados para el transporte de 2 clases de maquinaria pesada. El número de máquinas de cada clase que puede transportar cada camión está dado por:

	Camiones		
	A	B	C
Clase 1	2	1	1
Clase 2	0	1	2

La firma consigue una orden para 32 máquinas de la clase 1 y 10 máquinas de la clase 2. Encontrar el número de camiones de cada tipo que se requieren para cumplir la orden, asumiendo que, cada camión debe estar completamente cargado y el número exacto de máquinas pedidas es el que se debe despachar.

Si la operación de cada tipo de camión tiene el mismo costo para la firma, ¿cuál es la solución más económica?

**Fase de orientación**

Se inicia una conversación heurística entre el docente y el alumno.

*Leer atentamente el enunciado del problema más de una vez.*



Datos: El número de máquinas de cada clase que puede transportar cada tipo de camión dado por la tabla:

	Camiones		
	A	B	C
Clase 1	2	1	1
Clase 2	0	1	2

**R.H:**  
Separar lo  
dado y lo  
buscado

¿Qué se pide calcular?

- Encontrar el número de camiones de cada tipo que se requieren para cumplir la orden pedida.
- ¿Cuál es la solución más económica si la operación de cada tipo de camión tiene el mismo costo para la firma?

- a: número de camiones del tipo A  
b: número de camiones del tipo B  
c: número de camiones del tipo C

**R.H:**  
Representar  
las  
magnitudes  
dadas con  
variables

### Fase de elaboración

*Traducir el problema dado con texto o en lenguaje coloquial al lenguaje matemático*

La notación adecuada es un sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 2a + b + c = 32 \\ b + 2c = 10 \end{cases}$$

**R.H: Representar  
las relaciones  
contenidas en el  
texto del  
problema**

**P.H: Reducción  
de un problema  
a otro ya  
resuelto**

### Fase de realización

Se trata de un sistema de ecuaciones lineales y se lo puede analizar y resolver por el método de Gauss.

Otra posibilidad es analizar mediante el teorema de Rouchè-Forbenius y resolver por el método de la matriz inversa o aplicando la regla de Cramer.

**R.H: Recordar  
conceptos del  
dominio  
matemático  
correspondiente**

Escribiendo la matriz del sistema y aplicando el método de Gauss se obtiene:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 32 \\ 0 & 1 & 2 & 10 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 & 16 \\ 0 & 1 & 2 & 10 \end{bmatrix}$$

Se tienen 3 incógnitas y se obtienen 2 filas no nulas; por lo tanto se trata de un sistema compatible indeterminado.

El conjunto solución para el sistema planteado es:

$$S = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 / a = c/2 + 11 \wedge b = 10 - 2c\}$$

¿La solución de este sistema de ecuaciones, es la solución del problema planteado?

Como las incógnitas representan cantidad de camiones, entonces debe cumplirse:

- $c \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

- $$\begin{cases} c/2 + 11 \geq 0 \\ 10 - 2c \geq 0 \\ c \geq 0 \end{cases}, \text{ o bien: } \begin{cases} c \geq 0 \\ c \leq 5 \\ c \geq 0 \end{cases}$$

**R.H: Comparar lo que se tiene con lo que se busca**

Por lo tanto:  $c \in [0, 5]$

Los valores que puede tomar c son:

$$c = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

Se obtienen así las siguientes soluciones:

$$c = 0, (11, 10, 0)$$

$$c = 1, (23/2, 8, 1)$$

$$c = 2, (12, 6, 2)$$

$$c = 3, (25/2, 4, 3)$$

$$c = 4, (13, 2, 4)$$

$$c = 5, (27/2, 0, 5)$$

**R.H: Comprobar e interpretar la solución**

### Fase de evaluación

¿Cuál o cuáles de las soluciones anteriores satisfacen las condiciones del problema que cada camión debe estar completamente cargado y el número exacto de máquinas pedidas es el que se debe despachar?

Para responder a) se pueden indicar dos posibles soluciones, ya que las otras se descartan por tener fracciones o cero:

1°) 12 camiones del tipo A  
6 camiones del tipo B  
2 camiones del tipo C

2°) 13 camiones del tipo A  
2 camiones del tipo B  
4 camiones del tipo C



b) La solución más económica si la operación de cada tipo de camión tiene el mismo costo para la firma es la indicada como 2° pues se requiere menor cantidad de camiones; 19 en total mientras que para la posibilidad 1°, es necesario 20 camiones.

### Conclusiones

Esta propuesta de trabajo es sumamente enriquecedora ya que se puede aplicar en distintos contextos dada la flexibilidad que presentan los elementos heurísticos en su utilización.

La resolución de problemas es una capacidad que se desarrolla a través del proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática.

Los elementos heurísticos son de gran utilidad, como se dijo, ya que sirven de guían y brindan orientaciones y sugerencias generales para la búsqueda de soluciones a los problemas. Su importancia es mayor en la medida en que el problema a resolver sea más novedoso para el alumno que intenta resolverlo.

Pero debe tenerse en cuenta, que por mucho conocimiento que se tenga de los elementos heurísticos, no alcanza si no se tienen claros los conceptos matemáticos específicos relacionados con el contexto del problema. Es decir, no tiene sentido intentar usar elementos heurísticos para resolver problemas que requieran de la utilización de contenidos matemáticos que el alumno desconozca.

Por otro lado, no se puede pedir a los alumnos la utilización de los recursos heurísticos en la resolución de problemas si durante el proceso de enseñanza aprendizaje no fue entrenado en la utilización de esos recursos en situaciones más simples. Se debiera convertir todo el proceso de enseñanza en una Instrucción Heurística y así contribuir al desarrollo de un pensamiento creativo en los alumnos disminuyendo las dificultades observadas.

### Bibliografía

- Anchorena, S. (2004). *Teoría y diseño curricular*. Compilación de material para el Magister en la Enseñanza de la Matemática en el Nivel Superior. Mar del Plata.
- Coll, C., Pozo, J., Sarabia, B. & Valls, E. (1994). *Los contenidos de la Reforma. Enseñanza y aprendizaje de conceptos, procedimientos y actitudes*. Buenos Aires: Santillana.
- Müller, H. (1987). *Formas del trabajo heurístico en la enseñanza de la Matemática en la Enseñanza General Politécnica y Laboral*; Frank País García; Santiago de Cuba.
- Müller, H. (1987). *Formas del trabajo heurístico en la enseñanza de la Matemática en la Enseñanza General Politécnica y Laboral*; Santiago de Cuba: Frank País García.
- Pérez Pantaleón, G. (2003). *Procedimientos algorítmicos y heurísticos*. Compilación de material para el Magister en la Enseñanza de la Matemática en el Nivel Superior. Mar del Plata.
- Polya, G. (1994). *Como plantear y resolver problemas*. Madrid: Trillas.