Épsilon - *Revista de Educación Matemática* **2015, Vol. 32(2), nº 90, 39-48**

Una propuesta para iniciar el trabajo algebraico en la escuela primaria: el caso de los gogos

Fabiana Kiener
Universidad Nacional del Litoral

Resumen: *El trabajo algebraico escolar constituye una problemática de interés abordada desde distintas perspectivas teóricas. Cuestionamos su introducción habitual mediante la resolución de ecuaciones porque ocasiona una pérdida de sentido. Planteamos la necesidad de diseñar alternativas para iniciar a los estudiantes en este dominio de la matemática.*
En este artículo presentamos una propuesta de enseñanza destinada a alumnos de 11 a 12 años, en la que el lenguaje algebraico surge como herramienta necesaria para poder resolver la situación. Se promueve la generación de conjeturas y validaciones, el uso de diferentes registros de representación y la construcción del sentido del trabajo algebraico.
Palabras claves: *Álgebra temprana, dependencia, construcción del sentido, Educación matemática.*

An offer to initiate the algebraic work in the primary school: the case of the gogos

Abstract: *The algebraic school work constitutes a problematic of interest approached from different theoretical perspectives. We question its habitual introduction by means of the resolution of equations because it causes a loss of sense. We raise the need to design alternatives to initiate the students in this domain of the mathematics.*
In this article let's sense beforehand an offer of education destined for pupils of 11/12 years, in that the algebraic language arises as tool necessary to be able to solve the situation. There is promoted the generation of conjectures and validations, the use of different records of representation and the construction of the sense of the algebraic work.
Keyswords: *Early algebra, dependence, construction of the sense, Mathematics education.*

INTRODUCCIÓN

El trabajo algebraico en el nivel escolar constituye una problemática de gran interés que ha sido abordada desde distintas perspectivas y enfoques teóricos. Si bien los centros de atención difieren de un estudio a otro, uno de los factores comunes consiste en la preocupación por las múltiples dificultades que presentan los alumnos en relación con el álgebra (Barrio, Lalanne y Petich, 2010; Ramírez García y Rodríguez Marcos, 2011; Sessa, 2005; Socas et al, 1996) y la consiguiente necesidad de buscar alternativas para su enseñanza que prevengan los errores frecuentes y favorezcan la construcción del sentido. El conocimiento del álgebra resulta fundamental no sólo para manipular y comprender expresiones simbólicas, sino también, como lo sostiene Arcavi (2013), para desarrollar una actitud crítica hacia ellas, pudiendo determinar cuándo es apropiado utilizarlas y cuándo no lo es.

> Esto es especialmente importante en una era en la que abunda la información con sus diversos ropajes, muchos de ellos pseudocientíficos y apoyados en argumentos «matemáticos». Un aspecto central del alfabetismo algebraico consistiría pues en la capacidad de inspeccionar y cuestionar cualquier uso, mal uso o abuso de las expresiones algebraicas para sustentar conclusiones. (Arcavi, 2013, p. 14)

Desde el punto de vista matemático, Sessa (2005) sostiene que el álgebra constituye una oportunidad esencial para estudiar propiedades y relaciones entre los números, elaborar conjeturas, organizar y producir argumentos, por lo que ofrece una posibilidad para fomentar en los alumnos la justificación matemática de sus respuestas. Al mismo tiempo, su importancia radica en que "está presente en toda la matemática, pues cualquier problema termina convirtiéndose en un cálculo más o menos algebraico calquier problema termina convirtsiones literales sobre las que se realizan operaciones"" (Socas et al., 1996, p. 38) y su enseñanza se establece en los documentos oficiales a partir de los últimos años de la escuela primaria (Núcleos de Aprendizaje Prioritarios y Diseños Curriculares Jurisdiccionales de la Provincia de Santa Fe).

Respecto a las características de su tratamiento en nuestro país (Argentina), Sessa (2005) afirma que suele iniciarse mediante la resolución de ecuaciones. El tratamiento precoz de este concepto ocasiona serias dificultades en los alumnos, ya que no disponen de suficientes elementos como para explicitar diferencias entre las transformaciones efectuadas al resolverlas y muchas veces terminan memorizando "reglas prácticas" para su resolución, sin entender el sentido de lo que están haciendo (Sessa, 2005; Moreno y Castellanos, 1997). Entre las cuestiones que suelen estar ausentes en la escuela durante el abordaje de este tema, menciona la explicitación del dominio numérico sobre el que se está trabajando, la resolución de ecuaciones sin solución o con infinitas soluciones, *el principio de necesidad* (las ecuaciones aparecen como una complicación innecesaria), el estudio de distintos problemas que se resuelvan con la misma ecuación, o de un mismo problema que se pueda resolver con distintas ecuaciones (dependiendo de cómo se seleccionen las variables).

Para subsanar esta situación la autora propone diversas vías de entrada para el álgebra escolar. Una de estas vías consiste en la "construcción de la idea de dependencia entre dos magnitudes o cantidades y por la consideración de las letras para expresar esas cantidades variables." (Sessa, 2005; p. 71)

Carraher, Schliemann y Schwartz (2013) escogen dicha vía de entrada para desarrollar sus experiencias de "álgebra temprana" en la escuela primaria. Muestran cómo pueden abordarse las operaciones aritméticas como la suma y la multiplicación en los primeros años del nivel primario desde una mirada funcional (Schliemann, Carraher y Brizuela, 2011). Las propuestas didácticas se caracterizan por utilizar el soporte contextual en las situaciones problemáticas que se proponen a los alumnos, introducir de modo gradual la notación formal y articular con los demás temas del currículo.

Además de enriquecer el trabajo algebraico, la utilización de una vía funcional posibilita la articulación de diferentes lenguajes, lo cual constituye una de las recomendaciones de Socas et al. (1996) para favorecer la comprensión algebraica. Al mismo tiempo, se relaciona con la potente idea de Duval (2008) acerca de que el único modo de acceder a los objetos matemáticos es a través de las representaciones semióticas y que no sólo se debe pasar de un registro a otro que utilice la misma clase de signos (*tratamiento*) sino que se deben propiciar espacios para la *conversión* de un registro a otro, que utilice distintos tipos de signos.

CARACTERÍSTICAS DE LA PROPUESTA DE ENSEÑANZA

La propuesta de enseñanza se enmarca en una investigación que tiene por objeto estudiar la iniciación al trabajo algebraico en septimo grado de la escuela primaria desde una vía funcional.

Se pretende promover la construcción del sentido del álgebra escolar, atendiendo a los tres aspectos mencionados por Sadovsky (2005) como necesarios para repensar dicha construcción: la reflexión en torno al modo en que se concibe el conocimiento matemático con el fin de explicitar los asuntos que "constituyen bases esenciales para pensar la enseñanza", la revisión del papel que juegan las interacciones entre los pares en el proceso de producción de conocimientos y el modo en que "los contextos en los que se presentan los problemas matemáticos condicionan la matemática que se produce" (Sadovsky, 2005; p.19).

En relación con el primer punto, adoptamos la posición de Chevallard, Bosch y Gascón (2000) según la cual una buena reproducción por parte del alumno de la actividad matemática, exige que éste intervenga en la misma, que formule enunciados, pruebe proposiciones, construya modelos, lenguajes, conceptos y teorías, que los ponga a prueba e intercambie con otros, que pueda reconocer los que están conformes con la cultura matemática y que tome los que le son útiles para continuar con su actividad. Este tipo de actuación exige dejar de lado una tendencia clásica en la enseñanza de la matemática, según la cual recae sobre el profesor la responsabilidad de validar todas las afirmaciones y resultados que se trabajen. En las tareas propuestas se promueve el trabajo autónomo de los alumnos, propiciando espacios para la toma de decisiones y la justificación de las respuestas dadas, aprovechando las oportunidades que ofrece el trabajo algebraico para ello.

En cuanto al segundo punto mencionado por Sadovsky (2005), el papel de las interacciones en el aula, se tendrá en cuenta al momento de implementar la propuesta de enseñanza, pero excede los objetivos de este artículo.

Respecto al tercer aspecto, cabe destacar que al momento de diseñar la propuesta consideramos como punto de partida un problema aplicado en un aula de 3º grado por Carraher et al (2013) que tiene por objetivo iniciar a los alumnos en el lenguaje algebraico. Trabajamos cooperativamente con las maestras de los dos grados septimos en los que se iba a implementar la propuesta de enseñanza. Realizamos modificaciones sobre el enunciado y el contexto del problema inicial para adecuarlo al grupo de niños de 11 a 12 años considerado. En particular, atendiendo a la sugerencia de una de las docentes, modificamos "cajas de caramelos" por "cajas con gogos[1]", que resulta más significativo para este grupo de niños.

PROPUESTA DE ENSEÑANZA

La propuesta que presentamos fue diseñada para dos grados de septimo de una escuela primaria de la ciudad de Santa Fe (Argentina). Los alumnos de dichos cursos han trabajado previamente gráficos cartesianos. No han abordado nociones algebraicas durante su escolaridad.

Actividad 1: El problema de los gogos de Pablo y Juan

Figura 1. El problema de los gogos de Pablo y Juan,

El docente plantea oralmente la siguiente situación, sosteniendo en sus manos las dos cajas iguales que se muestran en la Figura 1.

"Vamos a suponer que estas cajas pertenecen a un tal Pablo y un tal Juan. Tienen gogos adentro. Yo voy a pasar las cajas por acá, no pueden abrirlas, las pueden tocar, hacerlas sonar y las van pasando. Pablo y Juan tienen la misma cantidad de gogos adentro de sus cajas. Venían coleccionando y llegaron a juntar la misma cantidad de gogos. La cuestión es que Pablo hoy en el recreo ganó tres gogos más. La pregunta es la siguiente: ¿Cuántos gogos tiene Pablo y cuántos gogos tiene Juan?"

Después de plantear la pregunta y explicar nuevamente la situación, si fuese necesario, se destina un tiempo para que los alumnos piensen su respuesta.

1. Los gogos son muñecos pequeños de plástico de diferentes colores que los niños utilizan para jugar. Se pueden observar tres de ellos en la Figura 1.

Luego, el docente escribe en el pizarrón las respuestas de los alumnos organizándolas en una tabla como la que sigue:

Número de gogos de Pablo	Número de gogos de Juan
10	13
3	6
7	13

A los alumnos que no especificaron una cantidad determinada, les pide que indiquen valores posibles, que realicen una predicción.

A continuación, añade una columna a la tabla para colocar el resultado de la diferencia entre el número de gogos de Pablo y Juan.

Número de gogos de Pablo	Número de gogos de Juan	Diferencia
10	13	3
3	6	3
7	13	6

En esta instancia, es probable que algunos alumnos identifiquen pares de valores que no son correctos. El docente promueve la discusión sobre estos casos para que los alumnos justifiquen sus respuestas. La idea es que puedan precisar que si bien en principio Pablo y Juan pueden tener cualquier número de gogos, una vez que se indica un valor para uno de ellos, el otro no puede tomar cualquier otro valor. De este modo, se habilita la aparición de la noción de dependencia entre estas dos variables.

El docente pregunta a los alumnos si hay alguna manera de escribir esta relación. Por ejemplo: "*Si en principio Pablo puede tener cualquier número de gogos,* ¿cómo lo podríamos indicar? (escucha las respuestas de los alumnos para ver si piensan en la posibilidad de utilizar una letra), *podríamos decir N gogos ¿les parece que lo podríamos indicar así?* (escribe N en la celda que corresponde al número de gogos de Pablo). *Entonces ¿cómo podríamos escribir el número de gogos de Juan?"* (invita a los alumnos a responder la pregunta y explicar sus respuestas)

Justificación de la actividad

Esta tarea se plantea con el objetivo de introducir el lenguaje simbólico para expresar de alguna manera lo que "se sabe" sobre el número de gogos de Pablo y Juan, teniendo en cuenta que lo único que se conoce es la relación entre las cantidades de gogos de cada uno y eso es lo que se termina expresando en símbolos.

Si bien el problema en principio parecería tener como fin la realización de predicciones numéricas específicas, la meta final es que los alumnos puedan identificar características generales a partir de los ejemplos particulares propuestos. De algún modo, se pretende identificar el término general de dos sucesiones de números naturales ("número de gogos de Pablo" y "número de gogos de Juan").

El hecho de acompañar el enunciado verbal con los elementos concretos (las dos cajas y los tres gogos) e inclusive promover la circulación de dichos objetos entre los alumnos (que posiblemente a partir de determinadas acciones con las cajas –hacerlas sonar, sopesarlas, etc.- intentarán realizar una predicción lo más ajustada posible a la realidad) tiene que ver con lo planteado anteriormente por los autores que fomentan el álgebra temprana (Carraher et al., 2013). Además, la decisión didáctica de considerar a los gogos para contextualizar el problema responde a la necesidad de proponer una tarea que comprometa a los alumnos por su cercanía con la situación planteada, entendiendo que el contexto influye en las posibilidades de construir el sentido de las nociones involucradas (Sadovsky, 2005).

Actividad 2: Lenguaje coloquial y simbólico sobre el número de gogos

Primera parte: Trabajo en parejas

Si le llamamos N al número de gogos de Pablo, completa los espacios en blanco de la siguiente tabla para expresar el número de gogos de otros compañeros de Pablo.

Compañero	Número de gogos en palabras	Número de gogos en símbolos
Franco	Tiene 2 gogos menos que Pablo	
Joaquín	Tiene la mitad de las gogos que tiene Pablo	
Andrés		5.N
Lautaro	Tiene dos gogos más que el triple de la cantidad de gogos de Pablo.*	
Nicolás		2.N-1

Segunda parte: Trabajo colectivo

Se realiza la puesta en común de la resolución de la actividad. El docente promueve el desarrollo de explicaciones y justificaciones por parte de los alumnos sobre sus propias respuestas y las de sus compañeros.

Justificación de la actividad

Esta actividad se plantea con el objetivo de reforzar la posibilidad de expresar una relación (número de gogos de diferentes niños) en símbolos. Para ello se propone la traducción entre el lenguaje coloquial y el simbólico. Este tipo *conversión* de un registro de representación a otro es uno de los aspectos mencionados como relevantes para acceder a los objetos matemáticos (Duval, 2008) y en particular, para favorecer la compresión de trabajo algebraico (Socas et al., 1996).

Por otro lado, la puesta en común de las resoluciones de la actividad puede ofrecer un espacio propicio para:

- el *tratamiento* de un mismo sistema de representación al observar dos o más formas de expresar lo mismo (escrituras equivalentes).
- revisar las propiedades de las operaciones en el conjunto de los números naturales al analizar la equivalencia entre diferentes escrituras como por ejemplo 3.N +2 y 2+3.N o entre 2.N -1 y 1 – 2.N.

De modo que esta tarea favorece el tratamiento y conversión de registros de representación (Duval, 2008) y la articulación con otros temas del currículo propuesto por Carraher et al. (2013) como uno de los aspectos a considerar al momento de abordar el álgebra temprana. Respecto al último punto cabe destacar que si bien los alumnos han trabajado previamente con las propiedades de las operaciones, nunca las han utilizado para justificar la equivalencia de escrituras algebraicas.

Actividad 3: El problema incompleto

Primera parte: Trabajo individual

Del problema siguiente se borró una parte:

Se sabe que Mateo tiene		gogos que tiene Pablo.

Un alumno que intentó resolverlo armó una tabla como la que sigue con los valores posibles para los gogos de Pablo y Mateo:

Número de gogos de Pablo	Número de gogos de Mateo
8	4
4	2
6	3
12	6

a) Completa el enunciado del problema.
b) ¿Cómo se podría indicar cuántos gogos tiene Mateo si Pablo tiene N gogos?

Justificación de la actividad

Esta tarea pretende generar la articulación entre diferentes registros de representación. Además, la resolución de la actividad supone la caracterización de la relación entre el número de gogos de Pablo y Mateo para deducir el término general de cada sucesión de números naturales, propiciando nuevamente la identificación de regularidades entre los pares de valores numéricos dados. También puede dar lugar a diferentes maneras de expresar lo mismo (tanto en forma coloquial como simbólica).

La propuesta de enseñanza continúa con tareas que involucran el registro gráfico, pero que, por cuestiones de extensión, omitimos en esta artículo.

CONSIDERACIONES FINALES

Las tareas presentadas en este artículo tienen como propósito iniciar a los alumnos en el álgebra de una manera alternativa al tratamiento habitual. El problema de los gogos plantea una situación en la que el lenguaje algebraico se utiliza para plasmar la relación que existe entre dos variables de una manera más eficaz que mediante el uso de números concretos que ejemplifiquen tal relación. Esto posibilita, por un lado, que los estudiantes perciban que la relación expresada en símbolos alcanza un nivel de generalidad tal, que incluye a las predicciones particulares que realizaron. Por otro lado, este tipo de situaciones promueven la construcción del sentido del lenguaje algebraico, ya que el mismo surge como herramienta *necesaria* para poder responder a las cuestiones planteadas (Sessa, 2005; Arcavi, 2013).

Entendemos que “el diseño curricular debe crear problemas para los cuales ninguna técnica preaprendida sea útil, y el alumno se vea obligado a movilizar su comprensión de los conceptos y los conecte con otro conceptos conocidos” (Arcavi, 1999, p. 44). Por tal motivo, en la propuesta de enseñanza se fomenta la estimación (al predecir el número de gogos en las cajas), el tratamiento y la conversión de registros de representación (Duval, 2008), la formulación de argumentos y explicaciones sobre las respuestas dadas (Sessa, 2005), la articulación con conocimientos previos (como las propiedades de las operaciones) y el uso del soporte contextual (Carraher et al, 2013) para iniciar el trabajo algebraico, en lugar de pretender una única respuesta mecánica.

El modo en el que se inicia el álgebra escolar cobra especial relevancia, teniendo en cuenta que exige una determinada postura y una serie de decisiones didácticas que determinarán qué aspectos se van a profundizar y cuáles serán dejados de lado o tratados superficialmente. La perspectiva adoptada influirá, por tanto, en la relación que los alumnos puedan establecer con el álgebra y el sentido que le otorguen a la misma. Consideramos, por este motivo, que resulta de interés plantear propuestas para iniciar el álgebra en la escuela, que promuevan no sólo la comprensión y uso de expresiones simbólicas, sino también, la producción de argumentos que justifiquen su utilización y el sentido que tiene la misma en el desarrollo de la matemática.

REFERENCIAS

Arcavi, A (2013). Reflexiones sobre el álgebra escolar y su enseñanza. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro*. Granada: Editorial Comares.

Arcavi, A. (1999) …Y en matemáticas, los que instruimos ¿qué construimos? *Números,* 38, 39-56. Recuperado el 12 de junio de 2015, de: http://www.sinewton.org/numeros/numeros/38/Articulo04.pdf

Barrio, E., Lalanne, L. y Petich A. (2010) *Entre aritmética y álgebra: un camino que atraviesa los niveles primario y secundario. Investigaciones y aportes.* Buenos Aires: Novedades Educativas.

Carraher, D., Schliemann, D. y Schwartz, J. (2013). ¿Álgebra en la escuela primaria? En C. Broitman (comp.), *Matemáticas en la escuela primaria (II). Saberes y conocimientos de niños y docentes,*121-167. Buenos Aires: Paidós.

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (2000). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje* (2da ed.). Barcelona: Horsori.

Duval, R. (2008) Eight problems for a semiotic approach in mathematics education. En L. Radford, G. Schubring y F. Seeger (Eds.) *Semiotics in Mathematics Education*. *Epistemology, History, Classroom and Culture*, 49-62. Rotterdam: Sense Publishers.

Moreno, I. y Castellanos L. (1997). Secuencia de enseñanza para solucionar ecuaciones de primer grado con una incógnita. *Revista EMA 2*(3), 247-258.

Ramírez García, M., Rodríguez Marcos P. (2011) Interpretaciones del signo igual. Un estudio de libros de texto. *Revista UNIÓN, 26*, 41-55.

Sadovsky, P. (2005). *Enseñar Matemática hoy. Miradas, sentidos y desafíos*. Buenos Aires: libros del Zorzal.

Schliemann, A., Carraher, D. y Brizuela, B. (2011). *El carácter algebraico de la aritmética. De las ideas de los niños a las actividades en el aula.* Buenos Aires: Paidós.

Sessa, C. (2005) *Iniciación al estudio didáctico del Álgebra. Orígenes y perspectivas*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Socas, M., Camacho, M., Palarea, M. y Hernández, J. (1996) Iniciación al álgebra. Matemáticas: cultura y aprendizaje. Madrid: Síntesis.