EL DESARROLLO DE UN ESQUEMA PARA CARACTERIZAR LA COMPETENCIA DOCENTE “MIRAR CON SENTIDO” EL PENSAMIENTO MATEMÁTICO DE LOS ESTUDIANTES

THE DEVELOPMENT OF A FRAMEWORK TO CHARACTERIZE THE PROFESSIONAL NOTICING OF CHILDREN’S MATHEMATICAL THINKING

Fernández, C., Valls, J., Llinares, S.

Departamento de Innovación y Formación Didáctica. Universidad de Alicante

Resumen. *La competencia docente del maestro “mirar con sentido” el pensamiento matemático de los estudiantes implica identificar los hechos relevantes e interpretarlos para dotarlos de significado y poder tomar decisiones de acción. Este estudio se centra en caracterizar la competencia “mirar con sentido” el pensamiento matemático de los estudiantes en el dominio específico del razonamiento proporcional. Los análisis realizados han permitido identificar y caracterizar cuatro niveles de desarrollo considerando la manera en la que los estudiantes para maestro identifican e interpretaban aspectos del razonamiento proporcional a partir de las respuestas de estudiantes a problemas proporcionales y no proporcionales.*

Palabras clave. Mirar con sentido, razonamiento proporcional, aprendizaje del estudiante para maestro, registros de la práctica.

Abstract. *Professional noticing of children’s mathematical thinking involves the identification of noteworthy events, the interpretation of them and deciding how to respond on the basis of these observations. The goal of this study is to characterize pre-service primary teachers’ professional noticing of children’s mathematical thinking in a particular context: the proportional reasoning. We have considered how pre-service primary teachers identified and interpreted relevant aspects of pupil’s proportional reasoning when they are analyzing pupils’ answers to proportional and non-proportional problems. This analysis has allowed us to identify and characterize four levels of the development of pre-service primary teachers’ professional noticing of children’s mathematical thinking.*

Key words. Professional noticing, proportional reasoning, pre-service primary teacher’s learning, classroom artifacts.

INTRODUCCIÓN

Las investigaciones sobre el desarrollo profesional del profesor de matemáticas subrayan la importancia que tiene para la enseñanza de las matemáticas la competencia docente denominada "mirar con sentido" *(professional noticing)* (Jacobs, Lamb y Phillipp, 2010; Mason, 2002; van Es y Sherin, 2002). Un foco particular de esta competencia es "mirar con sentido" el pensamiento matemático de los estudiantes que implica identificar los aspectos relevantes del pensamiento matemático de los estudiantes e interpretarlos para tomar decisiones de acción en la enseñanza de las matemáticas (Jacobs et al., 2010). La necesidad de caracterizar y comprender mejor el desarrollo de esta competencia está vinculada a que los profesores de matemáticas adopten sus decisiones de acción considerando la manera en la que los estudiantes parecen que están aprendiendo las matemáticas (Hiebert, Morris, Berk y Jansen, 2007). De esta manera, aprender a "mirar con sentido" el pensamiento matemático de los estudiantes resulta particularmente relevante para el desarrollo de una enseñanza de las matemáticas que se apoya en cómo los estudiantes aprenden.

Las investigaciones previas han indicado la relevancia que tiene lo que los profesores observan y también la manera en la que interpretan lo observado para determinar la calidad de la enseñanza de las matemáticas (Callejo, Valls y Llinares, 2010; Sherin, 2001). De ahí que se derive la necesidad de focalizar nuestra atención en cómo los estudiantes para maestro identifican e interpretan la comprensión de los estudiantes en dominios particulares de contenido matemático.

Uno de estos ámbitos específicos lo constituye la transición del pensamiento aditivo al pensamiento multiplicativo en el contexto del desarrollo del significado de la idea de razón en estudiantes de educación primaria (Fernández, 2009). Las estructuras multiplicativas tienen algunos aspectos en común con la estructura aditiva pero también tienen su propia especificidad que no es reducible a aspectos aditivos, como por ejemplo, la idea de razón como un índice comparativo. Además, un hecho que muestra las dificultades de los estudiantes de educación primaria en construir el significado de la idea de razón es la dificultad en diferenciar situaciones de estructura multiplicativa de situaciones con estructura aditiva como pone de manifiesto el uso de métodos aditivos erróneos para resolver situaciones proporcionales y, al mismo tiempo, el uso de métodos multiplicativos erróneos para resolver situaciones aditivas (Fernández y Llinares, 2010, 2011; Van Dooren, De Bock y Verschaffel, 2010). Por otra parte, las características de las actuaciones de los maestros en formación cuando resuelven problemas de proporcionalidad directa (Valverde y Castro, 2009) o plantean problemas de estructura multiplicativa (Castro y Castro, 1996) también ponen de manifiesto sus dificultades en comprender la relación entre las estructuras multiplicativas y aditivas. Esta situación constituye un contexto idóneo para estudiar lo que los estudiantes para maestro observan y cómo lo dotan de sentido como aspectos característicos del desarrollo de la competencia docente "mirar con sentido" el pensamiento matemático de los estudiantes.

Con estas referencias previas en este estudio nos centramos en caracterizar la competencia docente "mirar con sentido" el pensamiento matemático de los estudiantes en el ámbito específico del desarrollo del razonamiento proporcional en estudiantes para maestros. Las preguntas de investigación son:

- ¿Qué aspectos de la comprensión de los estudiantes de la relación entre situaciones aditivas y proporcionales identifican los estudiantes para maestro?

- ¿Cómo los estudiantes para maestro interpretan los aspectos del pensamiento matemático de los estudiantes?

Un resultado adicional de esta investigación lo constituye la caracterización de criterios y su organización mediante un esquema para describir la competencia docente “mirar con sentido” el pensamiento matemático de los estudiantes que se particulariza en al ámbito de la identificación e interpretación de los diferentes aspectos del razonamiento proporcional en la educación primaria.

MÉTODO

Participantes

Los participantes del estudio fueron 39 estudiantes para maestro (EPM) que estaban cursando el último semestre de su programa de formación. Estos EPM todavía no habían realizado las prácticas en las escuelas y consideramos que caracterizar su competencia para identificar e interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes era relevante para su aprendizaje durante las prácticas de enseñanza (Rodríguez, 2006).

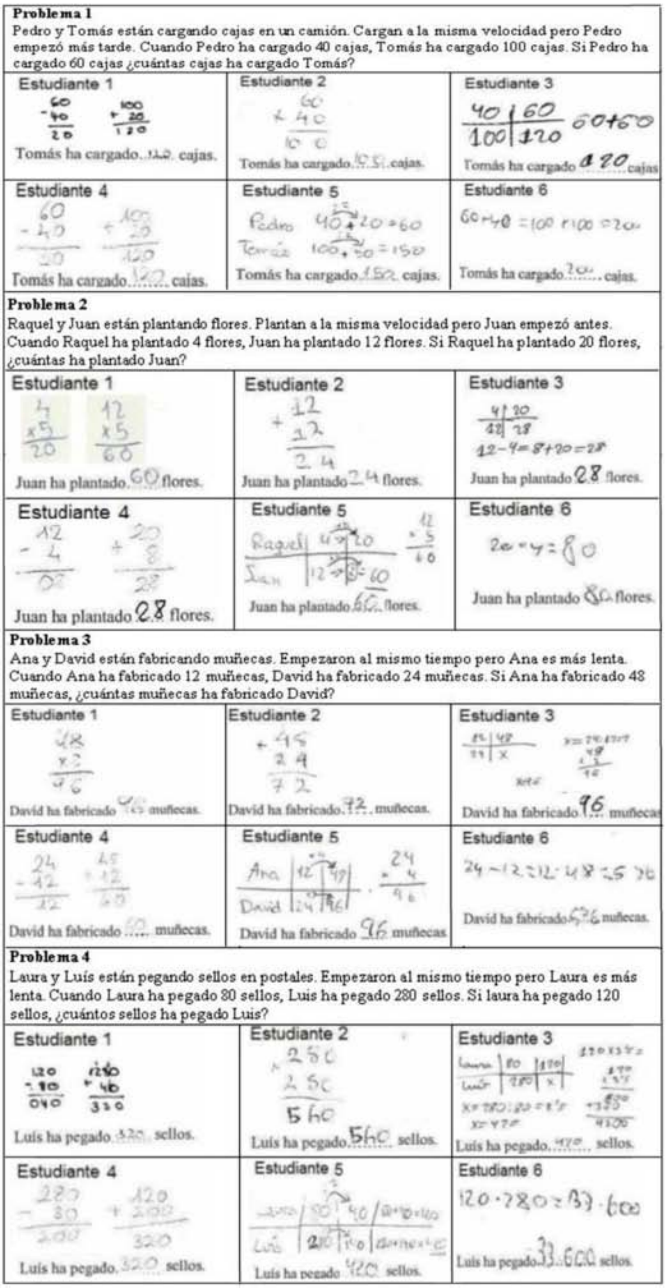
Instrumento

A partir de los resultados de las investigaciones previas sobre el razonamiento proporcional (Fernández y Llinares, 2011; Fernández, Llinares, Van Dooren, De Bock y Verschaffel, 2011) diseñamos un cuestionario formado por las respuestas de 6 estudiantes a 2 problemas proporcionales y 2 no proporcionales. Las dos situaciones proporcionales correspondían a la función $f(x) = ax$, y las dos situaciones no proporcionales a la función $f(x) = x + b$, con $b \neq 0$ (llamadas en esta investigación “situaciones aditivas”). En cada tipo de problema consideramos que las relaciones multiplicativas entre las cantidades fueran enteras o no enteras. Las respuestas de los 6 estudiantes a estos cuatro problemas fueron seleccionadas teniendo en cuenta los diferentes perfiles de comportamiento de los estudiantes de primaria y secundaria cuando resuelven problemas proporcionales y aditivos obtenidos en las investigaciones previas (Fernández y Llinares, 2010; Van Dooren et al. 2010). Estos perfiles son:

- Perfil aditivo. Estudiantes que utilizan relaciones aditivas entre las cantidades en todos los problemas proporcionales y no proporcionales.
- Perfil proporcional. Estudiantes que utilizan relaciones multiplicativas entre las cantidades en todos los problemas proporcionales y no proporcionales.
- Perfil donde influye el tipo de relación multiplicativa. Estudiantes que responden utilizando relaciones multiplicativas o aditivas en función de si la relación multiplicativa es entera o no entera.
- Perfil correcto. Estudiantes que utilizan correctamente las relaciones aditivas o multiplicativas en cada tipo de problema.

Para cada problema consideramos las respuestas de 6 estudiantes: 4 estudiantes cuyo comportamiento correspondía a uno de estos perfiles y las respuestas de 2 estudiantes que utilizaban procedimientos sin sentido. Estas últimas respuestas se incluyeron como distractores.

Además, para evitar que los resultados estuvieran afectados por variables específicas del cuestionario se varió el orden de los problemas y el orden en que aparecían las respuestas de los estudiantes generando 20 versiones diferentes. La Figura 1 muestra los 4 problemas y las respuestas consideradas.



Problema 1
Pedro y Tomás están cargando cajas en un camión. Cargan a la misma velocidad pero Pedro empezó más tarde. Cuando Pedro ha cargado 40 cajas, Tomás ha cargado 100 cajas. Si Pedro ha cargado 60 cajas ¿cuántas cajas ha cargado Tomás?

Estudiante 1 Tomás ha cargado 120 cajas.	Estudiante 2 Tomás ha cargado 105 cajas.	Estudiante 3 Tomás ha cargado 120 cajas
Estudiante 4 Tomás ha cargado 120 cajas.	Estudiante 5 Tomás ha cargado 150 cajas.	Estudiante 6 Tomás ha cargado 20 cajas.

Problema 2
Raquel y Juan están plantando flores. Plantan a la misma velocidad pero Juan empezó antes. Cuando Raquel ha plantado 4 flores, Juan ha plantado 12 flores. Si Raquel ha plantado 20 flores, ¿cuántas ha plantado Juan?

Estudiante 1 Juan ha plantado 60 flores.	Estudiante 2 Juan ha plantado 24 flores.	Estudiante 3 Juan ha plantado 28 flores.
Estudiante 4 Juan ha plantado 28 flores.	Estudiante 5 Juan ha plantado 60 flores.	Estudiante 6 Juan ha plantado 80 flores.

Problema 3
Ana y David están fabricando muñecas. Empezaron al mismo tiempo pero Ana es más lenta. Cuando Ana ha fabricado 12 muñecas, David ha fabricado 24 muñecas. Si Ana ha fabricado 48 muñecas, ¿cuántas muñecas ha fabricado David?

Estudiante 1 David ha fabricado 96 muñecas.	Estudiante 2 David ha fabricado 72 muñecas.	Estudiante 3 David ha fabricado 96 muñecas
Estudiante 4 David ha fabricado 60 muñecas.	Estudiante 5 David ha fabricado 96 muñecas	Estudiante 6 David ha fabricado 576 muñecas.

Problema 4
Laura y Luís están pegando sellos en postales. Empezaron al mismo tiempo pero Laura es más lenta. Cuando Laura ha pegado 80 sellos, Luis ha pegado 280 sellos. Si laura ha pegado 120 sellos, ¿cuántos sellos ha pegado Luis?

Estudiante 1 Luís ha pegado 320 sellos.	Estudiante 2 Luís ha pegado 560 sellos.	Estudiante 3 Luís ha pegado 420 sellos.
Estudiante 4 Luís ha pegado 320 sellos.	Estudiante 5 Luís ha pegado 420 sellos.	Estudiante 6 Luis ha pegado 33.600 sellos.

Figura 1. Problemas y respuestas de estudiantes utilizados en el cuestionario

Los EPM debían responder a las siguientes cuestiones que están relacionadas con los aspectos relevantes de la competencia docente “mirar con sentido” el pensamiento matemático de los estudiantes (Jacobs et al., 2010):

- Describe detalladamente la resolución del estudiante en cada uno de los problemas.
- Observando las respuestas dadas por cada estudiante a cada uno de los problemas, ¿es posible identificar alguna característica?
- Ante las respuestas dadas por cada estudiante a los problemas, como maestro de estos estudiantes, ¿qué harías ante tal comportamiento?

Las dos últimas cuestiones tenían como objetivo determinar en qué medida los EPM tenían una visión global de las respuestas dadas por un mismo estudiante a los cuatro problemas y ver si eran capaces de identificar los perfiles de comportamiento de los estudiantes.

Análisis

Utilizamos un procedimiento inductivo de generación de categorías en el que los resultados de los diferentes pasos fueron chequeados de manera independiente por tres investigadores, discutiéndose las discrepancias iniciales. A partir de un análisis preliminar de una muestra de respuestas, generamos un sistema inicial de categorías para hacer visible aspectos que podíamos considerar relevantes en la competencia docente “mirar con sentido” el pensamiento matemático de los estudiantes en el ámbito del razonamiento proporcional. Estas categorías iniciales fueron refinadas según avanzaba el análisis. Finalmente generamos descriptores en cuatro niveles que aplicamos a todas las respuestas:

Nivel 1. No discriminan.
Nivel 2. Discriminan y describen las operaciones sin justificar la diferencia entre las situaciones.
Nivel 3. Discriminan justificando las operaciones pero sin identificar los perfiles.
Nivel 4. Discriminan justificando, describen identificando el tipo de relación entre las cantidades e identifican los perfiles

En una primera etapa del análisis clasificamos a los EPM en dos grupos, separando los que eran capaces de discriminar las dos situaciones de los que no eran capaces. En una segunda etapa, y centrada solo en aquellos EPM que habían discriminado las situaciones, nos centramos en determinar si los EPM justificaban los procedimientos usados por los estudiantes a través de los elementos matemáticos que caracterizan las situaciones proporcionales y aditivas (Figura 2) (Freudenthal, 1983), y si eran capaces de identificar los perfiles de comportamiento de los estudiantes (esto último se analizó a través de las respuestas dadas por los EPM a las cuestiones 2 y 3 del cuestionario).

Situación proporcional $f(x) = ax,\ a \neq 0$	**Situación aditiva (no proporcional)** $f(x) = x + b,\ b \neq 0$
La función pasa por el origen *"Empiezan al mismo tiempo"*	La función no pasa por el origen *"Empiezan antes o después"*
El valor de la pendiente es distinto (cambia) *"es más rápido o más lento"*	El valor de la pendiente es constante *"la misma velocidad"*
Las razones externas son constantes y las razones internas son invariantes	La diferencia entre las cantidades permanece constante

Figura 2. Elementos matemáticos que caracterizan los problemas del cuestionario

Este procedimiento de análisis hizo emerger un esquema que permitió describir los rasgos característicos de la competencia "mirar con sentido" el pensamiento matemático de los estudiantes que estos EPM podían llegar a usar para dotar de sentido al aprendizaje de las matemáticas en el ámbito del desarrollo del razonamiento proporcional. En la próxima sección caracterizaremos y ejemplificaremos los niveles identificados.

RESULTADOS

De los 39 EPM, 3 no pudieron ser clasificados en ninguno de estos niveles pues dejaron el cuestionario en blanco o sus argumentos no tenían sentido.

Nivel 1. No discriminan (25 de 39 EPM)

En este nivel se encuentran los EPM que no discriminan las situaciones aditivas de las proporcionales. Los EPM que se encuentran en este nivel consideran

- que todos los problemas planteados son proporcionales y por tanto consideran solo correctas las respuestas dadas por los estudiantes en las que se usan relaciones multiplicativas

o bien

- que todos los problemas planteados son aditivos y por tanto consideran solo correctas las respuestas dadas por los estudiantes en las que usan relaciones aditivas.

Por ejemplo, ante la respuesta dada por el estudiante 5 al Problema 2 (no proporcional) (Figura 1), un EPM situado en este nivel argumentó: *"Es correcto. Ha averiguado por cuánto Raquel pasa de 4 a 20 y ha repetido el proceso con Juan"*. Este EPM identifica la relación multiplicativa entre las cantidades usada por el estudiante 5 para resolver el problema y la considera correcta aunque el problema no es proporcional. De la misma manera, ante la respuesta del estudiante 5 al Problema 3 (proporcional) este mismo EPM indicó *"Correcto. Averigua por cuánto hay que multiplicar para pasar de 12 a 48 y luego multiplica el 24 por este número para obtener el total"*, siendo en este caso una argumentación adecuada.

Otro EPM contestó en relación a la respuesta dada por el estudiante 4 al Problema 2 (no proporcional): *"Este estudiante ha seguido un procedimiento correcto obteniendo también el correspondiente resultado. Primeramente ha restado las 12 flores que plantó Juan con las que plantó Raquel y obtuvo un resultado de 8 flores que es la diferencia de flores que plantó uno y otro. Seguidamente, sabiendo la diferencia, ha sumado a esas 8 flores las 20 flores que plantó después Raquel para obtener las flores que Juan había* *plantado".* Sin embargo, al interpretar la respuesta del estudiante 4 al problema 3 (proporcional) de la siguiente forma: *"Es correcto. A las 24 muñecas de David le ha restado las 12 de Ana para comprobar la diferencia de muñecas que hay. Tras ello, a esa diferencia le ha sumado 48, que son las muñecas que ha fabricado después Ana"* puso de manifiesto que no discriminaba las situaciones aditivas de las proporcionales.

Nivel 2. Discriminan y describen las operaciones sin justificar la diferencia entre las situaciones (2 de 39 EPM)

En este nivel están situados los EPM que discriminan las situaciones proporcionales y no proporcionales lo que les permite evaluar correctamente las estrategias usadas por los estudiantes en estas situaciones. Estos EPM describen las operaciones que realizan los estudiantes pero no justifican dichas operaciones en relación con los elementos característicos de cada situación. Por ejemplo, ante la respuesta del estudiante 1 al Problema 1 (Figura 1) un EPM indicó: *"Correcto. Determina cuántas cajas han cargado los dos. Es decir, 60 cajas de Pedro menos 40 ya cargadas son 20. 20 son las que ha cargado Tomás también, 100+20=120".* Este EPM solo describe las operaciones que aparecen en la respuesta del estudiante pero no indica por qué esas operaciones son adecuadas atendiendo a las características de la situación.

Nivel 3. Discriminan justificando las operaciones pero sin identificar los perfiles (6 de 39 EPM)

En este nivel situamos a los EPM que son capaces de discriminar las dos situaciones y de evaluar correctamente las respuestas dadas por los estudiantes en cada una de ellas. También son capaces de describir las operaciones realizadas justificándolas desde alguna característica de la situación.

Por ejemplo, ante la respuesta del estudiante 1 al Problema 1 (Figura 1) un EPM indicó: "*Respuesta correcta. Este estudiante ha restado las cajas que ha cargado Pedro antes y después y ha visto que son 20 cajas. Como el problema dice que los dos cargan a la misma velocidad pero que ha comenzado antes, si ha cargado 20 cajas el otro también. Luego sólo hace falta sumar 20 cajas a Tomás".* Este EPM justifica las operaciones realizadas por el estudiante mencionando la característica de la situación aditiva "cargan a la misma velocidad pero ha comenzado antes".

No obstante, los EPM en este nivel no identifican todos los perfiles al no relacionar globalmente el comportamiento de un estudiante en los cuatro problemas. El EPM anterior identificó el comportamiento global del estudiante 3 (perfil correcto): *"ha resuelto todos los problemas correctamente",* pero no fue capaz de identificar el comportamiento global del estudiante 4 (perfil aditivo) "*los problemas 1 y 3 que eran del mismo tipo no ha sabido responderlos correctamente. Los problemas 2 y 4 que eran de otro tipo si los ha resuelto",* ni del estudiante 5 (perfil proporcional) "*los problemas 1 y 3 que eran del mismo tipo no ha sabido responderlos correctamente. Los problemas 2 y 4 que eran de otro tipo si los ha resuelto".* Este dato indica que el reconocimiento por parte de los EPM de los diferentes perfiles no es un asunto de todo o nada sino que parece ser más fácil de identificar el perfil correcto que los perfiles que muestran rasgos peculiares en la resolución de los problemas por parte de los estudiantes (perfil aditivo y proporcional).

Nivel 4. Discriminan justificando, describen identificando el tipo de relación entre las cantidades e identifican los perfiles (3 de 39 EPM)

En este nivel los EPM evalúan correctamente las situaciones aditivas y proporcionales y justifican sus decisiones desde las características de cada situación (van a la misma velocidad, van más rápido o más lento, empiezan al mismo tiempo o empezó más tarde o empezó antes). También son capaces de identificar los perfiles de comportamiento de los estudiantes a través de las respuestas dadas por éstos a los cuatro problemas planteados.

Por ejemplo, ante la respuesta del estudiante 1 al Problema 1 (Figura 1) un EPM argumentó: *"El procedimiento utilizado ha sido ver la diferencia entre las dos cantidades que se conocen de Pedro y sumarla a la cantidad de Tomás. El procedimiento es correcto ya que si van a la misma velocidad la diferencia de cajas debe ser la misma".*

Este EPM fue capaz de identificar los perfiles planteados en el cuestionario observando todas las respuestas dadas por los estudiantes a los 4 problemas. Así ante las 4 respuestas dadas por el estudiante 3 a los 4 problemas (perfil correcto) argumentó "*conoce los procedimientos a utilizar y los aplica correctamente en los dos tipos de problemas"*, ante las respuestas del estudiante 4 (perfil aditivo) "s*ólo sabe hacer los problemas en los que la velocidad es la misma y no se empieza a la vez. Aplica a los dos tipos de problemas el mismo procedimiento"* y ante las respuestas del estudiante 5 (perfil proporcional) "*Este estudiante sólo sabe hacer los problemas en que la velocidad es distinta y siempre aplica el mismo procedimiento sea cual sea el enunciado".*

CONCLUSIÓN

Los resultados de este estudio muestran la dificultad que tienen los EPM para identificar los aspectos relevantes del pensamiento matemático de los estudiantes sobre la relación entre la estructura aditiva y multiplicativa. Esta dificultad fue debida a que una mayoría de ellos no diferenciaron las situaciones proporcionales de las no proporcionales (25 de 39). Por otra parte, aunque algunos EPM pudieron reconocer la diferencia entre las dos situaciones propuestas y evaluar la corrección de las respuestas dadas describiendo las operaciones que habían sido realizadas tenían cierta dificultad en justificar por qué dichas operaciones eran correctas. Además, tenían dificultades en interpretar de manera conjunta las estrategias usadas por un estudiante ante los problemas proporcionales y no-proporcionales planteados. La dificultad de los EPM de ir más allá de relacionar la estrategia usada en un problema a considerar conjuntamente las estrategias usadas por un estudiante a los cuatro problemas viene determinado por lo que implica relacionar diferentes ítems de conocimiento (estrategias con características de los problemas) desde la perspectiva de obtener información para interpretar el aprendizaje matemático de los estudiantes que están resolviendo los problemas. Este resultado muestra la complejidad del conocimiento que debe usar un EPM para identificar e interpretar la manera en la que los estudiantes resuelven los problemas.

Un segundo resultado relevante que aporta este estudio es la caracterización de un esquema para dar cuenta del desarrollo de la competencia docente "mirar con sentido" el pensamiento matemático de los estudiantes. Este esquema está formado por cuatro niveles que permiten identificar indicadores de calidad del desarrollo de esta competencia docente. El paso del nivel 1 al 2 viene determinado cuando los EPM son capaces de analizar las características de los problemas y así diferenciarlos, el paso del 2 al 3 porque los EPM son capaces de relacionar las estrategias de los estudiantes con las características de los problemas para justificar si el procedimiento es correcto. Finalmente, el paso del 3 al 4 viene determinado cuando los EPM son capaces de ver el comportamiento global del estudiante ante un determinado tipo de problemas. Los indicadores de esta naturaleza aportan medios para describir y comprender el desarrollo de esta competencia docente y por tanto el aprendizaje de los EPM.

Además, estos resultados aportan información para el diseño de materiales en los programas de formación de maestros que tengan en cuenta las características del aprendizaje de los EPM. En este sentido, el instrumento diseñado en esta investigación puede ser adaptado como material docente para crear entornos de aprendizaje en los programas de formación que tengan como objetivo el desarrollo en los EPM de las destrezas de identificar e interpretar las producciones matemáticas de los estudiantes. Esta situación puede definir nuevas cuestiones de investigación relativas al aprendizaje de los estudiantes para maestro.

Reconocimientos. Este trabajo ha recibido el apoyo del proyecto del Plan Nacional de Investigación I+D+i, del Ministerio de Educación y Ciencia, nº EDU2008-04583, y del proyecto emergente de la UA, nº GRE10-10.

Referencias

Callejo, M.L., Valls, J. y Llinares, S. (2010). Aprender a mirar con sentido situaciones de enseñanza de las matemáticas. En M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T. Sierra (eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicación a los grupos de investigación. Seminario conocimiento profesional del profesor. XIV simposio de la SEIEM.* Lérida.

Castro, E. y Castro, E. (1996). Conocimiento de contenido pedagógico de los estudiantes de magisterio sobre la estructura multiplicativa. En J. Giménez, S. Llinares, y V. Sánchez (eds.), *El Proceso de llegar a ser un profesor de primaria. Cuestiones desde la educación matemática* (pp.119-141). Comares: Granada

Fernández, A. (2009). Razón *y Proporción. Un estudio en la Escuela Primaria*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universitat de Valencia, España.

Fernández C. y Llinares, S. (2010). Evolución de los perfiles de los estudiantes de Primaria y Secundaria cuando resuelven problemas lineales. En M.M. Moreno, a. Estrada, J. Carrillo y T.A. Sierra (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 281-290). Lleida: SEIEM.

Fernández, C. y Llinares, S. (2011). De la estructura aditiva a la multiplicativa: Efecto de dos variables en el desarrollo del razonamiento proporcional. *Infancia & Aprendizaje, 34*(1), 67-80.

Fernández, C., Llinares, S., Van Dooren, W., De Bock, D. y Verschaffel, L. (2011). Effect of number structure and nature of quantities on secondary school students' proportional reasoning. *Studia psychologica*, *53*(1), 69-81.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.* Dordrecht: D. Reidel Publishing Co.

Hiebert, J., Morris, A.K., Berk, D. y Jansen, A. (2007). Preparing teachers to learn from teaching*. Journal of Teacher Education, 58*, 47-61.

Jacobs, V.R., Lamb, L.C. y Philipp, R. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(2), 169-202.

Mason, J. (2002). *Researching your own practice. The discipline of noticing*. Londres: Routhledge Falmer.

Rodríguez, R. (2006). Interpretación de un proceso de prácticas. Relato de una experiencia de una alumna en prácticas. En M.C. Penalva, I. Escudero, y D. Barba (eds.), *Conocimiento, entornos de aprendizaje y tutorización para la formación del profesorado de matemáticas. Construyendo comunidades de práctica* (pp.70-88).Grupo Proyecto Sur: Granada.

Sherin, M.G. (2001). Developing a professional vision of classroom events. En T.

Wood, B.S. Nelson y J. Warfield (eds.), *Beyond classical pedagogy: Teaching elementary school mathematics* (pp. 75-93). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Valverde, A.G. y Castro, E. (2009). Actuaciones de maestros en formación en la resolución de problemas de proporcionalidad directa. En M.J. González, M.T. González y J. Murillo (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 523-532). Santander: SEIEM.

Van Dooren, W., De Bock, D. y Verschaffel, L. (2010). From addition to multiplication… and back. The development of students' additive and multiplicative reasoning skills. *Cognition and Instruction*, *28*(3), 360-381.

van Es, E. y Sherin, M.G. (2002). Learning to notice: scaffolding new teachers' interpretations of classroom interactions. *Journal of Technology and Teacher Education, 10*, 571-596.