SIGNIFICADOS DE LOS NÚMEROS NEGATIVOS FRACCIONARIOS EN ESTUDIANTES DE SECUNDARIA.

MEANINGS OF NEGATIVE FRACTION NUMBERS IN HIGH SCHOOL STUDENTS

Gallardo, A., Saavedra, G.

Cinvestav, Mexico

Resumen. *Esta investigación aporta elementos teóricos al estudio de las fracciones negativas, problemática poco abordada a nivel secundaria. Los resultados obtenidos apuntan a la necesidad de que los estudiantes dominen el significado de fracción positiva para poder dotar de sentido a la fracción negativa en problemas no rutinarios. El significado más frecuente de la fracción positiva encontrado en los alumnos, es el de "medida", perteneciente al mecanismo constructivo de partición, éste permite concebir la fracción negativa, al igual que los significados de "operador" y "cociente".*

Palabras clave: Fracción negativa, significado, sentido, enseñanza.

Abstract. *This research provides theoretical elements to the study of negative fractions. The present topic has been poorly tackled at secondary school. The results point to the need for students to master the different meanings of positive fractions in order to make sense of negative fractions in non-routine problems. The most common meaning of positive fractions found in students' work is as "measure", belonging to the constructive mechanism of partition, it allows us to conceive the negative fraction, as well as the meanings of "operator" and "ratio".*

Key words: Negative fraction, meaning, sense, teaching.

PERSPECTIVA TEÓRICA

En México, la Educación Básica culmina con la Secundaria normada por el Plan y Programa de Estudio (SEP, 2006). Se ha realizado una revisión curricular de la asignatura de matemáticas y las fracciones negativas solamente son consideradas como cocientes de números con signo, en la ecuación de la recta cuando ésta presenta una pendiente fraccionaria negativa y como soluciones de ecuaciones de primero o segundo grado. Su aparición es siempre de manera súbita, es decir, sin darle mayor importancia al surgimiento de la negatividad que conduciría a reflexionar sobre su tratamiento.

Cabe señalar que en el programa de estudio, aparece la siguiente nota:

…"Además de los enteros, otros números con signo que deberán utilizarse en este grado son las fracciones y los decimales. La recta numérica es un recurso útil para dar sentido a estos números, y deberá emplearse como apoyo en la elaboración y justificación de procedimientos para compararlos y ordenarlos. Los problemas que se planteen supondrán el conocimiento de las convenciones: la posición del cero, la unidad de medida y el orden. Por ejemplo, se puede pedir a los alumnos que ubiquen en la recta numérica el —1 y $\frac{3}{4}$, a partir de la posición de otros números que se les proporcionen, digamos 1 y $\frac{3}{2}$. Se sugiere además introducir las nociones de números opuestos y valor absoluto".

Secretaría de Educación Pública, 2006.
Programa de Estudio 2006 Matemáticas, pp. 51.

Esta situación curricular nos condujo a indagar sobre las posibilidades de incidir desde la investigación, sobre el hecho de la existencia ineludible de los números fraccionarios negativos y su repercusión en la mayor parte de los contenidos de matemáticas y de ciencias de la enseñanza elemental.

La interrogante que nos hemos propuesto responder ha sido:

¿Qué significados de las fracciones positivas deben poseer los estudiantes que les permitan dotar a su vez, de significado y sentido a las fracciones negativas?

En este artículo presentamos el punto de partida de nuestra investigación en curso que continua en el tiempo presente con un análisis histórico-epistemológico sobre el surgimiento y desarrollo del concepto de razón de cambio en textos matemáticos del pasado. El análisis aportará elementos teóricos para un estudio posterior con alumnos actuales. La confrontación de ambos ámbitos, el histórico y el didáctico, nos permitirá elaborar una propuesta de enseñanza sobre el tema. Este tipo de confrontación histórico – epistemológica – didáctica, ya ha sido abordado para el caso de problemas multiplicativos que involucran división de fracciones en distintos contextos (Contreras, M. y Gómez, B. 2009).

Ahora bien, para responder a nuestra primera interrogante acudimos al análisis de las nociones previas al concepto formal de número racional, fundamentadas por tres autores:

Freudenthal (1983), establece criterios que lo llevan a preferir llamar fracciones a los números racionales, dadas las implicaciones en la organización didáctica de estos números. Sostiene que constituyen el recurso organizador del número racional. Afirma que la palabra fracción está relacionada con romper: fracturar, mientras que racional está relacionado con razón desde el punto de vista de proporción.

Uno de los fenómenos en los que Freudenthal hace hincapié, es en la polifacética sobrevivencia de las fracciones a nivel del lenguaje cotidiano; las fracciones aparecen en el ámbito lingüístico apelando a presentaciones más o menos directas.

Kieren (1983) afirma que la expresión $\frac{p}{q}$ (p, q números naturales) abarca cinco significados diferentes o subconstructos: cociente, medida, razón, operador multiplicativo y relación parte todo, aludiendo al conocimiento intuitivo de la fracción interpretado por los estudiantes.

Reconoce la fracción asociada al significado de cociente, en marcos donde se desarrollan situaciones concretas de reparto que están referidas a conjuntos discretos. Cuando la fracción permanece asociada a la medición, el soporte fundamental es la noción de magnitud, el contenido semántico es el de medida. Una razón es una comparación numérica entre dos cantidades. La fracción cumple con su función de contractor o dilatador a través del constructo de operador, cuando queda vinculada a la manipulación de un conjunto sobre otro. Este autor define la relación parte-todo como un todo dividido en partes iguales, usando a la fracción para cuantificar la relación entre el todo y un número dado de partes. Este significado se relaciona con los otros cuatro subconstructos, identificando una unidad apropiada a cada circunstancia.

Kieren considera la unidad como el elemento básico de conteo en los naturales; mientras que en las fracciones determina dos papeles muy diferenciados: por una parte, es la unidad divisible que constituye el elemento esencial para la comparación de números; y por otra parte, es la base conceptual para la formación del inverso de la multiplicación y sirve como elemento unidad u operador unidad. Afirma además, que el número racional está orientado en una doble dirección: la de proporcionar un mejor conocimiento de los diferentes sistemas de representación de fracciones y la de fortalecer las relaciones entre las notaciones fraccionaria y decimal.

Cabe señalar una investigación sobre el análisis de libros de texto donde también se evidencian carencias respecto a los distintos significados de las fracciones identificados por Kieren. (Quispe, W., Gallardo, J., 2009).

Por último, recurrimos a Gallardo (1994), que realizó una investigación histórica evidenciando una larga trayectoria de “evitamiento y reconocimiento” de los números negativos surgidos en problemas matemáticos. El análisis de textos históricos comenzó en la Antigüedad (250 a. C.) y concluyó en la segunda mitad del siglo XIX, cuando la controversia sobre la negatividad se resolvió de manera definitiva en el ámbito de las matemáticas.

Esta investigación histórica exhibió que los términos sustractivos, las leyes de los signos, así como la operatividad básica con números negativos, apareció desde épocas remotas. Los conceptos opuestos de ganancia y pérdida, propiedad y deuda, venta y compra, constituyeron interpretaciones posibles para los positivos y los negativos, sin embargo, la aceptación de las soluciones negativas de ecuaciones que modelaban problemas en contextos varios, surgió hasta el siglo XV.

Gallardo (2002), describe un problema debido a Chuquet (1484) que retomamos más adelante en la etapa empírica inicial de nuestro estudio. En el apéndice de su obra: *Triparty en la Science des Nombres*, Chuquet planteó el siguiente enunciado:

> *Un comerciante compró 15 piezas de ropa por la suma de 160 escudos. Algunas las pagó a 11 escudos cada una y las restantes a 13 escudos la pieza. Determinar cuántas prendas compró de cada clase.*

Este autor utilizó un lenguaje sincopado avanzado muy similar al algebraico actual.

En terminología moderna el problema se plantea mediante el sistema de ecuaciones:

$$x_1 + x_2 = 15$$

$$11x_1 + 13x_2 = 160$$

Obtiene las soluciones: $x_1 = 17\frac{1}{2}$ $x_2 = -2\frac{1}{2}$

Después de verificar los valores en las ecuaciones, Chuquet observa que estos problemas son imposibles. Propone la interpretación siguiente:

El comerciante compró $17\frac{1}{2}$ piezas a 11 escudos cada una con dinero en efectivo, pagando $192\frac{1}{2}$ escudos. También adquirió $2\frac{1}{2}$ piezas a 13 escudos cada una para pagar a crédito la cantidad de $32\frac{1}{2}$ escudos. De esta manera contrajo una deuda de $32\frac{1}{2}$ que, al restarla de $192\frac{1}{2}$ se obtiene 160. Siguiendo el mismo razonamiento, Chuquet considera que las $2\frac{1}{2}$ piezas adquiridas a crédito deben sustraerse de las $17\frac{1}{2}$ piezas compradas y el comerciante tiene únicamente 15 piezas que realmente son de él (Appendice, núm. XXXV, pp. 424/fol. 156^{v}-157^{r}).

Chuquet consideró necesaria una interpretación adicional de los valores encontrados porque en su época no se aceptaban las soluciones negativas en problemas de enunciado verbal.

EL ESTUDIO EMPÍRICO INICIAL.

Se ha recurrido a una investigación de corte cualitativo. El Estudio se realiza en una Telesecundaria del Estado de Morelos, México (Saavedra, G., 2011)

A 40 sujetos de 13 y 14 años del tercer grado de secundaria se les aplicó un cuestionario exploratorio con la intención de conocer el pasado académico de los sujetos, relativo al tema de fracciones. A partir de los resultados del cuestionario se seleccionaron a dos estudiantes de alto desempeño para entrevista individual videograbada.

En esta etapa inicial del Estudio el objetivo general pretendió avanzar en el análisis de las estrategias que los estudiantes usan para resolver tareas que involucran números fraccionarios positivos y negativos. Específicamente indagar si los alumnos poseían los significados de la fracción identificados por Kieren (sobre el conocimiento personal de los números fraccionarios, sus procesos intiutivos y formales) y averiguar, bajo qué circunstancias emergen las fracciones negativas en situaciones cotidianas, que vuelven necesaria su inclusión en los Planes y Programas de Educación Secundaria. Con esto en mente, los ejercicios presentados a los estudiantes fueron categorizados respecto a:

1. Contenido temático: operatividad en la recta numérica, problemas de enunciado verbal, resolución de ecuaciones y de sistemas de ecuaciones

2. Predominio en el uso del lenguaje natural, lenguaje geométrico, lenguaje aritmético o lenguaje algebraico durante el proceso de resolución de las tareas planteadas.

3. Complejidad numéricas de los datos.

4. Influencia de los distintos contextos.

5. Aceptación y evitamiento de soluciones negativas.

A continuación se presentan los análisis de las respuestas dadas por los dos estudiantes a algunos de los ejercicios planteados. Se denotan con las letras G y M a cada uno de ellos.

EJERCICIO 1. Ubica en una recta numérica las siguientes cantidades:

$$1,\ 2,\ \frac{1}{2}, -3, -\frac{2}{3}, \frac{6}{5}, -\frac{7}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{4}{7}$$

G recurre al significado de cociente, convirtiendo a las cantidades dadas al formato de números decimales. Extendió este significado a los fraccionarios negativos y los ubicó fácilmente sobre la recta numérica, como simétricos a los positivos respecto al cero.

M utiliza el significado de Parte – Todo para identificar cuando una fracción está antes o después de algún número. Para la ubicación de la cantidad en el espacio entre enteros recurre al significado cociente del fraccionario positivo y lo extiende a los fraccionarios negativos.

EJERCICIO 2. Escribe el signo > o < en el recuadro, según corresponda.

$$\frac{3}{4}\ \square\ \frac{2}{5} \qquad -\frac{2}{3}\quad -\frac{7}{5}\ \square \qquad -5\quad -1\ \square$$

$$\frac{1}{4}\ \square\ -\frac{3}{7} \qquad -\frac{11}{9}\quad -\frac{1}{2}\ \square \qquad -\frac{3}{4}\quad \frac{3}{4}\ \square$$

G usa el significado de cociente de los números fraccionarios positivos y lo traslada a los negativos para poder encontrar cuál es mayor o menor de las cantidades presentadas; también puede observarse el significado de medida cuando debe comparar dos números fraccionarios con signo iguales, es decir, ambos positivos o ambos negativos.

M recurre al significado de cociente para trasladar las cantidades planteadas a números decimales. Usa también el método de fracciones equivalentes en la comparación de un par de cantidades. Apela también al significado de parte – todo para establecer que tan próximo o qué tan alejado se encuentra de un entero, esto lo hace utilizando el recurso de la recta numérica.

EJERCICIO 3. En estudios recientes realizados en el Polo Norte, se ha detectado que debido al calentamiento global, un *iceberg* reduce su peso en dos toneladas cada tres meses, encuentra la ecuación que relacione el peso en función del tiempo, si el peso inicial de un *iceberg* es de 48 toneladas, determina cuál será su peso al paso de 2 años.

Apoyándose en el lenguaje del enunciado (peso), G escribe: $peso = 48 - \frac{2}{3}t$, expresión muy similar a la ecuación de la recta $y = mx + b$. Identifica a la pendiente como un número fraccionario negativo, reconociendo los significados de operador y de razón.

Al resolver este ejercicio, M recurre a un planteamiento aritmético y decide relacionar el número de meses transcurridos (24) entre el lapso de tres meses durante los cuales el *iceberg* pierde dos toneladas. M sólo obtiene el número de veces en que se pierde el peso que correspondería a la fracción $\frac{24}{3}$. M la escribe como $24 \div 3$ que muestra el significado de cociente y obtiene 8. A continuación, multiplica el valor obtenido de la fracción por 2, esto es, la cantidad de toneladas que pierde cada tres meses. M escribe: $48-(24 \div 3)2$; $48-(8)2$; $48-16$; 32 toneladas.

Obsérvese que M no comprendió el significado de razón de cambio $\frac{2}{3}$, es decir dos toneladas cada tres meses.

EJERCICIO 4. Sofía tiene un paquete de hojas, de ellas, da la cuarta parte a Javier, del resto comparte la tercera parte con Adrián, de las que sobran da dos terceras partes a Omar y le quedan para ella 36 hojas, ¿cuántas hojas tenía el paquete?

G recurre al significado de operador del número fraccionario negativo, utilizando una notación donde la variable es el numerador de la fracción, el significado de operador le permite identificar y establecer números fraccionarios negativos como sustraendos de la cantidad previa de hojas.

M hace uso de la aritmética con un proceso denominado por él mismo "de regreso". Realiza operaciones a partir "del resto al paquete original" y logra establecer la cantidad de hojas. En este procedimiento pone en juego los significados de operador y cociente para interpretar las fracciones negativas. A petición del entrevistador de resolverlo "de otra manera", M recurre espontáneamente al álgebra utilizando el significado parte-todo para las fracciones negativas.

EJERCICIO 5. Un comerciante compró 15 piezas de ropa por la suma de 160 escudos. Algunas las pagó a 11 escudos cada una y las restantes a 13 escudos la pieza. Determinar cuántas prendas compró de cada clase. (Problema de Chuquet descrito anteriormente en este artículo).

G utiliza álgebra para resolverlo mediante un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$11x + 13y = 160; \quad x + y = 15$$

Encuentra: $x = 17\frac{1}{2} \qquad y = -2\frac{1}{2}$

G verifica de manera espontánea las soluciones obtenidas.

Para volver más explícitos los procesos cognitivos del alumno, se transcribe un fragmento del diálogo sostenido durante la entrevista. El entrevistador es referido por la letra E.

G: Se obtiene $y = -2\frac{1}{2}$ (verifica espontáneamente en las ecuaciones y afirma:) "Sí se puede"

E: ¿Me puedes explicar qué significa $-2\frac{1}{2}$?

G: En lugar de comprar, le dieron 2 piezas y media y se las llevó a vender. Y compró 17 piezas y media de la otra. En lugar de comprar le dio dos piezas y media al que se las llevó a vender. Compró 17 y media del precio de 11 y le dio 2 telas y media del de 13.

E: ¿A quién?

G: Al que le vendió las piezas del precio de 11.

E: Quieres decir entonces que no se las compró.

G: No.

En el diálogo anterior, el estudiante es capaz de dar una interpretación adicional en lenguaje natural de la solución negativa. Pensamos que le es necesario ya que el lenguaje algebraico no lo tiene aún consolidado.

EJERCICIO 5. Una persona ha comprado 3 piezas de ropa de dos clases distintas y ha pagado por ellas 5 monedas. Si una de las clases de ropa cuesta 2 monedas la pieza y la otra cuesta 4 monedas la pieza. ¿Cuántas piezas compró de cada precio?

Se presentó a M una "versión simplificada" del problema de Chuquet donde los datos del enunciado eran números muy pequeños con el propósito de que el estudiante advirtiera la imposibilidad de soluciones positivas y pudiera "aflorar la negatividad".

M no lo resuelve por el método algebraico, lo realiza por tanteo del número de piezas, el precio de cada una y el importe pagado por las tres. M escribe:

M: [escribe] 2 de 2 monedas y $\frac{1}{2}$ de dos monedas [afirma:] Serían dos de dos monedas y la mitad de una de dos. [Vuelve a escribir] $2\frac{1}{2}$ de dos monedas.

E: ¿Qué te lleva a plantear esta solución?

M: Porque tomando la paga de cinco monedas y son tres piezas [en este momento, M se dirige al enunciado del problema], cinco monedas sería dos más dos da cuatro más uno da cinco; porque uno es la mitad de dos, y ahí serían las tres piezas, bueno en realidad serían dos piezas y media.

E: Muy bien, dijiste media pieza, ¿cómo se podría tener media pieza?

M: Le está cobrando media pieza, porque son de dos monedas.

E: ¿Cómo le puede estar cobrando media pieza?

M: Por algún descuento tal vez.

E: ¿Algún descuento?

M: Podría ser. [El estudiante escribe] $\frac{1}{2}$ de dos monedas por cualquier tipo de descuento.

Aunque M no está considerando soluciones negativas, advierte el posible contexto de ganancia-pérdida propio de cantidades opuestas: positivas y negativas, cuando menciona tenuemente: “Por algún descuento tal vez”.

Por último, se les presentó a los dos estudiantes la resolución de ecuaciones lineales y cuadráticas con soluciones negativas fraccionarias. Ni G, ni M tuvieron dificultades con la sintaxis algebraica, encontraron y aceptaron los valores negativos que verificaron vía sustitución en las ecuaciones correspondientes.

REFLEXIONES FINALES

En este estudio inicial, primera etapa de una investigación más amplia, se encontró que dos alumnos de alto desempeño recurrieron a describir las fracciones vía el lenguaje natural para explicar sus resultados, hecho ya mencionado por Freudenthal. Además extendieron cuatro de los significados de las fracciones positivas identificados por Kieren en la resolución de las tareas planteadas. El significado de razón de cambio no fue concebido por M.

Podemos afirmar que el tema abordado no lo comprenden a plenitud la mayoría de los estudiantes de secundaria. Esta problemática presenta grandes dificultades no solo en la asignatura de matemáticas sino también en la física. Hemos encontrado, por ejemplo, que los alumnos no resuelven problemas de cinemática utilizando álgebra porque no entienden entre otros los conceptos de velocidad y aceleración como razones de cambio ni como cantidades relativas que involucran números positivos y negativos. Afrontan los problemas que describen el movimiento generalmente con acercamientos aritméticos o gráficos.

El uso del lenguaje algebraico es determinante en la extensión del dominio numérico de los naturales a los reales durante la transición de la aritmética al álgebra. En consecuencia, los estudiantes deben adquirir un dominio aceptable en el uso del lenguaje algebraico para poder resolver los problemas planteados por el sistema educativo de las escuelas secundarias en sus distintas asignaturas. Por tratarse de un estudio en ciernes, todavía no hemos abordado los temas curriculares de física, química y biología entre otros, ni siquiera hemos logrado aún una reflexión profunda dentro de los contenidos propiamente de las matemáticas. Sin embargo, el poder plantear el tema en su complejidad, evitará llegar a conclusiones esquemáticas que no reflejarían hechos reales, donde entendemos la realidad como aquellas situaciones consideradas interesantes y posibles que emergen en los procesos de enseñanza aprendizaje surgidos entre profesores y estudiantes ubicados en instituciones educativas.

Aunque esta investigación ha sido realizada en México, muestra una problemática universal, ya acontecida históricamente como exhibimos en forma somera en este artículo, con el episodio de las piezas de ropa en sus formas original y simplificada (Chuquet, siglo XV).

Referencias

Contreras, M. y Gómez, B. (2009), Sobre problemas multiplicativos relacionados con la división de fracciones. En Investigación en Educación Matemática X. Huesca: SEIEM.

Freudenthal, H. (1983), Didactical phenomenology of mathematical structures. Dordrecht, Holland: Reidel Publishing Company, pp. 133 – 177.

Gallardo, A. (1994), El estatus de los números negativos en la resolución de ecuaciones algebraicas. Tesis doctoral. México, Cinvestav, IPN.

___________(2002), "The extension of the natural – number domain to the integers in the transition from arithmetic to algebra", Educational Studies in Mathematics, Países Bajos, Kluwer Academic Publishers, vol. 49, pp. 171 – 192

Kieren, T. (1983), Partitioning, equivalence and the construction of Rational Number Ideas. Proceedings of the Fourth International Congress on Mathematical Education, pp 506-508.

Marre, A. (1880), "Notice sur Nicolas Chuquet et son Triparty en la science des nombres", Bulletino di Bibliografia e di Storia delle Scienze Matem. e Fis, núm. 13, pp. 555-659 y 693-814.

________(1881), "Appendice au Triparty en la science des nombres de Nicolas Chuquet parisien", Bulletino di Bibliografia e di Storia delle Scienze Matem. E Fis, núm. 14, pp. 413-460.

Quispe, W., Gallardo, J. (2009). Una aproximación a la comprensión de la fracción en Perú a través de los libros de texto. En M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), Investigación en Educación Matemática XIII (pp. 389-401). Santander: SEIEM.

Saavedra, G. (2011), Estudio de las Fracciones Negativas en Educación Básica. Tesis de Maestría. México, Cinvestav, IPN

S. E. P. (2006), Educación Básica. Secundaria. Plan de Estudio 2006.

_____ (2006), Educación Básica. Secundaria. Matemáticas. Programas de estudio 2006.