Épsilon - *Revista de Educación Matemática* *2015, Vol. 32(1), nº 89, 7-18*

Persistencia del razonamiento equívoco en álgebra. Una interpretación de su génesis escolar

Eddie Aparicio, Martha Jarero, Landy Sosa e Isabel Tuyub
Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Yucatán

Resumen: *Se analiza la persistencia de raciocinios equívocos vinculados a dificultades y errores algebraicos correlacionados con lógicas procedimentales relativas a la linealidad, extrapolación de propiedades, generalización, entre otros; que deviene de causas asociadas al discurso matemático escolar, procesos cognoscitivos y la naturaleza de saberes algebraicos. Para el análisis se recabaron datos mediante un cuestionario aplicado a ingresantes a estudios superiores en las áreas de ingenierías y ciencias exactas en un periodo de siete años consecutivos. Se infiere que la presencia de raciocinios algebraicos equívocos entre los jóvenes da cuenta de un fenómeno didáctico de persistencia, cuyo origen puede deberse al discurso matemático escolar.*
Palabras clave: *Persistencia, razonamiento algebraico, fenómeno didáctico, didáctica de las matemáticas.*

Persistence of equivocal reasoning in algebra. An interpretation of its genesis scholar

Abstract: *The persistence of equivocal algebraic reasoning linked to such difficulties and errors is analyzed as a didactic phenomenon that comes from causes associated with scholar mathematical discourse, as well as from the cognitive processes and the nature of algebraic knowledge. For analysis data were collected algebra content applied, over a period of seven consecutive years, to higher education in the areas of engineering and exact sciences. It was possible to infer that the presence of equivocal algebraic reasoning among youth realizes a didactic persistence phenomenon, whose origin may be due to mathematical discourse school still in force nowadays.*
Keywords: *Persistence, algebraic reasoning, didactic phenomenon, mathematics education.*

PRESENTACIÓN

En Álgebra como en cualquier otra área del conocimiento matemático se reconocen dos modos de pensamiento asociados, el pensamiento procedimental y el estructural. Y aunque en algunos trabajos conste la sugerencia de iniciar la enseñanza del Álgebra con un sentido procedimental para transitar hacia uno estructural (Sfard, 1991; Kieran, 1992), cierto es que en la práctica educativa actual todavía es posible identificar una inclinación hacia lo estructural o semiestructural. Ello no debiera extrañar si se comparte el hecho de que para las comunidades académicas y científicas, lo axiomático estructural es inherente a la matemática y por ende, no solo comunicada y practicada en la escuela, sino adoptada por la sociedad en general.

Diversas investigaciones y experiencias didácticas han dado cuenta de lo poco funcional que resulta para los ámbitos escolares, materializar prácticas educativas bajo la lógica anterior (Aparicio y Cantoral, 2014; Carpenter, Franke y Levi, 2003; Kilpatrick, Swafford y Findell, 2001), pues se conduce a discursos escolares centrados en objetos por sobre prácticas de aprendizaje (Aparicio, 2012).

Ya en su momento Kieran y Filloy (1989), habrían indicado que el Álgebra no es una simple generalización de la Aritmética, requiere de un cambio de pensamiento, de transitar de modos “informales” de representación y resolución de problemas, a uno formal. Lo anterior plantea no solo pensar en epistemologías escolares alternativas donde lo aritmético antecede a lo algebraico solo en términos organizacionales, sino en el planteamiento de estudios que den cuenta de nuevas formas de interpretar y explicar los problemas de aprendizaje en Álgebra (Aparicio, 2012).

Christou y Vosniadou (2012) dejan ver cómo en el tránsito de un sistema aritmético escolarmente tratado de manera procedimental y concreta (con transformaciones que resultan en respuestas numéricas) a un sistema algebraico más estructural y abstracto donde las transformaciones corresponden a expresiones algebraicas y no a números específicos, se produce una “ruptura cognitiva” y un “corte didáctico” que da cuenta de una serie de dificultades y errores en el aprendizaje algebraico de los estudiantes.

De igual manera, en Kieran (1992), se comentaba que la serie de libros publicada en Inglaterra (NMP, 1987), ofrecía una propuesta de reorganización del contenido en los textos de Álgebra sobre la idea de desarrollos sucesivos de las nociones de letras como incógnitas específicas y luego como cantidades dadas en una sucesión que evoluciona gradualmente del proceso al objeto. En su opinión, ese tipo de propuestas indicaban formas en que el contenido algebraico podría ser presentado en las aulas con el fin de evitar diversas fallas al momento de su enseñanza, específicamente, cuando se emplean definiciones formales y estructurales. Algunas de esas fallas han sido ampliamente reportadas en la literatura especializada, aquí solo se referirán las asociadas al tipo de dificultades presentes en su aprendizaje y que tienen relación con el presente trabajo, por ejemplo, investigaciones en las que se aborda la tipificación de errores algebraicos; usos y significaciones asociadas a los símbolos y literales; tipos de obstáculos; el papel de las representaciones semióticas en el aprendizaje; formas de favorecer el tránsito de lo aritmético a lo algebraico; la dualidad de los objetos matemáticos y, procesos de desarrollo del pensamiento algebraico.

Un estudio relativo a la tipificación del error algebraico fue realizado por Matz (1982), en él se describe cómo las técnicas de generalización y extrapolación aprendidas en la Aritmética y llevadas al Álgebra, conducen a errores de conceptualización y operatividad de lo variable, e incluso, a una inadecuada interpretación del signo igual, entre otros. La autora señala que la descomposición lineal o la linealidad, es la técnica más usada de forma errónea y los ejemplos de errores más comunes son de distribución generalizada: $\sqrt{A+B} \to \sqrt{A} + \sqrt{B}$; $(A+B)^2 = A^2 + B^2$; $A(BC) \to AB * AC$; $2^{a+b} \to 2^a + 2^b$; $2^{ab} \to 2^a\, 2^b$.

En la misma línea del error algebraico, Socas (2007) refiere que el error y el obstáculo están relacionados toda vez que a un obstáculo se le puede considerar como el origen de un error, en consecuencia, el obstáculo posibilitaría hacer un análisis más fino del error, pues como es sabido, los obstáculos en la enseñanza aprendizaje de las matemáticas se clasifican según su naturaleza: en epistemológicos, cognitivos y didácticos, e incluso, en ontológicos. Dicho así, el análisis del error posibilita pensar en un entramado inconsciente o en una condición implícita subyacente en los razonamientos y procedimientos de los estudiantes ante determinadas situaciones algebraicas.

Los estudios respecto a los usos y significados de las letras en el contexto algebraico se han elaborado considerando la noción de número y sus operaciones, la representación de la realidad y todo un sistema formal de representación simbólico (Palarea y Socas, 2000). Se ha documentado que aun cuando los estudiantes logran manipular las letras en sus distintos significados, pocos son los que llegan a reconocerlas como variables (Kücheman, 1981, citado en Kieran, 1992; Asquith, Stephens, Knuth y Alibali, 2007). Las dificultades en el entendimiento del concepto de variable real en Álgebra han sido referidas a partir del uso e interpretación de símbolos literales (como abreviaturas de nombres, como valores desconocidos únicos, en oposición a números generales o que admiten solo números naturales,…); e inducidas por el concepto inicial de número (natural) en los estudiantes, entre otros factores (Christou y Vosniadou, 2012).

Como es sabido, una peculiaridad en Álgebra es tratar con todo un sistema matemático de símbolos y signos interconectados en razón de las operaciones definidas en la Aritmética, empero, no necesariamente con la misma lógica operacional y conceptual. En ese sentido, diversas investigaciones han realizado un análisis sobre el papel de las representaciones simbólicas o más ampliamente, de las representaciones semióticas en el aprendizaje algebraico. Algunos trabajos pioneros en esta dirección son los de Janvier (1987), Duval (1988) y Kaput (1989), en ellos se refiere que la articulación y el tránsito entre múltiples representaciones en Álgebra o en cualquier dominio de las matemáticas, favorece el entendimiento de ideas complejas por parte de los estudiantes. Más recientemente se sitúan los trabajos de Kilpatrick, Swafford y Findell (2001), Carpenter, et al (2003) y Radford (2010), en éste último se discute una tipificación y generalidad del pensamiento algebraico a partir de dos aspectos centrales, la naturaleza del problema matemático a resolver y los recursos semióticos a movilizar en dicho problema, esto desde una perspectiva semiótica cultural del pensamiento matemático.

La dualidad de los objetos matemáticos también ha sido tema de análisis en diversas investigaciones para explicar dificultades de entendimiento con literales y conceptos algebraicos, por ejemplo, dificultad para interpretar a las literales como número generalizado, diferenciando el carácter procedimental y el estructural (conceptual) como entidad algebraica en sí misma. Desde este enfoque se dice que los estudiantes tienden inicialmente a entender las ideas matemáticas procesalmente, empero, según Sfard (1991); Sfard y Linchevski (1994) ha de desarrollarse una comprensión más profunda de los conceptos algebraicos en la medida que los estudiantes accedan de forma flexible al carácter estructural de estos. Visto así, tal dialéctica entre lo procedimental y estructural concierne a un fenómeno complejo que produce cambios ontológicos cualitativos respecto a las significaciones y aplicaciones de los conceptos escolarmente, tanto como en las perspectivas investigativas en el campo.

Sin duda alguna, los hallazgos en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, particularmente en Álgebra, han posibilitado cambios favorables en la concepción del currículo escolar algebraico y su contenido. Un indicativo de ello son los trabajos de Carpenter et al (2003), Cedillo y Kieran (2003), Kieran (2006) y Dougherthy (2008), de manera que en la literatura actual se coincide en reconocer que la enseñanza del Álgebra debe ir más allá de la comunicación y manipulación formal de las representaciones simbólicas estructurales, para entendérseles como una forma de pensar y conceptualizar lo variable (Ursini, Escareño, Montes y Trigueros, 2005) expresar la generalidad y la abstracción (Kilpatrick et al, 2001; Carpenter y Levi, 2000; Radford, 2006), así como el representar relaciones entre lo concreto y lo abstracto (Carpenter et al, 2003), dicho en otras palabras, lo estructural ha de ser inseparable de lo procedimental.

PROBLEMA DE ESTUDIO

Como se ha venido expresando, los esfuerzos por entender, explicar y contribuir a una disminución de la problemática existente en la enseñanza aprendizaje del Álgebra son considerables y diversos. Los avances en la investigación de las últimas tres décadas, de poco en poco han ido favoreciendo un cambio en la concepción curricular del Álgebra y planteando diversas propuestas para su reorganización, sin embargo, el tipo de dificultades y errores algebraicos reportados en el pasado, aún mantienen vigencia entre los escolares contemporáneos, de ahí que en el presente trabajo se tomara como objeto de análisis el carácter *persistente de raciocinios* algebraicos equívocos, pues se piensa que los errores y razonamientos algebraicos equívocos cometidos por los estudiantes en antaño y en la actualidad, no son impredecibles y arbitrarios, por el contrario, mantienen una lógica interna que los hace persistentes, lo que plantea la posibilidad de caracterizar dicha persistencia como un fenómeno didáctico asociado al discurso matemático escolar más que a dificultades o errores algebraicos que pudieran devenir de generalizaciones o intuiciones incorrectamente elaboradas o aplicadas por los estudiantes.

En Chevallard, Bosch y Gascón (1997) se menciona que un fenómeno didáctico en matemáticas tiene lugar en cualquier proceso de estudio de esta ciencia, por lo que bien podría ser considerado como un hecho recurrente en una situación de enseñanza/aprendizaje e identificable mediante la observancia de algún intérprete. Por tanto, su origen ha de estar vinculado no solo a los procesos didácticos asociados, sino también a la naturaleza misma de la matemática. En ese sentido, cuando un saber matemático ha sido designado como un saber de enseñanza, recibe a partir de ese momento, algún tipo de transformación para su inserción al sistema escolar, tal transformación es un ejemplo de fenómeno didáctico (Chevallard, 1997).

Dicho lo anterior se planteó como objetivo de investigación determinar en qué medida la persistencia de razonamientos equívocos en Álgebra puede considerarse un fenómeno didáctico susceptible de ser analizado mediante un test de conocimientos matemáticos algebraicos típicamente escolares.

Se formula que la persistencia de errores y razonamientos equívocos en Álgebra no resulta ajena al tipo de adaptación escolar que del saber se hace al ser designado un saber de enseñanza y por ende, tampoco será ajena al tipo de discurso escolar conferido en los libros o en las aulas, por lo que el análisis de las posibles causas y efectos de dicha persistencia podrían ser inferibles desde el discurso escolar conferido, tanto igual que de los procesos cognoscitivos de los estudiantes y de la naturaleza de los saberes algebraicos puestos en juego.

Un ejemplo de la enunciación anterior puede extraerse del discurso escolar otorgado a la potenciación en educación básica, cuya presentación se hace a partir de la idea de multiplicación iterativa: $a^n = a \cdot a \cdot a \cdots a$, n veces con n mayormente entero positivo y sin más representación que lo numérico o algebraico. Luego entonces no sería difícil imaginar una movilización de algunos razonamientos equívocos por parte de los estudiantes como los siguientes: $a^n\, a^m = a^{nm}$ o bien, $a^n\, a^m = b^{nm}$ con $b = a \cdot a = a^2$, pues lo que se fija en la mente de la mayoría de ellos es la idea de que potenciación es "multiplicación iterativa de los números o literales" en la que solo debe cuidarse un cierto orden y lógica operativa, ello en virtud de que no se ofrecen marcos de referencia para conceptualizar la noción de potencia ya sea como un comportamiento exponencial de valores o como una relación funcional entre cantidades. De este modo, $a^n\, a^m = a^{n+m}$ no tendría sentido para los estudiantes, pues una suma de los valores exponenciales se sale del esquema o representación mental asociado.

Casos como el anterior dan lugar a reflexionar sobre el papel del discurso matemático escolar en la presencia y persistencia de estos razonamientos ciertamente equívocos a la luz de la matemática, empero, legítimos desde una perspectiva discursiva escolar, caracterizada por el énfasis dado a la sintáctica más que a la semántica.

MÉTODO

Para identificar en qué medida se presentaba un determinado tipo de razonamiento equívoco en contenidos específicos del Álgebra así como su persistencia, se recurrió a recabar datos de una muestra intencional por un periodo de siete años consecutivos con estudiantes recién egresados de educación media superior que fueron aceptados para realizar sus estudios universitarios en licenciaturas de Ciencias Exactas en las áreas de Matemáticas, Actuaría, Enseñanza de las Matemáticas, Ciencias Computacionales, Ingenierías en Computación e Ingeniería en Software. En la tabla I se presentan los datos de la población estudiantil participante por año y por programa educativo.

A todos los estudiantes se les solicitó responder al término de sus cursos de educación media superior y de manera voluntaria, un cuestionario de opción múltiple con quince reactivos de Álgebra, con cuatro opciones de respuesta, empero sólo una correcta. El tiempo de administración fue de sesenta minutos a cargo de los investigadores.

Cabe decir que de los quince reactivos contenidos en el cuestionario, solo dos de ellos fueron empleados para la recolección de datos respecto a la persistencia de razonamientos equívocos. La primera aplicación del instrumento en el año 2006 fue para seleccionar los reactivos a emplear en el análisis de los subsiguientes años.

Tabla I. Población de estudiantes participantes por programa educativo

Programa educativo	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012
Lic. en Matemáticas	34	36	37	39	42	37	0
Lic. en Enseñanza de las Matemáticas	34	34	39	40	39	41	35
Lic. en Actuaría	49	49	53	52	37	39	36
Lic. en Ciencias de la Computación	33	35	39	33	37	31	22
Lic. en Ingeniería de Software	33	35	37	35	53	37	39
Lic. en Ingeniería en Computación	31	35	32	33	42	40	36
Total de estudiantes ingresantes	**214**	**224**	**237**	**232**	**250**	**225**	**168**

El cuestionario es considerado un instrumento de confiabilidad aceptable según la escala establecida por Kerlinger y Lee (2002), dado que se obtuvo un α-Cronbach tipificado de 0.894 en el 2006, de 0.8815 en el 2008, de 0.915 en el 2010 y de 0.903 en el 2012; respecto a la consistencia interna así como de la correlación elemento-prueba para identificar aquellos reactivos que no se encuentran en el mismo contexto que el resto del cuestionario.

La objetividad del cuestionario se basó en el hecho de que al ser de opción múltiple, los resultados serán los mismos independientemente de quién los analice; su validez está en contener solo reactivos de conocimientos matemáticos que son prerrequisitos para los cursos de los primeros semestres de educación superior y que fueron estudiados previamente durante la educación media superior. Su fiabilidad deviene del hecho de que los resultados obtenidos en las diferentes generaciones se mostraron estables en todas las ocasiones administradas.

Los dos reactivos empleados para el análisis de datos son los que se presentan en la tabla II.

Cualitativamente se examinaron las respuestas de los reactivos que dan cuenta de la presencia de razonamientos algebraicos equívocos entre los estudiantes. Se consideró como referente tanto las ideas como los modos de pensamiento asociados a dichos razonamientos en relación con las formas de discurso escolar y la naturaleza de los saberes matemáticos subyacentes en cada reactivo.

DATOS Y RESULTADOS

Entre el tipo de respuestas dadas a los reactivos empleados para el análisis de la presencia y persistencia de razonamientos algebraicos equívocos en los estudiantes, se consideraron algunos errores algebraicos reportados en la literatura especializada. A continuación se presentan las consideraciones realizadas para cada una de las respuestas ofrecidas en el cuestionario.

Tabla II. Reactivos de Álgebra para el análisis de la persistencia

Reactivo 1	Opciones de respuestas			
Si a y b son números positivos y $a = b$, la expresión $\sqrt{a^3} + \sqrt{b^3}$ es igual a:	A) $\sqrt{2a^3}$	B) $\sqrt{a^6}$	C) $\sqrt{2a^6}$	D) $\sqrt{4a^3}$
Porcentaje aproximado de selección en cada inciso por año suministrado				
2007	41%	23%	13%	22%
2008	34%	25%	16%	25%
2009	41%	19%	15%	25%
2010	41%	19%	15%	25%
2011	31%	22%	20%	28%
2012	46%	19%	15%	18%
Reactivo 2	**Opciones de respuestas**			
El producto (2^{2x}) (2^{2y}) es igual a:	A) 4^{x+y}	B) 4^{4xy}	C) 4^{xy}	D) $4^{2(x+y)}$
Porcentaje aproximado de selección en cada inciso por año suministrado				
2007	28%	52%	1%	18%
2008	11%	35%	1%	53%
2009	7%	31%	0%	61%
Reactivo 2 (modificado)	**Opciones de respuestas**			
El producto (2^x) (2^y) es igual a	A) 4^{x+y}	B) 4^{xy}	C) 2^{xy}	D) 2^{x+y}
Porcentaje aproximado de selección en cada inciso por año suministrado				
2010	44%	22%	2%	32%
2011	40%	23%	3%	34%
2012	42%	23%	4%	32%

En el caso del reactivo 1, la respuesta del inciso A) $\sqrt{2a^3}$ presupone un razonamiento equívoco sobre la base del reconocimiento y aplicación de una distribución generalizada incorrecta reportada por Matz (1984), a saber, $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a+b}$. No obstante, la incorrecta distribución no es lo único que se asiste en dicho inciso, sino también el papel asignado a la adición o más precisamente, al operador aditivo en este tipo de estructuras algebraicas, pues se incorpora la posibilidad de que el operador actúe sobre las literales empero no en los exponentes.

De modo similar, en el inciso B) $\sqrt{a6}$ se presupone un razonamiento semejante al anterior empero, con el agregado de que la adición actúe sobre los exponentes y deje invariante a las bases, ello bajo la consideración de que ambas son iguales. Esta misma lógica fue aplicada al inciso C) $\sqrt{2a^6}$, con la diferencia de que en este caso la adición estaría operando tanto igual para las bases como para los exponentes y el radical se asume invariante como en el resto de los incisos.

Todas estas consideraciones sobre las opciones de respuestas dadas a los estudiantes no se restringen a la simple consideración de uno u otro tipo de error/dificultad algebraica para dar cuenta de su presencia, eso ha quedado ya reportado suficientemente en la literatura, más bien se buscaba dar cuenta de una persistencia de razonamientos algebraicos equívocos en la medida que las elecciones de los estudiantes no estuvieran completamente contenidas en una clase específica.

Por la distribución porcentual obtenida en la elección de cada inciso de respuesta a lo largo de los años se evidencia no solo los tipos de errores o dificultades algebraicas, sino la persistencia de razonamientos equívocos que a interpretar del tipo de reactivos y respuestas contenidas en el cuestionario, se asume que en mayor o menor medida son causadas por un discurso matemático escolar algebraico que carece de marcos de significación apropiados para tratar la semántica de los símbolos algebraicos y movilizar esquemas cognitivos para transitar a estadios estructurales y autónomos de pensamiento en relación con los sistemas de signos, de modo que se favorezca la comprensión sobre la naturaleza procedimental y estructural del Álgebra.

Para el caso de la radicación (Reactivo 1), tales marcos de referencia pueden hallarse en el escudriño de procesos de desarrollo y construcción de dicha noción *ad hoc* a su naturaleza epistemológica para conferirle un sentido a la radicalización, por ejemplo, en lo relativo al estudio de relaciones de proporcionalidad entre cantidades conmensurables y no conmensurables en contextos geométricos o en situaciones contextualizadas de medición, la mecánica, agrimensura, ebanistería, entre otras. Es decir, referentes que permitan transponer discursos escolares apegados a procesos de axiomatización y desarrollo de la estructura deductiva matemática de los números, en los que el trabajo con radicales se trata como una extensión numérica del exponente natural a un entero y racional (Martínez, 2005).

Respecto al reactivo 2 modificado, al igual que en el reactivo 1, se consideraron los errores de distribución generalizada concernientes a la potenciación: $2^{a+b} \rightarrow 2^a + 2^b$; $2^{ab} \rightarrow 2^a 2^b$, como se reportan en Matz (1984). Así, en la respuesta en el inciso A) 4^{x+y} aunque propiamente no corresponde a uno u otro tipo de los errores de distribución generalizada dados por Matz, se usa ese conocimiento para su elaboración, empero, situado sobre la base de un posible recordatorio de las leyes de los exponentes para cuando las bases son iguales y que al mismo tiempo dé cuenta de la persistencia de razonamientos equívocos más que de simples errores o dificultades algebraicas. En este sentido, en el inciso se incorporó la idea presentada en el apartado anterior en el que el discurso escolar otorgado a la potenciación instala razonamientos equívocos del tipo: $a^n a^m = b^{nm}$ con $b = a \cdot a$, en la cognición de los estudiantes.

El inciso B) 4^{xy}, justo se corresponde con la consideración comentada en la última línea del parágrafo anterior y que por los porcentajes obtenidos en los primeros tres años de aplicación con los tres posteriores a su modificación, es posible referir la persistencia de razonamientos equívocos entre los estudiantes.

El inciso C) 2^{xy} corresponde al razonamiento equívoco también discutido previamente en este trabajo: $a^n a^m = a^{nm}$, sin embargo, se decidió presentarse en la forma como

Matz lo refiriera en su momento: $2^{ab} \rightarrow 2^a 2^b$, para obtener datos sobre en qué medida se hace presente una persistencia del razonamiento equívoco en función de una u otro tipo de presentación.

Visiblemente los datos posibilitan interpretar que no se trata solo de una situación de errores o dificultades algebraicas por parte de los estudiantes. La cantidad porcentual de quienes responden de una u otra manera resulta suficiente para pensar que se está ante un fenómeno didáctico de persistencia en razonamientos algebraicos equívocos. Desde luego no se rechaza el que las respuestas proporcionadas en sí mismas conforman algún tipo de error algebraico, empero, tales errores serían el efecto más no la causa, pues tal como se dice en Malisani (1999), parte de los errores que cometen los alumnos en Álgebra se remonta a obstáculos epistemológicos y bien puede agregarse, al tipo de tratamiento que le es conferido al Álgebra en la escuela. En ese sentido, se sostiene la tesis de que en el discurso escolar otorgado al Álgebra se encuentra la causal no solo de la manifestación de errores sino de una pérdida gradual en el proceso de significación de las literales, su uso y funcionalidad, pues la atención ha estado puesta en un supuesto tránsito de descripciones en lenguaje ordinario a representaciones simbólicas impersonales y procedimientos sistematizados, causando así un fenómeno didáctico de persistencia de razonamientos algebraicos equívocos en los estudiantes.

En una dirección similar a los efectos del discurso escolar algebraico se han pronunciado autores como (Pochulu, 2005; Abrate, Pochulu y Vargas, 2006) quienes refieren que los errores cometidos por los estudiantes se remontan a obstáculos epistemológicos propios del desarrollo histórico de los conceptos matemáticos y se vinculan con los procesos de enseñanza caracterizados por un uso exacerbado de técnicas algorítmicas o rutinas sin fundamentos teóricos, utilización de reglas poco trascendentes, tratamientos apegados a lo algebraico, ausencia de contextos y poco articulación con otros saberes.

CONCLUSIÓN

Desde una perspectiva epistemológica del conocimiento matemático se dice que el error en los estudiantes no es sólo un efecto de la ignorancia, sino de un conocimiento anterior que aun siendo exitoso en algunos casos se manifiesta falso para otros o en su generalidad (Brousseau, 1986), ello queda no solo corroborado en el presente escrito, sino que se asienta el pensar en la persistencia de razonamientos equívocos en Álgebra como resultado de la existencia de tal tipo de conocimientos.

En el sentido anterior y de los datos obtenidos en el presente trabajo, es posible concluir que si bien ha habido esfuerzos por modificar el currículo matemático escolar, particularmente en Álgebra, igual que avances de investigaciones educativas en el tema, los razonamientos algebraicos equívocos por parte de los estudiantes siguen siendo hoy tan presentes como en antaño, lo que permite situar a este tipo de situaciones como un *fenómeno didáctico de persistencia* susceptible de ser inferidle a partir de un test con ítems enmarcados en una visión tradicionalista del currículo escolar de álgebra y su difusión al interior de las aulas.

Ahora bien, bajo la supuesta relación escolar dependiente entre un error y un conocimiento previo, resulta viable hacer una reflexión sobre el papel del discurso matemático escolar en un sentido causal. Esto es, reflexionar sobre las distintivas particularidades de un discurso matemático escolar como elementos germinales de dicho fenómeno didáctico, pues todo conocimiento escolar debe considerarse acción y efecto de la naturaleza organizacional y discursiva otorgada a los saberes de enseñanza. Tal consideración exigiría, para el caso aquí presentado, un análisis de la posible interrelación entre: 1) las concepciones docentes sobre la matemática en general y el Álgebra en particular; 2) la naturaleza organizativa de los contenidos algebraicos escolares y, 3) las interacciones discursivas entre estudiantes y profesores relativas al saber.

Dicho así, sería necesario reflexionar sobre formas favorables de aproximarse tanto al entendimiento de este tipo de persistencia como a su tratamiento en los escenarios escolares, en consecuencia se estaría ante un problema de rediseño del discurso matemático escolar algebraico aún vigente en las aulas.

Dada la evidencia empírica obtenida en este trabajo a partir de un test enmarcado en una visión tradicionalista de organización y difusión escolar del Álgebra respecto a la persistencia de razonamientos algebraicos equívocos entre los estudiantes ingresantes a estudios universitarios, se reconoce la importancia de complementar este tipo de resultados y trabajos con estudios sobre currículo escolar de álgebra difundido en las aulas con el fin de precisar de mejor manera el papel que el discurso matemático escolar tiene en dicho fenómeno de persistencia.

REFERENCIAS

Aparicio, E. (2012). Rendimiento escolar en Matemáticas. Casos en la enseñanza media superior y superior. En Dolores, C. y García, M. (Eds) *¿Hacia dónde reorientar el currículum de matemáticas del Bachillerato?,* 23-36. Universidad Autónoma de Guerrero y Plaza y Valdés Editores: México.

Aparicio, E. y Cantoral, R. (2014). The Social Construction of Mathematical Continuity: A Socioepistemological Approach. *Başkent University Journal of Education* 1(1), 123–135.

Abrate, R., Pochulu, M. y Vargas, J. (2006). *Errores y dificultades en matemática. Análisis de causas y sugerencias de trabajo*. Buenos Aires: Universidad Nacional de Villa María.

Asquith, P., Stephens, A.C., Knuth, E.J. y Alibali, M.W. (2007). Middle School Mathematics Teachers' Knowledge of Students' Understanding of Core Algebraic Concepts: Equal Sign and Variable. *Mathematical Thinking and Learning, 9*(3), 249-272.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 33-115.

Carpenter, T. P. y Levi L. (2000). *Developing conceptions of algebraic reasoning in the primary grades.* Madison: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science: University of Wisconsin-Madison.

Carpenter, T. P., Franke, M. L. y Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in the elementary school*. New Hampshire: Heinemann.

Cedillo, T. y Kieran, K. (2003). Initiating students into algebra with symbol-manipulating calculators. En Fey J. T. (Ed.) *Computer algebra systems in secondary school mathematics education*, 219-239. NCTM: Virginia.

Chevallard, Y. (1997). Familiare et problématique, la figure du professeur. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 17(3), 17 – 54.

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Barcelona: ICE-Horsori editorial.

Christou, K. y Vosniadou, S. (2012). What Kinds of Numbers Do Students Assign to Literal Symbols? Aspects of the Transition from Arithmetic to Algebra. *Mathematical Thinking and Learning,* 14(1), 1-27.

Dougherthy, B. (2008). Measure up: A quantitative view of early algebra. En Kaput, J., Carraher D. y Blanton, M. (Eds.) *Algebra in the early grades*, 389–412. Lawrence Erlbaum Associates: New Jersey.

Duval, R. (1988). Graphiques et ´equations: l'articulation de deux registres. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 1, 235–253.

Janvier, C. (1987). Representations and Understanding: The notion of Function as an example. En Janvier, C. (Ed.) *Problems of representation in the Teaching and Learning of Mathematics,* 67-71. Lawrence Erlbaum Associates: New Jersey.

Kaput, J. J. (1989). Linking representations in the symbol systems of algebra. En Wagner, S. y Kieran, C. (Eds) *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra*, 167-194. LEA: Michigan.

Kerlinger, F. y Lee, H. (2002). *Investigación del comportamiento. Métodos de investigación en ciencias sociales* (4a. ed.). México: McGraw Hill.

Kieran, C. y Filloy, E. (1989). El aprendizaje del Álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias,* 7, 229-240.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. En Grouws, D. A. (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, 390–419. Macmillan: New York.

Kieran, C. (2006). Research the Learning and Teaching of Algebra. En Gutiérrez, A. y Boero, P. (Eds.) *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future*, 11 – 49. Sense Publishers: Rotterdam.

Kilpatrick, J., Swafford, J., y Findell, B. (2001). Adding it up: Helping children learn mathematics. Washington, DC: National Academy Press.

Malisani, E. (1999). Los obstáculos epistemológicos en el desarrollo del pensamiento algebraico. Visión histórica. *Revista IRICE,* 13,1-26.

Martínez, G. (2005). Los procesos de convención matemática como generadores de conocimiento. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 8(2), 195-218.

Matz, M. (1982). Towards a process model for high school algebra errors. En Sleeman, D. y Brown J. S. (Eds.) *Intelligent tutoring systems*, 25-50. Academic Press: London.

NMP (1987). *National Mathematics Project*. London: Longman.

Palarea, M.M. y Socas, M.M. (1999-2000). Procesos cognitivos implicados en el aprendizaje del lenguaje algebraico. Un estudio biográfico. *El Guiniguada, 8/9,* 319-336.

Pochulu D. (2005). Análisis y Categorización de errores en el aprendizaje de la matemática en alumnos que ingresan a la universidad. *Revista Iberoamericana de Educación* [en línea], *35*. Recuperado el 2 de agosto de 2014, de http://www.rieoei.org/deloslectores/849Pochulu.pdf

Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: A semiotic perspective. En Alatorre, S., Cortina, J.L., Sáiz, M., and Méndez, A. (Eds.) *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 1, 2-21*. Universidad Pedagógica Nacional: Yucatán.

Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA*, 4(2), 37-62.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1–36.

Sfard, A. y Linchevski, L. (1994). The gains and the pitfalls of reification-The case of algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 26, 191–228.

Socas, M. M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las Matemáticas. Análisis desde el enfoque Lógico Semiótico. *Investigación en Educación Matemática,* 11, 19-52.

Ursini, S., Escareño, F., Montes, D. y Trigueros, M. (2005). *Enseñanza del Álgebra elemental. Una propuesta alternativa*. México: Editorial Trillas.