Épsilon - *Revista de Educación Matemática* **2015, Vol. 32(1), nº 89, 19-33**

Problemas de estimación de grandes cantidades en las aulas de Educación Primaria

Lluís Albarracín, Cristina Lorente, Antoni Lopera,
Héctor Pérez y Núria Gorgorió
Departament de Didàctica de la Matemàtica
i les Ciències Experimentals
Universitat Autònoma de Barcelona

Resumen: *En este artículo estudiamos la presencia de procesos de modelización matemática en las resoluciones de Problemas de estimación de grandes cantidades de alumnos de Educación Primaria. Observamos que los alumnos resuelven los problemas utilizando diferentes estrategias que incluyen modelos matemáticos como la regla del producto, la iteración de un punto de referencia o la densidad de población, con lo que concluímos que estos problemas permiten introducir los procesos de modelización matemática en las aulas de Educación Primaria.*
Palabras clave: *Resolución de problemas, estimación, modelización, Educación Primaria*

Large numbers estimation problems in Primary education classroms

Abstract: *In this paper we study the presence of mathematical modelling processes in Large numbers estimation problems in primary education students solvings. We note that students solve problems using different strategies that include mathematical models as the product rule, the iteration of a reference point or population density. We conclude that these problems constitute a good opportunity allow to introduce mathematical modelling processes in the Primary Education classrooms.*
Keywords: *Problem solving, estimation, modelling, Primary education*

INTRODUCCIÓN

En estudios previos hemos analizado las estrategias de resolución que proponen los alumnos de Enseñanza Secundaria para resolver Problemas de Estimación de Grandes Cantidades (PEGC). Hemos observado que los alumnos los resuelven proponiendo sus propias estrategias, rompiendo el problema propuesto en problemas más pequeños y resolviéndolos por separado (Albarracín y Gorgorió, 2014). De esta forma los PEGC son un subconjunto de los denominados Problemas de Fermi y hemos podido constatar que son una herramienta útil para la introducción de los procesos de modelización en las aulas de Educación Secundaria (Albarracín y Gorgorió, 2013a).

Una revisión de la literatura en el campo de la Educación matemática aparecida en los últimos años evidencia un auge en las propuestas didácticas que incorporan la modelización matemática. En general los esfuerzos se han dirigido a estudiar las posibilidades de los estudiantes de Educación Secundaria y de niveles universitarios, pero los estudios que incluyen alumnos de Educación Primaria son escasos. Por otra parte, nos encontramos con los resultados de las últimas pruebas PISA (OECD, 2014a; 2014b), que ponen en la agenda la resolución de problemas matemáticos contextualizados en situaciones de la vida cotidiana, tanto de forma individual como grupal. En este contexto proponemos el uso de PEGC en las aulas de Educación Primaria.

En este artículo presentamos una investigación basada en diferentes experiencias de aula con alumnos del ciclo superior de Educación Primaria, en las que utilizamos una serie de PEGC. En el análisis de las producciones de estos alumnos observamos que en el trabajo en grupo se elaboran modelos matemáticos y caracterizamos su naturaleza.

En estudios anteriores hemos observado que la resolución de PEGC permite a los alumnos de Educación Secundaria establecer conexiones entre su conocimiento matemático y su entorno. Ahora nos preguntamos sobre las posibilidades de este tipo de tareas con alumnos de menor edad. Por otra parte, es conocido que los problemas de aula con contextos reales no substituyen la toma de decisiones en el mundo real, pero su uso en las aulas promueve actitudes que pueden utilizarse en la vida cotidiana (Jurdak, 2006). Por ello los problemas propuestos en nuestro trabajo se basan en la estimación de grandes cantidades ambientados en contextos cercanos, como puede ser el propio centro.

MODELIZACIÓN MATEMÁTICA

La resolución de problemas es un ámbito en el que se han realizado un gran número de estudios y avances en las últimas décadas y ha llegado a jugar un papel fundamental en el campo de la Educación matemática (Rasmussen y King, 2000). Por otra parte, en los últimos años ha aparecido un fuerte interés por el estudio de los procesos de modelización matemática. En lo que sigue entendemos que las actividades de modelización matemática son un tipo concreto de tareas de resolución de problemas contextualizados en las que la creación de una representación matemática de una realidad o fenómeno es uno de los aspectos clave de la resolución. Para definir de forma más precisa el concepto de modelo matemático utilizamos la siguiente formulación propuesta por Lesh y Harel (2003):

> Models are conceptual systems that generally tend to be expressed using a variety of interacting representational media, which may involve written symbols, spoken language, computer-based graphics, paper-based diagrams or graphs, or experience-based metaphors. Their purposes are to construct, describe or explain other system(s).
>
> Models include both: (a) a conceptual system for describing or explaining the relevant mathematical objects, relations, actions, patterns, and regularities that are attributed to the problem-solving situation; and (b) accompanying procedures for generating useful constructions, manipulations, or predictions for achieving clearly recognized goals. (p. 159)

A partir de esta definición, entendemos que un modelo matemático es una forma de representar una realidad en la que intervienen elementos de diferente naturaleza. Algunos de estos elementos son propios de las matemáticas pero los modelos también pueden aspectos no formales que permitan una descripción intuitiva de la realidad estudiada. Además, Lesh y Harel (2003) afirman que "the products that problem solvers produce generally involve much more than simply giving brief answers to well formulated questions" (p. 158).

La forma en la que los estudiantes crean modelos matemáticos para resolver problemas es objeto de estudio y existen diferentes posiciones al respecto (Borromeo Ferri, 2006). En términos generales, se acepta que los procesos de modelización tienen una naturaleza eminentemente cíclica. En el proceso de resolución los estudiantes tratan de resolver los problemas pasando por diferentes fases y vuelven a replantearse la situación estudiada. De esta forma, el proceso se repite en diferentes ciclos en los que se mejoran los modelos y las soluciones encontradas para el problema en el que trabajan adaptándose a las necesidades que marca el enunciado en cada momento (Blum y Borromeo Ferri, 2009). Estos procesos no son sencillos para los estudiantes y se han detectado diferentes dificultades, como la presencia excesiva de modelos lineales en situaciones que no los requieren (Esteley, Villarreal y Alagia 2010).

ESTIMACIÓN Y PROBLEMAS DE FERMI

En muchas situaciones de nuestra vida cotidiana no disponemos de todos los medios o informaciones necesarios para poder dar una respuesta precisa y concreta a una pregunta dada. Aún así en muchas de estas situaciones no es realmente necesario obtener respuestas con un alto nivel de precisión para solucionar aquello que se nos plantea. En estos casos una estimación de las cantidades relevantes que intervienen en la situación en la que nos encontramos puede ser suficiente, o incluso la opción más rápida y efectiva para dar solución al problema con el que nos encontramos. En el contexto de la Educación Matemática, entendemos que una estimación es un juicio del valor del resultado de una operación numérica o de la medida de una cantidad, en función de las circunstancias y necesidades de la persona que emite ese juicio (Segovia, Castro, Castro y Rico, 1989).

En la literatura se distinguen tres tipos, esencialmente distintos, de formas de estimación: la denominada numerosidad (*numerosity)*, la estimación de medidas y la estimación computacional (Hogan and Brezinski, 2003). Esta variedad se debe a que existen una gran diversidad de tareas que, aunque no compartan los patrones numéricos o conceptuales que permiten realizarlas, recaen en el concepto de estimación (Booth and Siegler, 2006). La numerosidad se refiere a la habilidad de estimar visualmente el número de objetos dispuestos en un plano en un tiempo determinado, la estimación de medidas se basa en la habilidad perceptiva de estimar longitudes, superficies, tiempos, pesos o otros tipos de medidas similares y la estimación computacional se refiere al proceso por el que se aproxima el valor de cálculos como 2.31+5.75/2.1.

Por otra parte, otra actividad en la que las matemáticas son un aspecto fundamental y que es denominada también estimación es el cálculo de valores obtenidos en actividades predictivas o de aproximación de una realidad a partir del uso de modelos que representan una situación. Este tipo de actividad es común en tareas científicas, técnicas o en estudios sociales, pero ha sido poco considerado en el estudio sistemático en el ámbito de la Educación Matemática. Una buena muestra del tipo de situaciones en las que un modelo matemático es la base para realizar una estimación de una cantidad la constituyen los denominados problemas de Fermi, propuestos originalmente por Enricco Fermi (1901-1954), físico ganador de un premio Nobel.

El problema, *¿cuántos afinadores de piano hay en Chicago?* es el ejemplo más utilizado para mostrar las características de los problemas de Fermi. En este caso se puede estimar la solución a partir de dividir el problema en sub-problemas más pequeños que pueden resolverse por separado a partir de estimaciones razonadas. Algunos de los valores relevantes a estimar son el número de casas que hay en Chicago, el porcentaje de estas que poseen piano, el número de horas necesarias para afinar un piano o la jornada anual total de un afinador de pianos. La resolución completa del problema se puede consultar en García Navarro (2013). Se pueden encontrar otros ejemplos de problemas de Fermi en Weinstein (2008, 2012).

La definición de problema de Fermi que ofrece Ärlebäck (2009) es la siguiente:

> Open, non-standard problems requiring the students to make assumptions about the problem situation and estimate relevant quantities before engaging in, often, simple calculations. (p. 331)

Carlson (1997) describe el proceso de resolución de un problema de Fermi como “the method of obtaining a quick approximation to a seemingly difficult mathematical process by using a series of educated guesses and rounded calculations” (p. 308). Por su parte, Efthimiou y Llewellyn (2007) caracterizan los problemas de Fermi afirmando que siempre parecen difusos en su planteamiento, dando poca información concreta o pocos aspectos relevantes para iniciar la resolución, pero que se pueden descomponer en problemas sencillos que permiten llegar a la solución de la pregunta original. De esta forma, los problemas de Fermi se caracterizan esencialmente por presentar una pregunta abierta y sin excesivos detalles y los caracteriza especialmente el formato de su resolución, basada en realizar estimaciones de varias cantidades. Robinson (2008) relaciona este proceso de resolución específico con la creación de modelos matemáticos:

> [i]n order to solve a Fermi problem, one has to synthesize a physical model, examine the physical principles which are in operation, determine other constraints such as boundary conditions, decide how simple the model can be while still maintaining some realism, and only then apply some rough estimation to the problem. (p. 83)

Por su parte, Ärlebäck (2011) afirma que el trabajo con problemas de Fermi puede ser útil para introducir la modelización en las aulas porque son accesibles para alumnos de diferentes etapas educativas, no requieren un tipo concreto de conocimiento matemático previo y obligan a los alumnos a especificar la estructura matemática de la información relevante. Otro argumento para la introducción de problemas de Fermi en las aulas es la posibilidad de utilizarlos como puente entre las matemáticas y otras materias escolares, acercando a los estudiantes a diferentes tareas interdisciplinarias (Sriraman y Lesh, 2006). También permiten incorporar diferentes problemáticas sociales de interés, como estimaciones de agua potable consumida, consumos de gasolina u otros combustibles, cantidades de comida desechadas y otros tipos de problemas de tipo ecológico (Sriraman y Knott, 2009).

Los problemas de Fermi se han utilizado mayoritariamente en estudios universitarios de Ciencias Físicas, aunque se ha sugerido su uso en otros ámbitos científicos, con el objetivo de conectar el conocimiento matemático con las problemáticas de interpretación de fenómenos en otras ramas científicas, tal y como describe White (2004) en el estudio de moléculas en el ámbito de la Bioquímica. Como ya hemos señalado, se han utilizado los problemas de Fermi en las aulas de Educación Secundaria. En García Navarro (2013) y Albarracín y Gorgorió (2013b) se pueden encontrar propuestas didácticas basadas en el uso de este tipo de problemas.

A pesar de lo expuesto, los problemas de Fermi han sido poco utilizados en Educación Primaria, aunque los indicios hacen pensar que su adaptabilidad a diferentes niveles educativos debería permitir dinámicas de aula ricas. Las únicas referencias relacionadas con el estudio de Problemas de Fermi en los niveles de Educación Primaria es el trabajo de Peter-Koop (2005) que propone su uso sin analizar con detalle el tipo de estrategias que utilizan los alumnos.

OBJETIVO DEL ESTUDIO

En este estudio nos planteamos utilizar los Problemas de estimación de grandes cantidades (PEGC) como actividades de aula en el ciclo superior de Educación Primaria para estudiar si los alumnos los resuelven a partir de un procesos de modelización matemática. En concreto, nuestro objetivo es identificar elementos de modelización en las producciones de aula de alumnos de Educación Primaria al resolver PEGC.

METODOLOGIA

En las siguientes secciones detallamos los aspectos metodológicos del estudio, detallando la población participante, el tipo de actividades y problemas utilizados, y el formato de los datos recogidos.

Participantes

Los datos de este estudio se recogen a partir de las producciones de alumnos de 5º y 6º cursos de Educación Primaria (entre 10 y 12 años) de tres centros diferentes que trabajan en grupos de 3 o 4 alumnos. La tabla 1 muestra el número de alumnos para cada uno de los tres centros en los que se realizó la actividad y el número de grupos de trabajo en los que se distribuyeron.

Tabla 1. Número de alumnos de cada centro y número de grupos de trabajo

	Número de alumnos	**Grupos de trabajo**	**Curso**
Centro 1	10	3	5º
Centro 2	15	4	5º
Centro 3	26	7	6º
Total	63	14	

Problemas

Para este estudio utilizamos diferentes Problemas de estimación de grandes cantidades (PEGC), que son un tipo concreto de Problemas de Fermi (Albarracín y Gorgorió, 2014). El uso de grandes cantidades dificulta los recuentos exhaustivos o las mediciones directas, con lo que los alumnos necesitan desarrollar estrategias alternativas para justificar sus estimaciones. Para diseñar las actividades se han utilizado problemas contextualizados en el propio centro educativo de los alumnos considerando que la familiaridad con el contexto debería promover que los problemas sean más interesantes y accesibles, así como permitir que se pudieran efectuar las mediciones oportunas en un lugar accesible.

Los problemas utilizados, en abstracto, son los siguientes:

- **Tipo A:** Estimación de la cantidad de personas que se pueden disponer en una cierta superficie.
- **Tipo B:** Estimación de la cantidad de objetos que se pueden disponer en una cierta superficie o volumen.

En cada una de las actividades se dieron enunciados contextualizados para los problemas. En los problemas de tipo A se pregunta por la cantidad de personas que caben en una determinada superficie y están contextualizados a partir del uso de una imagen que sitúa la zona en la que debe disponerse la gente. Por ejemplo, la figura 1 muestra uno de los enunciados propuestos para los problemas de tipo A.

Los enunciados de los problemas de tipo B tienen la misma estructura, pero la naturaleza de los objetos involucrados en los problemas es variada. La figura 2 muestras los enunciados concretos de dos problemas de tipo B en los que se debe estimar la cantidad de objetos en un espacio.

¿Cuánta gente cabe en este porche?

Figura 1. El enunciado de un problema de tipo A (personas).

¿Cuántos folios hay en un montón como el que está en la mesa del maestro?

¿Cuántos libros hay en estas estanterías?

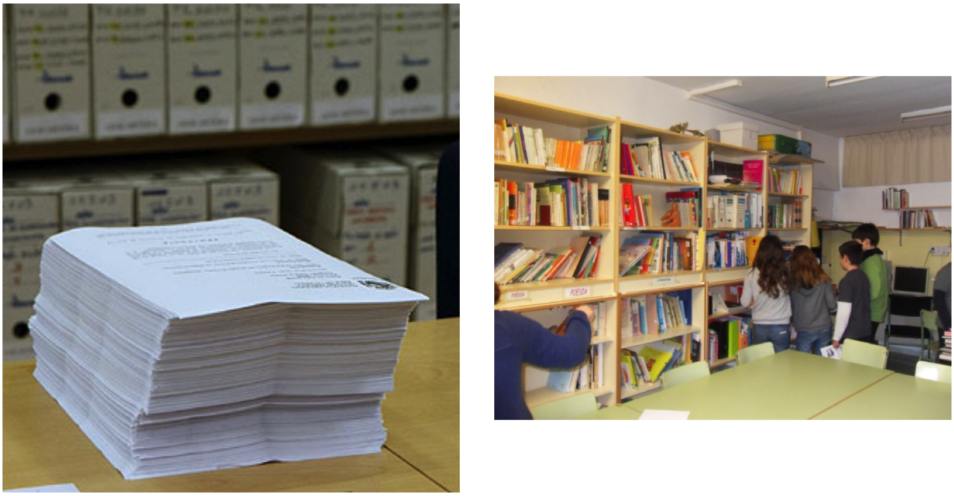

Figura 2. El enunciado de dos problemas de tipo B (objetos).

La lista completa de los problemas de tipo B propuestos es la siguiente:

- ¿Cuántos folios hay en un montón como el que está en la mesa del maestro?
- ¿Cuántos libros hay en las estanterías de la biblioteca?
- ¿Cuántos ladrillos hay en esta pared?
- ¿Cuántas pelotas de fútbol caben en el círculo central de la pista deportiva?
- ¿De cuántos cuadrados está formada la red que impide que las pelotas de fútbol se escapen de la pista?

En las actividades de aula también se propusieron problemas relacionados con la estimación y medida indirecta de alturas de varios objetos, pero no se incluyen en el análisis de este artículo por pertenecer a otra naturaleza de problemas.

Diseño de las actividades y datos recogidos

Cada una de las experiencias realizadas se basa en el trabajo con una secuencia de 4 PEGC procurando que los alumnos traten de resolver tanto problemas de tipo A como de tipo B, dando enunciados localizados para cada aula o centro educativo. En el aula los alumnos trabajan en grupos de 3 o 4 personas durante dos sesiones. En la primera sesión se plantean los problemas a los alumnos, se les pide que diseñen un plan de acción para resolverlos y se les deja tiempo para que afronten el proceso de resolución y hagan las mediciones que consideren oportunas. En la segunda sesión los alumnos escriben en un informe grupal los procesos seguidos y los resultados obtenidos. El trabajo acaba con una puesta en común de los resultados de los alumnos.

Durante las sesiones, el papel del profesor de aula es de guía, responde a dudas sobre los enunciados promoviendo el trabajo en el aula sin proporcionar ayudas específicas para la resolución de los problemas.

Los datos que analizamos son las producciones escritas de los alumnos para la resolución de cada problema planteado. Para complementar las producciones escritas en el informe de grupo de los alumnos y clarificar determinados aspectos del análisis se utilizaron las notas de campo que tomaron los maestros presentes en cada aula. En total se recogieron 36 resoluciones escritas a los diferentes problemas. La tabla 4 recoge el número de resoluciones obtenidas para cada tipo de problemas.

Tabla 2. Número de resoluciones recogidas para cada tipo de problema.

	Tipo A	Tipo B
Número de resoluciones	16	20

ANÁLISIS

Para analizar las resoluciones de los problemas se han tenido en cuenta los antecedentes de esta investigación en cuanto a las diferentes estrategias de resolución y modelos detectados en la resolución de PEGC (Albarracín y Gorgorió, 2013a; 2014). Cada resolución recogida contiene una serie de acciones y decisiones previas que llevan al uso de procedimientos y conceptos matemáticos concretos. Estos procedimientos y conceptos usados pueden ser recuentos, medidas directas o estimaciones que se apoyan en una forma determinada de interpretar el fenómeno estudiado.

En este estudio utilizamos un instrumento de análisis que ya nos ha permitido previamente detectar estrategias de resolución basadas en la elaboración de un modelo matemático (Albarracín y Gorgorió, 2013a). Estos modelos se basan en una visión concreta del fenómeno estudiado y van acompañados de los procedimientos necesarios para utilizarlo en ese caso concreto. Las estrategias de resolución de PEGC detectadas son las siguientes:

- Recuento exhaustivo: la estrategia de los alumnos es contar uno por uno todos los elementos del conjunto de objetos.
- Fuente externa: los alumnos delegan la responsabilidad de dar una respuesta al problema a un tercero que debería poseer la información necesaria.
- Reducción y uso de una proporción: los alumnos consideran el problema inicial y intenta resolver un problema equivalente con valores más pequeños para responder al problema inicial utilizando un factor de proporción entre las dos situaciones.
- Medidas de concentración: se basa la resolución en determinar la cantidad de personas u objetos distribuidos en una porción de superficie concreta que ellos mismos determinan.
- Punto de referencia: los alumnos determinan la superficie total del lugar en el que se encuentran las personas u objetos a estimar y lo dividen entre la superficie que ocupa un solo objeto, que actúa como un *punto de referencia* (Joram, Gabriele, Bertheau, Gelman y Subrahmanyam, 2005).
- Distribución en cuadrícula: los alumnos utilizan una imagen mental de distribución de las personas u objetos a estimar en forma de cuadrícula, estiman el número de ellos para cada dimensión (altura y ancho en los casos de superficies) y utilizan la regla del producto para establecer un resultado.

A continuación mostramos el tipo de datos con los que trabajamos, recogidos de uno de los grupos, en concreto un grupo de 6º de Primaria que trata de estimar el número de personas que caben en la pista del patio de su centro. La figura 3 muestra a los alumnos contando el número de personas que caben en media pista a partir de contar pasos tanto a lo largo como a lo ancho del patio.

La figura 4 muestra los cálculos realizados por los alumnos, en los que se pueden observar sus resultados parciales (50 personas en el largo y 25 en el ancho del patio). Como sus datos se refieren a media pista, multiplican el resultado por 2.

Observamos que su resolución se basa en una distribución teórica de personas en el patio en forma de cuadrícula, que es la base conceptual del modelo matemático que utilizan para decidir las medidas necesarias. En este caso los procesos necesarios son el recuento de pasos, como unidad de medida del espacio que ocupa una persona, y el uso de la regla del producto como procedimiento de cálculo final.

Figura 3. Cada paso es una persona.

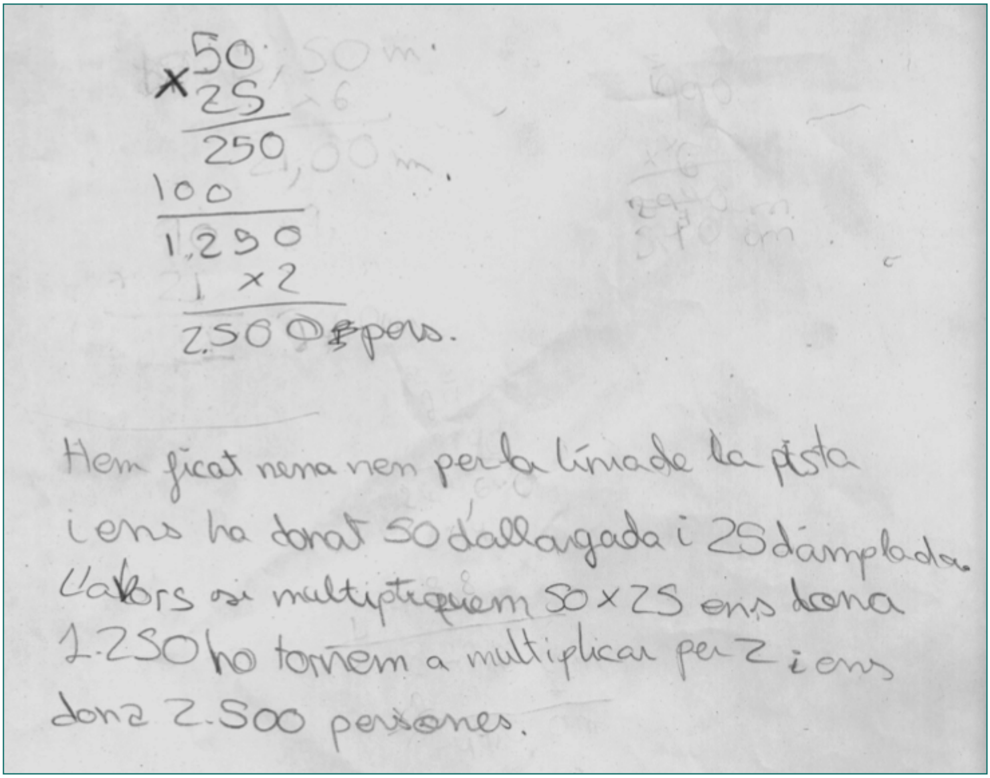

Figura 4a y 4b. La regla del producto en las producciones de los alumnos.

RESULTADOS

En esta sección detallamos las estrategias utilizadas por los alumnos y los modelos detectados para cada tipo de problemas.

Problemas de tipo A

La tabla 3 recoge las estrategias detectadas en la resolución de los problemas de tipo A, en los que los alumnos deben estimar la cantidad de personas que caben en un determinado espacio:

Tabla 3. Estrategias detectadas para los problemas de tipo A

Estrategia	Número de resoluciones
Densidad de población	1
Regla del producto	12
Punto de referencia	3
Total	16

A partir de los resultados obtenidos podemos afirmar que los alumnos basan sus estrategias de resolución en modelos matemáticos que simplifican y explican la situación a estudiar. Observamos que para estos alumnos la distribución de personas en forma de cuadrícula, como la presentada en el apartado anterior, es el modelo preponderante que permite describir y analizar los problemas propuestos. En estudios anteriores (Albarracín y Gorgorió, 2014) observamos que la incidencia de esta estrategia es menor en alumnos de Educación Secundaria Obligatoria (12-16 años).

Debemos destacar que no todos los alumnos aplican los métodos propuestos de la misma forma y que algunos grupos introducen matices en su resolución que merecen ser destacados. Dos de los grupos utilizan las baldosas del suelo del espacio en el que se propone el problema determinando el número de baldosas que ocupa una persona y cuentan baldosas a partir de la regla del producto. Otros de los grupos establecen el espacio requerido por una persona a partir de la longitud de un paso, con lo que obtienen una forma rápida y efectiva de contar el número de personas que caben en cada dimensión del espacio propuesto. Un grupo agiliza este proceso estimado el número de personas que caben en media pista y multiplicando el resultado por dos.

Problemas de tipo B

La tabla 4 muestra las estrategias detectadas en la resolución de los problemas de tipo B, en los que los alumnos deben estimar la cantidad de objetos (folios, pelotas, libros...) que caben en un determinado espacio:

Tabla 4. Estrategias detectadas para los problemas de tipo A

Estrategia	Número de resoluciones
Regla del producto	10
Punto de referencia	3
Reducción a un problema más pequeño	6
Fuente externa	1
Total	16

Dado que este tipo de problemas es más variado en su formulación que los problemas de tipo A puesto que las naturalezas de los objetos a contar es diferente, observamos una mayor variedad en las estrategias propuestas. En este caso la regla del producto sigue siendo la estrategia preferida, pero observamos que diferentes grupos proponen reducir el problema inicial a uno más pequeño y aplicar una proporción.

En el caso del problema de estimar el número de folios que forman un montón, encontramos que los alumnos reducen el problema de dos formas diferentes, que se relacionan con dos formas distintas de entenderlo. Una opción es contar el número de folios necesarios para llegar a una altura determinada (1 cm, por ejemplo) y la otra es medir la altura de una cierta cantidad de folios. Los que utilizan esta segunda opción no calculan en ningún momento el grosor de un folio, que sería la unidad de medida que acaban utilizando los primeros. De esta forma vemos que las dos opciones, que son matemáticamente equivalentes, contienen diferencias desde el punto de vista didáctico, ya que la primera de las propuestas podría enlazarse directamente con la idea de establecer una unidad de medida, por lo que nos parece una actividad interesante para desarrollar en el aula.

Por otra parte, los alumnos tratan de resolver el problema de estimar el número de libros en las estanterías de la biblioteca reduciendo la situación a un problema más pequeño y manejable. Eligen una pequeña muestra de estantes, entre 2 y 4, y cuentan el número de libros que los contienen. A partir de estos datos aplican un factor de proporcionalidad entre la parte de la biblioteca que han contado y el total. Nuevamente, observamos que los alumnos no calculan el número medio de libros que contiene cada estante. Al mismo tiempo, uno de los grupos considera que la pregunta no tiene sentido, ya que el problema se encuentra resuelto en la catalogación de los libros y se limita a responder que el responsable de la biblioteca ya tiene la respuesta.

Un problema cuya resolución genera grandes dificultades a los alumnos es el que requiere estimar el número de pelotas de fútbol que caben en el círculo central de la pista deportiva. En este caso, la presencia de circunferencias para medir genera confusiones entre los conceptos de área y perímetro en los alumnos que optan por utilizar un punto de referencia como unidad base. Por su parte, un grupo trata de resolver el problema utilizando la regla del producto a partir de una disposición en forma de rejilla cuadricular de las pelotas, pero al tratarse de un espacio circular confunden el ancho y el largo de la superficie con su perímetro.

Finalmente, en el problema del recuento de ladrillos de una pared, los alumnos usan de forma exclusiva la regla del producto, pero la combinan con una reducción del problema para realizar recuentos más rápidos. En concreto, 4 de los 6 grupos que resuelven el problema combinan estas dos estrategias.

CONCLUSIONES

Los resultados obtenidos en este estudio nos permiten afirmar que los alumnos del tercer ciclo de Educación Primaria (10-11 años) pueden enfrentarse a los Problemas de estimación de grandes cantidades propuestos. De hecho, en sus resoluciones grupales introducen numerosos elementos que permiten confirmar el uso de modelos matemáticos involucrados. En este sentido coincidimos con Peter-Koop (2005) cuando establece la posibilidad de usar Problemas de Fermi en las aulas de Educación Primaria.

Entre los modelos detectados en este estudio destaca el uso de la regla del producto, basado en la distribución en cuadrícula de objetos, que parece la forma predominante de enfrentarse a este tipo de problemas para los alumnos de Educación Primaria. En estudios anteriores (Albarracín y Gorgorió, 2013a; 2014) no hemos observado esta preponderancia tan marcada, con lo que intuimos que la regla del producto puede plantearse como modelo para introducir conceptos como la densidad de población, aunque consideramos que se debería estudiar con más detalle la forma en la que evoluciona el uso de estas estrategias con la edad de los alumnos. También hemos detectado otros modelos matemáticos en las resoluciones de los alumnos como el uso de la reducción a un problema más pequeño, el uso de un punto de referencia y la densidad de población. En línea con lo que afirma Ärlebäck (2011), hemos corroborado que los PEGC, en tanto que problemas de Fermi, pueden ser útiles para introducir la modelización en las aulas y podemos afirmamos que son accesibles para alumnos de Educación Primaria sin requerir un tipo concreto de conocimiento matemático previo.

Algunos de los modelos detectados en las resoluciones de los alumnos se relacionan con diferentes conocimientos que utilizarán los alumnos en diversas materias escolares más allá de las matemáticas, como es el caso de la establecer unidades o un punto de referencia, o la densidad de población. Por ello consideramos que las secuencias de PEGC se muestran como una opción válida y interesante para introducir estos conceptos a los alumnos de Educación Primaria.

A partir del análisis de las resoluciones de los alumnos y de las estrategias utilizadas, consideramos que los problemas de tipo A son más asequibles para ellos y permiten iniciar el trabajo con este tipo de problemas. Por ello proponemos elaborar secuencias de PEGC que se inicien con la resolución en el aula o el centro escolar de alguno de estos problemas para posteriormente afrontar la resolución de diversos problemas de tipo B, que demandan a los alumnos diferentes formas de acercarse a las estimaciones requeridas en función de las características de los objetos a cuantificar.

REFERENCIAS

Albarracín, L., y Gorgorió, N. (2013a). Problemas de estimación de grandes cantidades: modelización e influencia del contexto. RELIME. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *16*(3), 289-315.

Albarracín, L. y Gorgorió, N. (2013b). Problemas de estimación de magnitudes no alcanzables: una propuesta de aula a partir de los modelos generados por los alumnos. *Modelling in Science Education and Learning* 6, 33-48

Albarracín, L., y Gorgorió, N. (2014). Devising a plan to solve Fermi problems involving large numbers. *Educational Studies in Mathematics*, 86(1), 79-96.

Ärlebäck, J. B. (2009). On the use of realistic Fermi problems for introducing mathematical modelling in school. *The Montana Mathematics Enthusiast*, 6(3), 331– 364.

Ärlebäck, J. B. (2011). Exploring the solving process of groups solving realistic fermi problem from the perspective of the anthropolgical theory of didactits. En M. Pytlak, E. Swoboda y T. Rowland (Eds.) *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME7)* (pp. 1010–1019). Rzeszów: University of Rzeszów, Poland.

Blum, W., y Borromeo Ferri, R. B. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, *1*(1), 45-58.

Booth, J. L. y Siegler, R. S. (2006). Developmental and individual differences in pure numerical estimation. *Developmental Psychology*, 41(6), 189–201.

Borromeo, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM*, 38(2), 86–95.

Carlson, J. E. (1997). Fermi problems on gasoline consumption. *The Physics Teacher*, *35*, 308-309.

Efthimiou, C. J., y Llewellyn, R. A. (2007). Cinema, Fermi problems and general education. *Physics education*, *42*(3), 253.

Esteley, C. B., Villarreal, M. E., y Alagia, H. R. (2010). The overgeneralization of linear models among university students' mathematical productions: A long-term study. *Mathematical Thinking and Learning*, *12*(1), 86-108.

García, J. M. (2013). Problemas de Fermi. Suposición, estimación y aproximación. *Epsilon, 30*(2), 57-68.

Hogan, T. P. y Brezinski, K. L. (2003). Quantitative estimation: One, two, or three abilities? *Mathematical Thinking and Learning*, 5(4), 259–280.

Joram, E., Gabriele, A. J., Bertheau, M., Gelman, R., y Subrahmanyam, K. (2005). Children's use of the reference point strategy for measurement estimation. *Journal for Research in Mathematics Education*, 4-23.

Jurdak, M. E. (2006). Contrasting perspectives and performance of high school students on problem solving in real world situated, and school contexts. *Educational Studies in Mathematics*, 63(3), 283–301.

Lesh, R. y Harel, G. (2003). Problem solving, modeling, and local conceptual development. *Mathematical Thinking and Learning*, 5(2), 157—189.

OECD. (2014a). *PISA 2012 results: Creative problem solving: students' skills in tackling real-life problems (Volume V)*. PISA, OECD Publishing.

OECD. (2014b). *PISA 2015: Draft collaborative problem solving framework.* PISA, OECD Publishing.

Peter-Koop, A. (2005). Fermi Problems in Primary Mathematics Classrooms: Fostering Children's Mathematical Modelling Processes. *Australian Primary Mathematics Classroom*, *10*(1), 4.

Rasmussen, C. L., y King, K. D. (2000). Locating starting points in differential equations: a realistic mathematics education approach. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 31,* 161-172. doi: 10.1080/002073900287219

Robinson, A. W. (2008). Don't just stand there—teach Fermi problems! *Physics Education, 43* (1), 83-87.

Segovia, I., Castro, E., Castro, E. y Rico, L. (1989). *Estimación en Cálculo y Medida*. Madrid, España: Síntesis.

Sriraman, B. y Lesh, R. (2006). Modeling conceptions revisited. *ZDM The International Journal on Mathematics Education*, *38*(3), 247– 254. DOI: 10.1007/BF02652808

Sriraman, B., y Knott, L. (2009). The mathematics of estimation: Possibilities for interdisciplinary pedagogy and social consciousness. *Interchange*, *40*(2), 205-223.

Weinstein, L. (2008). *Guesstimation: Solving the World's Problems on the Back of a Cocktail Napkin*. Princeton University Press.

Weinstein, L. (2012). *Guesstimation 2.0: Solving Today's Problems on the Back of a Napkin*. Princeton University Press.

White (2004). Math Literacy. *Biochemistry and Molecular Biology Education, 32*(6), 410–411.