

## Resolución de operaciones matriciales con papel

Josué Francisco Gracia Rodríguez

Alumno de Master de la Universidad de Córdoba

**Resumen:** *A lo largo de los años se han utilizado toda clase de métodos tradicionales para que los alumnos de los diferentes centros comprendan las propiedades de las matrices y su utilidad. En este artículo se ofrece un método alternativo e innovador con la que enfocar el cálculo de los determinantes de una matriz y el cálculo de la matriz traspuesta.*

**Palabras Clave:** *: Innovación docente, Matrices, didáctica de la matemática*

## Resolution of matrix operations with paper

**Abstract:** *Over the years we have used all kinds of traditional methods for students from different schools understand the matrix properties and its usefulness. In this article we give an alternative and innovative method with which to approach the calculation of the determinants of a matrix and the calculation of its transposed.*

**Keywords:** *Teaching innovation, Matrix, mathematics education,*

### MARCO TEORICO

Basándome en el artículo *historia del álgebra*.

El origen de las matrices surge antes de cristo, estudiándose tanto los cuadrados latinos como los cuadrados mágicos. El primer cuadrado mágico que se registra, 3 por 3, fue en la literatura sobre el 650 a. C.

Su principal uso a lo largo de la historia se debe a la resolución de ecuaciones lineales. Un importante texto matemático chino que proviene del año 300 a. C. a 200 a. C., *Nueve capítulos sobre el Arte de las matemáticas* (Jiu Zhang Suan Shu), es el primer ejemplo conocido de uso del método de matrices para resolver un sistema de ecuaciones simultáneas. El concepto de determinante apareció por primera vez, dos mil años antes de que el matemático japonés Seki Kōwa en 1683 y el matemático alemán Gottfried Leibniz en 1693 lo publicaran.

Por otro lado, los *cuadrados mágicos* se estima que eran conocidos por matemáticos árabes desde comienzos del siglo VII, quienes a su vez pudieron tomarlos de los

matemáticos y astrónomos de la India. Esto nos hace pensar que la idea provino de China. Los primeros *cuadrados mágicos* de orden 5 y 6 se registraron en Bagdad en el 983, en la Enciclopedia de *la Hermandad de Pureza (Rasa'il Ihkwan al-Safa)*.

Más tarde, a finales del siglo XVII, Seki Kowa y Leibniz desarrollarían la teoría de los determinantes para facilitar la resolución de ecuaciones lineales, Cramer, por su parte, presentó en 1750 la ahora denominada regla de Cramer (teorema del álgebra lineal que da la solución de un sistema lineal de ecuaciones en términos de determinantes).

En 1848/1850, James Joseph Sylvester utilizó por primera vez el término *matriz*. En 1857, Cayley introdujo la notación matricial, como forma abreviada de escribir un sistema de  $m$  ecuaciones lineales con  $n$  incógnitas.

En 1925, Werner Heisenberg redescubre el cálculo matricial fundando una primera formulación de lo que iba a pasar a ser la mecánica cuántica por lo que se denominaría el padre de la mecánica cuántica. Olga Taussky-Todd (1906-1995), durante la II Guerra Mundial, usó la teoría de matrices para investigar el fenómeno de aeroelasticidad llamado *fluttering*.

Resumiendo, Cayley, Hamilton, Hermann Grassmann, Frobenius, Olga Taussky-Todd y John von Neumann son algunos de los matemáticos que trabajaron sobre la teoría de las matrices.

Pero con toda esta historia, ¿Qué dice el **currículum** español a cerca de las matrices?

El Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato, publicada en el BOE número 3 del 3 de Enero del 2015, establece en la página 388 y 421 de dicho boletín que tanto las matemáticas para ciencias sociales como para las de ciencias tendrán como estudio las matrices en el bloque de álgebra para el curso de 2º de bachiller.

En cuando a **innovación** se refiere: el BOJA en la Resolución de 12 de enero de 2015, de la Dirección General de Innovación Educativa y Formación del Profesorado, por la que se regulan las medidas de aprobación y acreditación de proyectos de investigación e innovación y desarrollo curricular, y de elaboración de materiales curriculares y recursos didácticos.

Los criterios de evaluación por tanto se definen como:

- Interés educativo del proyecto atendiendo a la mejora de los rendimientos escolares del alumnado y al carácter integrador.

Proponer la introducción de cambios innovadores en la práctica docente o en la vida del centro para la mejora de los resultados y de los procesos educativos del centro, ya sean de tipo curricular, organizativo o función.

## Propuesta

Las matrices son utilizadas sin darnos cuenta a lo largo de nuestra vida en infinidad de cosas, por ejemplo, las personas que tienen una empresa con varias sedes y en cada una de ellas se venden varios productos. Este ejemplo es el más característico ya que cada tienda podría responder a una fila y cada columna al precio de los diferentes productos que se ofertan en dicha tienda. Por tanto, daría lugar a un sistema de ecuaciones lineales, donde para su resolución necesitaríamos los determinantes.

Basándonos en la teoría de los determinantes:

- Dada una matriz cuadrada de orden 3, se llama determinante de  $A$  y se representa con  $|A|$  al número:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$|A| = a_{11} * a_{22} * a_{33} + a_{12} * a_{23} * a_{31} + * a_{13} * a_{21} * a_{32} - (a_{13} * a_{22} * a_{31} + a_{12} * a_{21} * a_{33} + a_{11} * a_{23} * a_{32})$$

Tradicionalmente, esta explicación y su respectiva ecuación se obtenían tras realizar una serie de líneas sobre la matriz que en muchas ocasiones dificulta su comprensión. La propuesta que se propone para abordar este problema desde un punto de vista más innovador es la siguiente:

Representaremos la matriz a averiguar el determinante en un folio, sería conveniente que dicha representación abarcara todo el folio o papel utilizado para ello. A continuación, plegaremos dicho folio formando un cilindro. Por tanto, la columna final o  $n$  estará precedida por la columna inicial o 1. Una vez acabado solo tendremos que usar diagonales completas, entendiendo este término con que no existirán saltos entre columnas, para obtener la misma fórmula que la anteriormente comentada. La figura 1 nos muestra la matriz de prueba, mientras que la figura 2 mostraría el resultado obtenido al construir el cilindro con papel.

La segunda propuesta que se plantea es para el calcular la matriz traspuesta. Antiguamente la trasposición se usaba como medio de criptografía para enviar mensajes. Este método fue utilizado por los éforos espartanos, denominado Escítala, y se basaba en la trasposición de dichos mensajes.

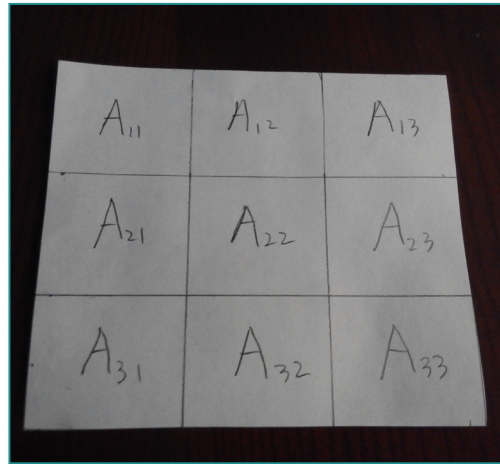


Figura 1.

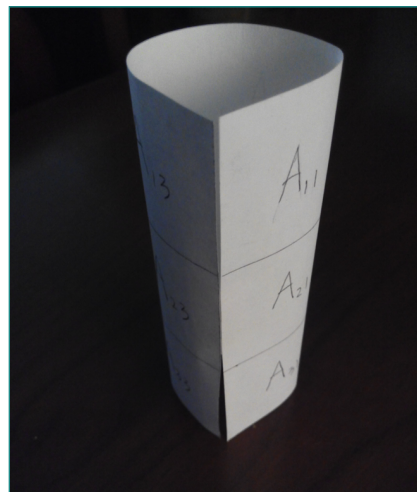


Figura 2.

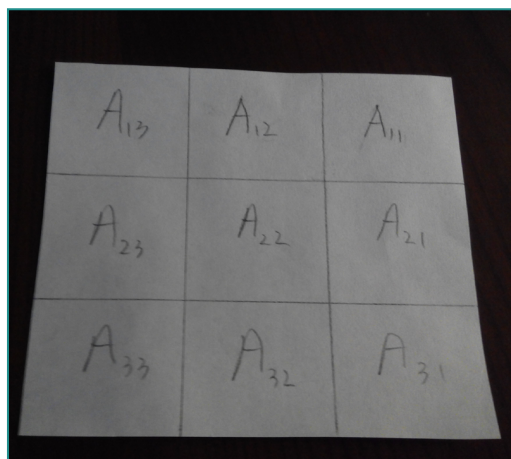


Figura 3.

En el caso de las matrices, la trasposición que se utiliza es de  $90^\circ$ , para hacerlo más visual y conseguir una mayor comprensión de dicho proceso se propone como medio de innovación la utilización de un papel de cebolla donde representamos la matriz o en su defecto un folio donde ambas caras poseerán la misma matriz de tal forma que por una cara tendremos la matriz y por la otra cara tendremos dicha matriz vista desde un espejo. La figura 3 muestra la matriz vista desde la cara contraria.

Tras tener representada dicha matriz bastará con realizar un giro al material utilizado para la representación (folio, papel de ajo, etc), dicho giro será de  $180^\circ$  sobre la diagonal principal pa-

sando de ver la cara  $A$  a la cara  $B$  de dicho material. La ilustración siguiente muestra el resultado obtenido al girar la matriz principal (Figura 1) como se comentaba.

Este método servirá para cualquier tipo de matriz (cualquier dimensión) y ayudará a evitar posibles fallos en la transición de los datos. Por ejemplo, si tenemos una matriz de  $3 \times 6$  podemos cometer el error que un elemento de la matriz se coloque en una posición contraria a la que debería, pero con este método no ocurrirá nunca.

## CONCLUSIÓN

Con estos 2 métodos que se presentan se ofrece una versión nueva e innovadora a un proceso en ocasiones bastante lioso para los alumnos. Con el primer método conseguimos disminuir el número de líneas para hallar el determinante, hacer el proceso del cálculo más sencillo y más intuitivo, además de ayudar a los alumnos a calcular dicho determinante de una forma más rápida y ágil que de la forma tradicional.

Con el segundo método que se propone, también se consigue una mayor velocidad en el cálculo de la matriz traspuesta y para los alumnos supondrá una perspectiva adicional que les ayude en su comprensión. Además, evitará errores cuando la matriz sea de mayores dimensiones a  $3 \times 3$ .

## REFERENCIAS

- Luzardo D., Peña A.J.(2006). Historia del Algebra Lineal hasta los Albores del Siglo XX. *Divulgaciones Matemáticas*. 14 (2),153–170.  
Swaney M. (2004). History of Magic Squares. <http://arthurmag.com/2004/02/16/na-84/>.