

## PINTURAS ANAMÓRFICAS

Daniel Cavalcante Oliveira - Guy Grebot  
dcavalcante23@gmail.com - guy@mat.unb.br  
Universidade de Brasília, Brasil

Tema: Enseñanza Experimental de la Matemática.

Modalidade: T

Nível educativo: Medio (11 a 17 anos)

Palavras-chave: geometria projetiva, pintura anamórfica, modelagem, perspectiva

### Resumo

*O objetivo desta oficina é, através de observações e experimentações, fazer com que o aluno desenvolva os conceitos matemáticos da geometria projetiva e os relacione com o desenho anamórfico. Uma pintura anamórfica é uma pintura feita em pelo menos uma tela que, vista de certo ponto, nos dá a impressão do objeto estar interagindo com o resto do ambiente. A oficina está baseada numa sequência didática, direcionada aos alunos de ensino básico, desenvolvida sob as óticas da resolução de problemas e da modelagem matemática. O problema motivador da sequência é o entendimento da pintura anamórfica e sua construção. Através de experimentações, os alunos são levados a selecionar dados relevantes que serão usados na modelagem do problema. Entre os objetivos da sequência está o desenvolvimento de habilidades tais como a percepção tridimensional, a percepção de profundidade e sua representação, assim como a representação de proporções, distâncias e efeitos de luz e sombra. Os conteúdos matemáticos abordados e trabalhados são as propriedades projetivas do espaço euclidiano tridimensional, resultados da geometria projetiva e transformações (projeções centrais). Também são trabalhadas técnicas de desenhos em perspectiva. Esta sequência didática foi desenvolvida no âmbito do programa PIBID/CAPES do Departamento de Matemática da Universidade de Brasília.*

### Introdução

Motivado pela construção de pinturas anamórficas, elaboramos uma sequência didática que aborda conteúdos de geometria a partir da experiência e da observação baseada na metodologia de resolução de problemas e na modelagem matemática.

A pintura anamórfica nada mais é que um desenho que, quando visualizado de um ponto específico, nos dá a impressão de interagir com o ambiente. Em outras palavras, nos dá a impressão de ser tridimensional. Essas pinturas são também conhecidas como *3D-painting* ou *street painting*, por serem frequentemente desenhadas sobre ruas de algumas cidades.

O conceito intimamente ligado à pintura anamórfica é o de desenho em perspectiva. A perspectiva é a técnica usada pelos artistas para representar imagens tridimensionais em uma tela bidimensional (Artyfactory). O exemplo mais simples de tal representação é uma fotografia.

“Foi na busca à produção de quadros mais realistas, que artistas e arquitetos renascentistas passaram a interessar-se pelo estudo das leis que regem a construção de projeções sobre uma tela.” (Kobayashi, 2001).

Existem vários aspectos ligados ao desenho em perspectiva e sua qualidade em representar algo tridimensional. Há características fundamentais que estão implícitas em um desenho em perspectiva e que fazem parte da técnica de desenho. A sobreposição (ou oclusão espacial) se dá pela oclusão parcial de um objeto em relação a outro, ou seja, se um se sobrepõe parcialmente a outro, então um está mais próximo que o outro. A perspectiva aérea (nitidez) acontece devido ao fato de partículas atmosféricas muito pequenas interferirem sobre a luz, fazendo com que objetos mais distantes sejam menos detalhados, (Schiffman, 2005). O efeito da sombra sobre o desenho é outro aspecto relevante e é tão importante a ponto de afetar a interpretação de quem observa o desenho.

“O sistema visual desenvolveu a capacidade de tirar proveito das informações que há na luz ambiental – registrar o arranjo espacial de objetos e superfícies.” (Schiffman, 2005)

O ensino da geometria constitui parte importante do currículo de matemática no ensino fundamental, pois segundo os PCNs de Matemática (BRASIL, 1998), por meio dele o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. A geometria é um campo fértil para se trabalhar com situações-problema e é um tema pelo qual os alunos costumam se interessar naturalmente.

Em particular, a geometria projetiva desenvolve no aluno um outro modo de enxergar seu ambiente, pois esta está na base das representações observadas. Esta geometria nasceu das artes e da procura por representações artísticas mais realistas. Por outro lado, a importância da compreensão e desenvolvimento do desenho em perspectiva pelo aluno se deve ao fato de tal desenho possuir características que são resultados do estudo da geometria projetiva no espaço e das transformações geométricas. Dessa forma, desenho em perspectiva e geometria projetiva estão intrinsecamente relacionados.

A seguir, descreve-se a pesquisa realizada a respeito do tópico em questão, a metodologia subjacente à sequência didática e as atividades que a compõem. Por fim, expomos os resultados da aplicação da sequência didática e colocamos nossas conclusões.

### **Pesquisa**

O objeto que motivou a pesquisa sobre geometria projetiva foi a pintura anamórfica.

A relação entre a pintura anamórfica e a geometria se dá através da projeção central. Tal projeção é uma aplicação que relaciona pontos em um plano a pontos em um outro plano através de um ponto, chamado de centro da projeção e que não está contido em nenhum dos planos mencionados. Assim, a pintura anamórfica é a projeção (ou imagem) de um desenho em perspectiva por uma projeção central. Neste caso, o chão em que se encontra a pintura faz o papel de plano de projeção e o que enxergamos é o plano de domínio, onde se encontra o desenho em perspectiva.

No desenho em perspectiva, existe uma reta especial chamada de reta de fuga que é tal que retas paralelas no ambiente observado, quando projetadas para a tela ou fotografia, concorrem em um de seus pontos (D'Amelio, 1964). Estendendo este conceito, concluímos com base em resultados da geometria projetiva (Coxeter, 1974), que um conjunto de retas paralelas em um mesmo plano no ambiente a ser projetado, concorrem no mesmo ponto. Portanto, as retas paralelas contidas na seção do espaço que contém o nível do chão, concorrem em um único ponto que se encontra na altura dos olhos do observador, na reta de fuga.

A construção de uma pintura anamórfica se dá através de uma relação entre um sistema de coordenadas cartesianas  $\Theta$  e um sistema correspondente  $\Theta'$  que é obtido quando projetamos o plano cartesiano  $\Theta$  através de uma projeção central  $\rho$ . Dessa forma, se há um conjunto de pontos referenciados em  $\Theta'$ , quando olhamos para a pré-imagem deste conjunto, vemos um conjunto distorcido de pontos referenciados em  $\Theta$  (esta distorção dependerá da aplicação  $\rho$ ). Quando projeta-se o plano cartesiano por uma projeção central, obtém-se na verdade uma grade triangular, que é o plano cartesiano em perspectiva. O vértice deste triângulo se encontra na reta de fuga da projeção, e todas as das retas  $x=a$  (no plano cartesiano) se encontram neste vértice na grade triangular. A grade retangular, portanto, foi obtida como uma seção desta grade cartesiana em perspectiva (a triangular).

A partir dessas observações, construímos uma sequência didática baseada na metodologia de resolução de problemas e modelagem que leva o aluno a perceber os elementos essenciais para a construção da pintura anamórfica. As atividades foram elaboradas de maneira a explorarem os conceitos um a um, fazendo o aluno descobrir e perceber aspectos fundamentais da geometria projetiva que estão ao seu redor.

### **Metodologia**

A base teórica para a elaboração das atividades é a metodologia de resolução de problemas aliada à modelagem matemática que permite levar o aluno a construir o próprio conhecimento e tirar suas próprias conclusões.

“Modelagem matemática é o processo que envolve a obtenção de um modelo. Este, sob certa óptica, pode ser considerado um processo artístico, visto que, para se elaborar um modelo, além de conhecimento de matemática, o modelador precisa ter uma dose significativa de intuição e criatividade para interpretar o contexto, saber discernir que conteúdo matemático melhor que se adapta e também ter senso lúdico para jogar com as variáveis envolvidas”. (Salett & Hein, 2007)

A situação problema que envolve a construção da pintura anamórfica é modelada de modo direto, ou seja, através de experiência. Esta etapa de experiência está subdividida em reconhecimento e familiarização deste problema. Devem ser levantadas questões sobre o tema escolhido a fim de instigar os alunos a se interessarem pelo problema, fazendo-os se tornarem familiarizados com o problema. A etapa de matematização se divide em formulação e resolução e aqui encontram-se as maiores dificuldades na criação de um modelo. Das questões levantadas na primeira etapa da modelagem, escolhe-se uma delas e desenvolve-se a matemática necessária para respondê-las e solucionar os problemas daquele momento. Depois retoma-se o problema de onde parou, levanta-se e seleciona-se outras questões, ou até mesmo as que foram levantadas anteriormente para solucioná-las.

A etapa de modelagem é efetuada através dos conhecimentos necessários ao desenvolvimento do modelo. Depois de projetado um modelo, deve-se questionar sua consistência com o que acontece na realidade testando-o.

A metodologia da resolução de problemas, na matemática, tem como objetivo levar o aluno a experimentar novas situações, motivando-o a desenvolver a maneira de pensar matemática. O aluno desenvolve seu raciocínio participando de atividades, tendo dúvidas e elaborando respostas. Dessa forma, o aluno começa a pensar produtivamente, e este, como cidadão comum, é equipado com o conhecimento matemático que pode ser aplicado ao dia-a-dia. (Maria Teresa Carneiro Soares & Neuza Bertoni Pinto)

Os problemas matemáticos levados para a sala de aula devem ser desafiadores, contextualizados e devem envolver conhecimentos prévios e a serem desenvolvidos.

### **Elaboração das Atividades**

A sequência didática que trata da construção de uma pintura anamórfica foi construída com base na metodologia de resolução de problemas e modelagem.

Na primeira atividade o aluno é levado a construir uma figura sem o prévio conhecimento de que se trata de uma pintura anamórfica. Ao final desta atividade, são tiradas fotos da construção de vários pontos distintos e é solicitado ao aluno que compare essas várias fotografias. Espera-se que este perceba que, de determinado ponto, a figura toma uma forma especial e que aparenta estar “saindo” da tela de pintura. Dessa forma, desenvolve-se no aluno, a percepção do espaço e de como o ponto em que se observa um objeto influencia o seu tamanho, sua distorção e sua oclusão. Em função da facilidade e simplicidade do traçado da sua projeção, a figura a ser construída nesta atividade, é a de um cubo.

Para a realização da primeira tarefa desta atividade, os alunos devem se organizar em grupos de cinco ou seis membros. É pedido aos membros do grupo que tracem os pontos da tabela dada no plano retangular dado e que depois sigam uma lista de passos para traçar, com um pincel atômico, segmentos específicos que ligam estes pontos. Dessa maneira, a imagem construída estará nítida até uma distância razoável de quem a observa, mas sem que seja possível reconhecer de imediato que se trata de um cubo.

A próxima etapa da atividade é a sessão de fotos tiradas de diferentes pontos e inclinações, com o objetivo de registrar o que se observa de vários pontos. As fotos são então exibidas simultaneamente para a turma toda, de forma a induzir os alunos a perceberem as variações.

O objetivo da segunda atividade é fazer o aluno perceber a invariância de retas e pontos no mundo. A atividade pede ao aluno que ele desenhe uma parede de um corredor posicionado em frente à esta, da maneira mais detalhada possível. Nesta etapa o mediador deve estar atento à falta de veracidade do desenho. É necessário que o aluno desenhe o que ele enxerga e não a sua interpretação do que ele observa. Uma vez terminado este primeiro desenho, solicita-se ao aluno que desenhe a mesma parede mas de outra posição em que se enxerga toda a parede e corredor. Assim, espera-se que o aluno note como um conjunto pode mudar quando projetado por outro centro sobre o plano de pintura. O aluno pode ser questionado quanto à unicidade da representação, dado o ponto de observação. Da mesma forma, o mediador deve perguntar para o aluno como ele interpreta o plano que contém a folha de papel com o seu desenho e se existe um plano que contém o que é enxergado.

Na terceira atividade, constrói-se a grade triangular. A construção dessa grade envolve habilidade com régua e compasso, no traçar de retas paralelas, perpendiculares e na determinação do ponto médio de um segmento. O primeiro item da atividade solicita ao

aluno que trace segmentos que unem um ponto, a ser determinado, aos pontos de um segmento dado AB, já impresso na folha. Estes segmentos traçados irão formar a grade triangular. No segundo item dessa atividade, o aluno deve explicitar o sistema de coordenadas sobre a grade triangular conforme o que se pede no enunciado, e deve traçar os pontos correspondentes aos marcados sobre a grade retangular da primeira atividade. O que se obtém é a figura de um cubo em perspectiva. Espera-se do aluno que note a semelhança do cubo em perspectiva com o que foi visto em uma das fotografias. A quarta atividade tem como objetivo construir no chão do colégio uma pintura anamórfica usando giz e tinta. O primeiro item desta atividade pede aos alunos que tracem, usando giz, a grade retangular de tal forma que, quando vista do ponto de observação, o que se vê é o tronco de um triângulo com vértice, se estendidos os lados, na altura dos olhos, ou seja, no horizonte. O segundo item desta atividade pede aos alunos que tracem os pontos da figura escolhida. Os traçados dos pontos e segmentos se dão da mesma forma que na primeira atividade. Os alunos devem marcá-los, usando a unidade da grade, e depois pintar sobre as marcações com giz. Deve-se tomar muito cuidado com erros nesta fase, já que será muito difícil corrigi-los caso acorram. Com o contorno da figura escolhida pronto, devem ser questionados os aspectos do desenho em perspectiva no sentido de que é necessário que haja sombra para melhor convencer quem o observa. Depois de feita a devida coloração do objeto, considerando-se seu sombreamento, o terceiro item da atividade solicita que seja tirada uma foto da construção no chão e que seja comparada com o desenho em perspectiva feito na grade triangular da terceira atividade com o intuito de verificar as proporções e semelhanças.

### **Resultados**

A aplicação da sequência didática foi feita no Centro Educacional 03 do Guará (Brasília, Brasil) em encontros semanais de 2 horas.

Na primeira atividade, foi fixado o papel pardo contendo o plano retangular em cima de um balcão. Entregou-se os comandos das atividades aos alunos para que lessem e interpretassem. No primeiro item, era solicitado que traçassem seis pontos no sistema de coordenadas cartesianas. A conversão de unidades foi problemática para os alunos porque atribuíram a medida de um centímetro à unidade da grade retangular. Após perceberem o equívoco, foi-lhes solicitado que encontrassem a décima parte da unidade da grade retangular, pois dessa forma seria mais fácil encontrar partes decimais como 0,4 ou 0,9.

O segundo item da primeira atividade solicitava que os alunos traçassem segmentos específicos que ligassem os pontos traçados no item anterior. Não houve dificuldade por parte dos alunos nesta etapa. Os alunos se aplicaram nas marcações e nos traçados. O terceiro item da primeira atividade comandava-os que dividissem os membros do grupo por funções como escritor, relator, fotógrafo, medidor e supervisor. Depois de definidas as funções de cada um nos grupos, os membros de cada grupo deveriam montar um referencial dentro de sala de aula e escolher pontos distintos dentro da sala e anotar sua posição segundo o referencial escolhido. Alguns deles simplesmente escolheram pontos quaisquer da sala sem se preocupar com o referencial. O mediador sugeriu que padronizassem as posições escolhidas de maneira a reencontrá-las sem grandes dificuldades no próximo encontro. Todos entraram em um acordo e escolheram um ponto do balcão como o centro referencial. Feito isso, o relator do grupo anotou todas as informações das posições escolhidas. Foram posicionados tripés sobre os pontos escolhidos para que cada um tirasse uma foto do desenho construído no papel pardo. Os alunos ficaram bastante entusiasmados ao manusear o tripé e a câmera fotográfica. Por sorte, uma aluna havia escolhido um ponto muito próximo do ponto do qual se teria a impressão desejada de tridimensionalidade. Caso isso não ocorresse, o mediador teria sugerido que o fizessem para que os alunos percebessem o efeito peculiar que a pintura anamórfica causa.

Infelizmente, em função da paralisação do colégio por causa dos jogos do Brasil na copa das confederações, a aplicação do caderno foi interrompida e não foi possível finalizar a atividade 1 como previsto.

### **Conclusão**

A aplicação da sequência didática foi muito gratificante tanto para os alunos quanto para o mediador, mesmo com a impossibilidade da finalização das atividades. As dificuldades encontradas pelos alunos em tarefas que envolvem ferramentas básicas (inclusive ao nível dos alunos) apontam para a deficiência do ensino tradicional de matemática, que limita os alunos a uma atuação mecânica sem permitir que desenvolvam uma postura crítica, sua habilidade de expressão oral e escrita e muito menos o seu raciocínio geométrico. A dificuldade de interpretação dos enunciados assim como a dificuldade na aplicação de conhecimentos previamente adquiridos ilustram bem este fato.

Os resultados obtidos mostram, ainda que de maneira restrita, como a metodologia de resolução de problemas permitiu que os alunos se comportassem frente a um objeto de

estudos desconhecido e de difícil acesso para este nível escolar. Mostrou-se que é viável aplicar-se uma atividade envolvendo várias áreas do conhecimento, além da geometria, e que as barreiras encontradas são facilmente contornáveis.

Por fim, vale ressaltar que não há necessidade de se desenvolver formalmente o ensino da geometria projetiva no nível básico, e nem é este o nosso objetivo. No entanto, é necessário que, além das técnicas do desenho em perspectiva, os conceitos básicos da geometria projetiva sejam abordados no ensino básico, em função da importância histórica da sua construção como modelo matemático, das suas contribuições para o mundo das ciências e, principalmente, pela percepção do mundo que ela permite desenvolver no aluno.

### **Bibliografia**

- Artyfactory (2013). *Perspective Drawing - Linear and Aerial Perspective*. [http://www.artyfactory.com/perspective\\_drawing/perspective\\_index.html](http://www.artyfactory.com/perspective_drawing/perspective_index.html).
- Biembengut, M. S. & Hein, N. (2007). *Modelagem Matemática no Ensino*. 4. Ed. 1ª reimpressão – São Paulo: Contexto.
- Brasil. MEC (1998). *Parâmetros Curriculares Nacionais: terceiro e quarto ciclo do ensino fundamental*. Brasília: MEC/SEF.
- Coxeter, H. S. M. (1974). *Projective Geometry*. Reprint, slightly revised, of 2<sup>nd</sup> ed. Originally. University of Toronto.
- D'Amelio, J. (1964). *Perspective Drawing Techniques*. Dover Publications.
- Flores, C. R. & Moretti, M. T. (2001). *Olhar em Perspectiva: análise da representação do espaço e suas implicações na visualização de figuras tridimensionais no ensino de geometria*.
- Flores, C. R. (2002). *Abordagem Histórica no Ensino de Matemática: o caso da representação em perspectiva*.
- Keer, L. (2011). *Street Paintings 3-D*. <http://www.streetpainting3d.com/pt/category/3d-streetpaintings/page/>.
- Kobayashi, M. C. M. (2001). *A construção da geometria pela criança*. Bauru, SP : EDUSC.
- Pinto, N. B & Soares, M. T. C. *Metodologia da resolução de problemas*. 3-7.
- Schiffman, H. R. (2005). *Sensação e percepção*, 5 ed. LTC.
- Yaglom, I. M. (1973). *Geometric Transformations III*. New Mathematical Library.



**Anexo 1**



**Alunos do CED 03 resolvendo as atividades propostas**



**Anexo 2**



**Foto tirada próxima à posição do ponto central da  
projeção desejada**



**Foto tirada em um dos pontos escolhidos pelos alunos**

Anexo 3

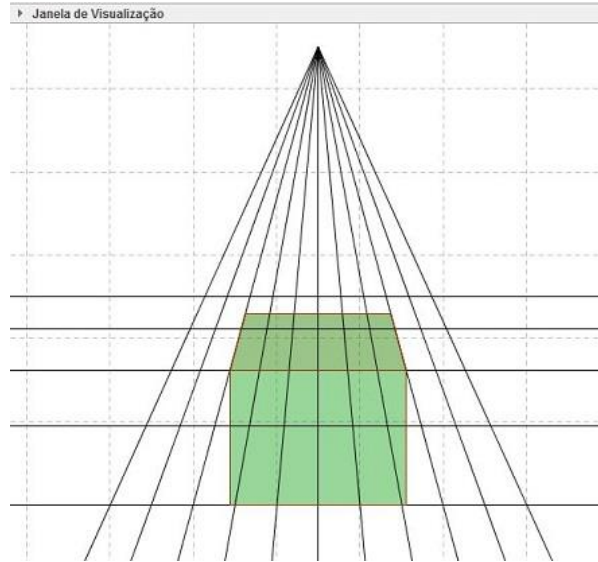


**Pintura anamórfica B tirada do ponto central da projeção (Leon Keer)**



**Pintura anamórfica B tirada de um ponto diferente do central  
(Leon Keer)**

**Anexo 4**



**Grade triangular obtida de uma projeção central**