

MODELADO MATEMÁTICO PARA LA OBTENCIÓN DEL COEFICIENTE DE ATENUACIÓN DE LA ONDA RAYLEIGH

Nora Iris Pugliese – Elina Ortega
noriris@gmail.com – elinaortega@sinectis.com.ar
Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de San Juan. Argentina

Modalidad: CB

Nivel educativo: Terciario-Universitario

Tema: La resolución de problemas como herramienta para la modelización matemática

Palabras clave: Atenuación, onda Rayleigh, dispersión

Resumen

El estudio del coeficiente de atenuación de las ondas sísmicas es importante, principalmente por los siguientes motivos: Por una parte da la información necesaria para efectuar las correcciones oportunas en una descripción del movimiento del suelo al paso de las ondas generadas por los terremotos. Por otra parte, da información acerca de la distribución de los valores del factor intrínseco de atenuación de la corteza y el manto superior. En el presente trabajo se efectúa el modelado matemático para obtener el coeficiente de atenuación de la onda Rayleigh debido al proceso de dispersión de la onda sobre una superficie bidimensional aleatoriamente rugosa. Se deduce la ecuación integral matricial de borde, la cual describe el campo de la onda esparcida, y mediante la técnica de aproximación del campo medio se llega a la ecuación matricial para la propagación media de la onda Rayleigh. El coeficiente de atenuación de la onda Rayleigh se obtiene como la parte imaginaria de la corrección para el número de onda. Finalmente se grafican las dependencias del coeficiente de atenuación con la frecuencia para una función de correlación Gaussiana.

1. Introducción

La dispersión de ondas en superficies rugosas se aplica en diversas áreas de la Física para responder a necesidades prácticas. En particular, en este trabajo se analiza la dispersión de la onda Rayleigh sobre una superficie bidimensional aleatoriamente rugosa. Con el objetivo de encontrar el coeficiente de atenuación de la onda Rayleigh debido a su dispersión, se formula el planteo matemático del problema para la propagación de la onda en un medio elástico semi-infinito, limitado por una superficie con rugosidades aleatorias libre de tensiones, definida por $z = \eta(x,y)$. Se supone que las alturas de las rugosidades son pequeñas en comparación con la longitud de onda.

2. Planteo Matemático

Las ecuaciones de onda se pueden escribir en términos de los potenciales escalar y vectorial como:

$$\begin{cases} \Delta\varphi - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \\ \Delta\bar{\psi} - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial t^2} = 0 \end{cases}$$

Teniendo en cuenta las siguientes condiciones de borde:

$$\sigma_{ij} n_j \Big|_{z=\eta(x,y)} = 0$$

Donde $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$ es un vector unitario normal a la superficie.

Expresando las ecuaciones de borde en función de las componentes del tensor de tensiones, se tiene:

$$\begin{cases} \sigma_{xx} n_x + \sigma_{xy} n_y + \sigma_{xz} n_z = 0 \\ \sigma_{yx} n_x + \sigma_{yy} n_y + \sigma_{yz} n_z = 0 \\ \sigma_{zx} n_x + \sigma_{zy} n_y + \sigma_{zz} n_z = 0 \end{cases}$$

3. Expansión del Campo de la Onda Transversal

El desplazamiento total se representa como una suma de la componente longitudinal más la componente transversal:

$$\vec{u} = \vec{u}_l + \vec{u}_s$$

Donde $\vec{u}_l = \text{grad}\varphi$ y $\vec{u}_s = \text{rot}\bar{\psi}$

Para resolver el problema es conveniente expandir la componente transversal en dos partes: la polarización vertical y horizontal del vector desplazamiento \vec{u}_s

$$\vec{u}_s = \vec{u}_{SV} + \vec{u}_{SH}$$

Donde $\vec{u}_{SH} = \text{rot}(0, 0, \psi_{SH})$ y $\vec{u}_{SV} = \text{rot rot}(0, 0, \psi_{SV})$

Así la representación del vector potencial es:

$$\vec{\psi} = (0, 0, \psi_{SH}) + \text{rot}(0, 0, \psi_{SV})$$

Se obtienen las siguientes ecuaciones escalares que describen la propagación de la onda en términos de los potenciales φ , Ψ_{SH} , Ψ_{SV} .

$$\begin{cases} \Delta\varphi - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \\ \Delta\Psi_{SH} - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 \Psi_{SH}}{\partial t^2} = 0 \\ \Delta\Psi_{SV} - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 \Psi_{SV}}{\partial t^2} = 0 \end{cases}$$

4. Ecuación Matricial Integral de Borde

Bajo la suposición de que las alturas de las rugosidades son pequeñas en comparación con la longitud de onda, se aplica la teoría de perturbación expandiendo las ecuaciones de borde en Series de Taylor, en una vecindad de la superficie.

Luego de aplicar Transformadas de Fourier a las variables x e y en las ecuaciones de borde expandidas, éstas se expresan en la siguiente forma matricial:

$$\hat{L}_0(\vec{k})\vec{\varphi}(\vec{k}) = -\hat{L}_1^*(\vec{k}, \vec{\tilde{k}})\vec{\varphi}(\vec{\tilde{k}}) \quad (4.1)$$

Donde:

$$\vec{\varphi}(\vec{k}) = \begin{bmatrix} \varphi(\vec{k}) \\ \Psi_{SV}(\vec{k}) \\ \Psi_{SH}(\vec{k}) \end{bmatrix}$$

$$\hat{L}_1^*(\vec{k}, \vec{\tilde{k}}) = \int_{-\infty}^{\infty} dk'_x \int_{-\infty}^{\infty} dk'_y \eta(k'_x, k'_y) \hat{L}_1(\vec{k}, \vec{\tilde{k}})$$

Siendo:

$\hat{L}_1^*(\vec{k}, \vec{\tilde{k}})$ el operador matricial integral que contiene en su integrando al factor aleatorio.

$\hat{L}_0(\vec{k})$ el operador matricial algebraico.

$$\hat{L}_0(\vec{k}) = \begin{bmatrix} \Omega_s & -2(k_x^2 + k_y^2)v_s & 0 \\ -2v_1(k_x^2 + k_y^2) & \Omega_s(k_x^2 + k_y^2) & 0 \\ 0 & 0 & (k_x^2 + k_y^2)v_s \end{bmatrix}$$

$$\hat{L}_1(\vec{k}, \vec{k}) = \begin{bmatrix} \hat{L}_{11} & \hat{L}_{12} & \hat{L}_{13} \\ \hat{L}_{21} & \hat{L}_{22} & \hat{L}_{23} \\ \hat{L}_{31} & \hat{L}_{32} & \hat{L}_{33} \end{bmatrix}$$

5. Aproximación del Campo Medio

La aproximación del campo medio es una técnica especial la cual permite obtener una ecuación aproximada para la propagación media de la onda Rayleigh.

A partir de la ecuación de borde en términos del operador integral (4.1), y expandiendo el campo total como la suma del campo medio más el campo aleatorio: $\bar{\varphi} = \langle \bar{\varphi} \rangle + \bar{\varphi}'$, se obtiene la ecuación integral matricial para el campo medio de la onda Rayleigh:

$$\left[\hat{L}_0(\vec{k}) + \frac{\sigma^2}{\pi^2} \int d\vec{k}' W(\vec{k}') \hat{L}_1(\vec{k}, \vec{k}') \hat{L}_0^{-1}(\vec{k}') \hat{L}_1(\vec{k}, \vec{k}') \right] \langle \bar{\varphi}(\vec{k}) \rangle = 0 \quad (5.1)$$

Donde:

$\int d\vec{q} e^{-i\vec{q}(\vec{k}-\vec{k}')} w(\vec{q}) = W(\vec{k}-\vec{k}')$ es el espectro de Fourier de la función de correlación y σ es la amplitud de rugosidad.

6. Atenuación de la Onda Rayleigh

Se realiza el siguiente análisis para encontrar la corrección para el número de onda de la onda Rayleigh debida a su múltiple dispersión sobre la superficie rugosa.

La ecuación integral matricial para el campo medio (5.1) es una ecuación homogénea que tiene soluciones no triviales cuando:

$$\det[\hat{L}^0(\vec{k}) + \sigma^2 \hat{L}^2(\vec{k})] = 0 \quad (6.1)$$

Para pequeñas rugosidades la ecuación (6.1) se puede escribir:

$$L_{33}^0 \det \hat{L}^{00} + \sigma^2 (L_{33}^0 M + L_{33}^{2*} \det \hat{L}^{00}) = 0 \quad (6.2)$$

En forma completa la ecuación (6.2) tiene la forma:

$$L_{33}^0(\vec{k}) \det \hat{L}^{00}(\vec{k}) + \frac{\sigma^2}{\pi^2} \int d\vec{k}' W(\vec{k}') \left(L_{33}^0(\vec{k}) M(\vec{k}, \vec{k}') + L_{33}^2(\vec{k}, \vec{k}') \det \hat{L}^{00}(\vec{k}) \right) = 0 \quad (6.3)$$

Luego de expandir (6.3) en series de Taylor, la expresión para la corrección para el número de onda es:

$$\delta \vec{k}_R = \frac{-\sigma^2 / \pi^2}{\left. \frac{\partial \det \hat{L}^{00}(\vec{k})}{\partial \vec{k}} \right|_{\vec{k}=\vec{k}_R}} \int d\vec{k}' W(\vec{k}') \frac{M(\vec{k}_R, \vec{k}')}{\det \hat{L}^{00}(\vec{k}_R - \vec{k}')}$$

Otra expresión para la corrección para el número de ondas es abordada en el sistema de coordenadas cilíndricas:

$$(k_x, k_y) \rightarrow (k, \varphi)$$

$$\delta \vec{k}_R = \frac{-\sigma^2 / \pi^2}{\left. \frac{\partial \det \hat{L}^{00}(\vec{k})}{\partial \vec{k}} \right|_{\vec{k}=\vec{k}_R}} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_0^{\infty} k' dk' W(k', \varphi) \frac{M(k_R, k', \varphi)}{\det \hat{L}^{00}(\vec{k}_R - \vec{k}')}$$

$$\delta \vec{k}_{R \rightarrow R} = -2\pi i \frac{\sigma^2 / \pi^2}{k_R^2 \left(\left. \frac{\partial \det \hat{L}^{00}(\vec{k})}{\partial \vec{k}} \right|_{\vec{k}=\vec{k}_R} \right)^2} \times \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi k_R(\varphi) W(k_R(\varphi), \varphi) M(k_R, k_R(\varphi), \varphi)$$

El coeficiente de atenuación es la parte imaginaria de la corrección para el número de onda.

$$\alpha_{R \rightarrow R}(\omega) = \frac{2\sigma^2 / \pi}{k_R^2 \left(\left. \frac{\partial \det \hat{L}^{00}(\vec{k})}{\partial \vec{k}} \right|_{\vec{k}=\vec{k}_R} \right)^2} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi k_R(\varphi) W(k_R(\varphi), \varphi) M(k_R, k_R(\varphi), \varphi)$$

Las dependencias del coeficiente de atenuación de la frecuencia debido al proceso de dispersión de onda Rayleigh a onda Rayleigh para una función de correlación Gaussiana

isotrópica con diferentes longitudes de correlación se muestran en la figura 1. Es posible observar dos dominios con diferentes conductas: a bajas frecuencias el comportamiento responde a la ley ω^4 , pero para frecuencias más altas estas conductas cambian a lineales.

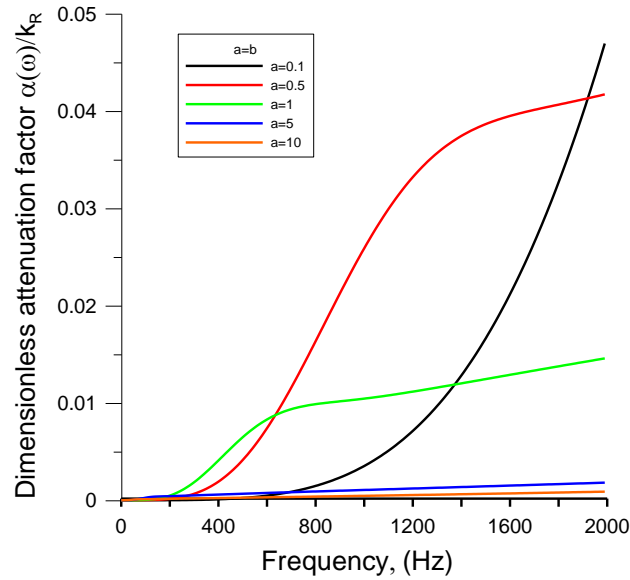


Fig.1

Las dependencias del coeficiente de atenuación de la frecuencia debidas al proceso de dispersión de onda Rayleigh hacia onda Rayleigh para una función de correlación Gaussiana anisotrópica, se muestra en la figura 2, para diferentes orientaciones de los ejes de anisotropía relativas a la dirección de propagación de la onda Rayleigh. Es posible observar una conducta no monótona del coeficiente de atenuación para pequeños ángulos, la cual comienza a desaparecer con el incremento del ángulo de incidencia y aparece nuevamente cuando la onda Rayleigh se propaga perpendicularmente a la dirección de anisotropía.

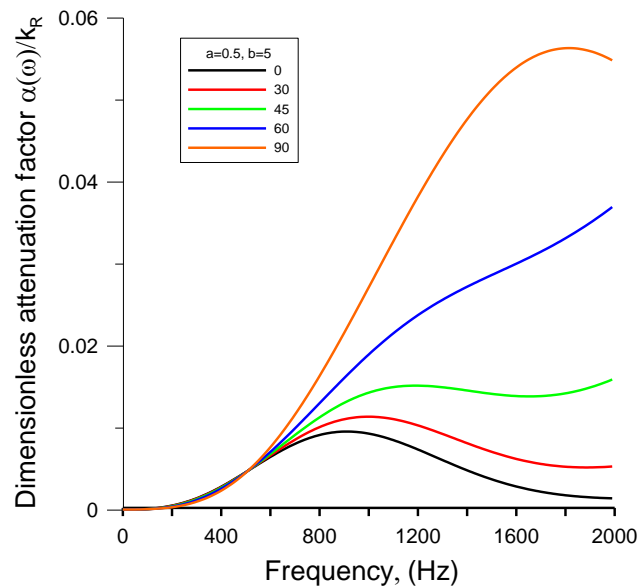


Fig.2

7. Conclusiones

La dispersión de la onda Rayleigh sobre una superficie bidimensional con rugosidades aleatorias es importante en diferentes aplicaciones físicas.

El planteo matemático del problema se formuló para encontrar el coeficiente de atenuación de la onda Rayleigh debido al proceso de dispersión de la onda sobre una superficie 2D con rugosidades aleatorias.

La solución del problema se obtiene en el marco de la teoría de perturbación bajo la suposición de que las alturas de las rugosidades son pequeñas en comparación con la longitud de onda. Se deduce la ecuación matricial integral de borde, la cual describe el campo de la onda esparcida.

Con la aplicación de la técnica de aproximación del campo medio se obtiene la ecuación matricial aproximada para la propagación media de la onda Rayleigh.

Se estudia en detalle el coeficiente de atenuación siendo los resultados numéricos útiles para entender los procesos físicos de la dispersión de la onda Rayleigh sobre una superficie bidimensional aleatoriamente rugosa.

Desde un punto de vista didáctico, el problema presentado en este trabajo de investigación, permite a los alumnos avanzados entender las propiedades y aplicaciones prácticas de las ondas superficiales, en particular de las ondas Rayleigh, combinando los conocimientos previos de las técnicas de cálculo y la teoría de propagación de ondas para la obtención de la solución.

Referencias bibliográficas

Eguiluz, A.G., Maradudin, A. A. (1983). *Phys. Rev. B* 28, 711-728.

Kosachev, V. V., Shirov, V.V. (1995). *Ann. Of Phys.*, V 240 N2 P 225-265.

Dunin, S.Z., Maximov, G.A. (1988). Excitation and propagation of Rayleigh waves in elastic half space with rough boundary. Moscow: *Preprint MEPhI*, N 032-88.