

LA COMPETENCIA MATEMÁTICA DE LA REPRESENTACIÓN EN ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN BÁSICA.

José Arley Londoño Acevedo - Eliécer Aldana Bermúdez.
arleymate2010@hotmail.com.- eliecerab@uniquindio.edu.co.

Universidad del Quindío, (Colombia).

Modalidad: Comunicación breve.

Nivel Educativo: Medio (11 a 17 años).

Tema: II.2 - La Resolución de Problemas como vehículo del Aprendizaje Matemático.

Palabras clave: Función lineal, Representación, Situaciones Didácticas, Competencias.

Resumen. *Este estudio reporta los resultados de una investigación más amplia, donde se busca el desarrollo de la competencia matemática de la representación en el pensamiento variacional desde el concepto de linealidad. La investigación centra su atención en la teoría de las Situaciones Didácticas con su propia metodología de la ingeniería didáctica, además se apoya en los sistemas semióticos de representación. Para ello se trabajó con un grupo de estudiantes de educación básica, a los cuales se les aplicó un cuestionario y una entrevista. A partir del análisis y de los resultados se muestran algunas dificultades que los estudiantes presentan durante la fase a-didáctica en la resolución de problemas, que requieren de la modelación de la función lineal mediante la representación, pero que durante la fase didáctica de la ingeniería muestran evidencias de un mejor desempeño frente al concepto y al desarrollo de la competencia.*

Presentación del problema.

Los resultados de investigaciones acerca del concepto de función lineal reflejan algunas dificultades de comprensión en los estudiantes que no han logrado desarrollar las competencias esperadas en matemáticas. A respecto, Santos y Alvarado (2000) reportan la falta de aprendizaje del concepto debido al énfasis que se hace en la enseñanza de procedimientos algorítmicos, y la carencia de una enseñanza basada en la resolución de problemas. Asimismo, Arzarello et al. (1995, p. 10 -11) plantea que el uso de símbolos inadecuados no favorece el desarrollo del pensamiento variacional, por este motivo en la historia del álgebra tiene importancia no sólo la historia de los conceptos sino también el sistema de símbolos utilizados para poder expresarlos.

En este sentido, Duval (1988), (citado por De la Rosa, 2000) menciona la falta del concepto de función lineal en el lenguaje natural y la carencia de la habilidad de visualización. Además, Hart (1988, pp. 198-219) (citada en Ruiz y Valdemoros, 2006) plantea que algunos estudiantes no resuelven problemas donde se involucra la

proporción, los individuos presentan un cierto control de lo que se ve como correcto y reconocen que este concepto está involucrado en el pensamiento cualitativo, ya que pertenece a lo perceptual, y que lo más avanzado del pensamiento proporcional se da en el sujeto una vez que ha construido determinados conceptos.

De igual forma, García et al. (2012) reportan cuales competencias se promueven en el aula, qué tareas matemáticas proponen los profesores, que actividades despliegan los estudiantes para el desarrollo de competencias y cómo se orienta su proceso de evaluación. El problema que motiva esta investigación tiene que ver con la necesidad de que los estudiantes desarrollen competencias básicas en matemáticas que les permita generar un aprendizaje más consciente. Por tanto, lo que se espera en concreto es: ¿Cómo generar en el estudiante de educación básica, la competencia matemática de la representación?

Marco teórico.

El desarrollo del pensamiento variacional juega un papel importante en la investigación, requiere de la formación de conceptos apropiados, del desarrollo de algunas habilidades y de actitudes, la implementación de situaciones problema que involucren el contexto sociocultural del estudiante en la perspectiva de desarrollar su pensamiento variacional, para lograr alguna competencia básica que le permita formular, plantear y resolver problemas a partir de situaciones de la vida cotidiana. Para desarrollar esta investigación nos apoyamos en la Teoría de las Situaciones Didácticas de Brousseau, (1997) y de la Teoría de la Transposición Didáctica Chevallard (1991).

Una situación didáctica es un conjunto de relaciones explícita y/o implícitamente establecidas entre un estudiante o un grupo de estudiantes, algún entorno (incluyendo instrumentos o materiales) y el profesor con el fin de permitir a los estudiantes aprender, reconstruir algún conocimiento. La primera fase de una situación didáctica, es la denominada a-didáctica, en la cual el profesor no interviene dejando que el alumno viva esta situación como investigador de un problema matemático (Margolinas, 1993).

La segunda fase es la didáctica propiamente, en este nivel se tiene en cuenta la modelización algunas limitaciones del modelo a-didáctico, considerando al estudiante como un sujeto institucional cuyos procesos de adaptación están condicionados por la

tarea matemática y las interacciones posibles con el *medio*, la noción central en este nivel es la de “contrato didáctico” que designa las expectativas implícitas que tienen relación con el otro, con el estudiante y el docente, frente al saber matemático. En este nivel didáctico, el comportamiento del docente se vuelve un elemento esencial en el análisis de las interacciones en el seno del sistema.

Metodología

La metodología de investigación está fundamentada en la ingeniería didáctica de Artigue (1988), es una investigación de tipo cualitativa, que según Merriam (1998, p: 6), consiste en: a) entender el fenómeno de interés desde las perspectivas de los participantes y no del investigador, b) el investigador es el instrumento primario para la colección de datos y el análisis, c) esta metodología se refiere al estudio de casos, d) emplea la estrategia de investigación inductiva, e) se enfoca en los procesos y entendimientos; el producto del estudio cualitativo debe enriquecerse descriptivamente. Este es un trabajo hecho con estudiantes de grado noven en esa dirección, pensamos que la investigación cualitativa posibilita analizar al otro; sus actitudes y por lo tanto, acercarnos al proceso de construcción de los estudiantes de temas matemáticos como el de función lineal, en su espacio natural. Para la recolección de datos analizamos un grado noveno de una institución de carácter oficial, mediante cuestionarios, entrevistas y registros de las producciones de los estudiantes. Los datos han sido recolectados a partir de interacción directa con nuestros estudiantes, desde la investigación de nuestra propia práctica. Una primera secuencia a-didáctica fue describir el estado en el que se encuentra el concepto de función lineal en los estudiantes o sea contempla sólo las componentes epistemológica y didácticas de la investigación.

Ahora bien, en la fase de diseño distinguimos las restricciones y variables de control que imponía trabajar con profesores e interactuar en un escenario a distancia y diseñamos secuencias didácticas. La idea general de las mismas era que los estudiantes transitaran por los momentos que encontramos a continuación en el análisis de las categorías para determinar el concepto de función que presentan cada una de las actividades, además el objetivo era permitir acceder al significado de función lineal y al desarrollo de las competencias.

Análisis de datos.

En primer lugar se analizan los instrumentos aplicados durante las situaciones a-didácticas desde los aspectos epistemológicos y didácticos que utilizaron los estudiantes en los cuestionarios y entrevistas a partir de unas categorías de análisis donde se puede evidenciar que algunos estudiantes suelen *interpretar, codificar e identificar los modos de representación de los elementos matemáticos*. En este nivel de la categoría los estudiantes reconocen con dificultad un modo de representación algebraico de la función lineal algunos de estos hechos se ponen de manifiesto en la siguiente tarea.

Para suministrar agua a una pequeña población, se tiene un tanque lleno con 120000 litros de agua. La llave del tanque se abre para que salgan, 12000 litros de agua por hora.

ACTIVIDADES:
Con la información anterior complete la siguiente tabla que relaciona el tiempo transcurrido (t) y la cantidad de agua que queda en el tanque (c)

Tiempo (t)	1						7				
Cantidad (c)	108000		84000								

¿En cuántas horas se desocupa totalmente el tanque?
 Construya una expresión que permita determinar la cantidad de agua c (en miles de litros) que hay en el tanque transcurridas t horas.
 ¿Cuál es el valor máximo que puede tomar t? (explique)

Tarea 3 del cuestionario 1.

Se observa que por medio de las magnitudes se puede establecer el concepto de función lineal desde cualquier fenómeno dado, es de anotar que los estudiantes antes de las aplicaciones de las situaciones a-didácticas desconocían la importancia de estos ejercicios. Se destaca la relación de los diferentes registros de representación (gráfica, tabular y algebraico), utilizados para representar las relaciones de proporcionalidad directa e inversa entre dos variables. Ahora veamos la manera como uno de los estudiante aborda la solución de la tarea.

3. Para suministrar agua a una pequeña población, se tiene un tanque lleno con 120000 litros de agua. La llave del tanque se abre para que salgan, 12000 litros de agua por hora.

ACTIVIDADES:
 • Con la información anterior complete la siguiente tabla que relaciona el tiempo transcurrido (t) y la cantidad de agua que queda en el tanque (c)

Tiempo (t)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Cantidad (c)	108000	96000	84000	72000	60000	48000	36000	24000	12000	0	0

• ¿En cuántas horas se desocupa totalmente el tanque? en 10 horas

• Construya una expresión que permita determinar la cantidad de agua c (en miles de litros) que hay en el tanque transcurridas t horas. $x = t - c = 0$

• ¿Cuál es el valor máximo que puede tomar t? (explique) 120000 porque es la máxima cantidad que cabe en el tanque

Las primeras dificultades que se detectaron con la aplicación de un cuestionario, están relacionadas con el concepto de función lineal, el estudiante pone en juego el cambio entre las representaciones tabular, gráfica y algebraica. Se trata de poner a prueba la

habilidad del estudiante para identificar la linealidad en una tabla en la que aparecen los valores que toma la variable x contra los valores de y ; esta pregunta no requiere de un cambio de registro y está relacionada más bien con la actividad cognitiva de formación en el registro tabular, identifica la palabra función afirmando que es una relación entre dos magnitudes. Dado que la tabla anterior está relacionada con el tiempo transcurrido y la cantidad de litros de agua que salen en una hora. Seguidamente hace la relación que hay entre las variables dependiente (c) e independiente (t), luego busca dar solución a las preguntas planteadas. Puede notarse que el estudiante responde la mayor parte del ejercicio de forma adecuada, presentado dificultad en la expresión algebraica. Durante la entrevista esto es lo que ponen en evidencia:

P: ¿Que es para usted una magnitud?
 R.E: Una magnitud es una relación de operaciones donde hay unas variables que se pueden sumar, restar, multiplicar o dividir.

P: ¿Puede usted argumentar como resolvió la pregunta tres del análisis a-didáctico de cuestionario 1?
 R.E: Tome la capacidad del tanque que nos daban y después como cada hora salían 12000 litros de agua y la capacidad del tanque eran de 120000 entonces por cada hora comencé a restar.

P: ¿Qué es para usted una expresión algebraica?
 R.E: Es la relación que hay entre variables y coeficientes que me pueden facilitar a resolver los ejercicios anteriores.

P: ¿Por qué representa usted la expresión algebraica de esta manera?
 R.E: En el ejercicio no respondí bien la expresión algebraica pero creo que la puedo obtener como $c = 120000 - 12000t$.

P: Puede usted explicar que lo hizo pensar de esta manera en el ejercicio 3?
 R.E: Lo que hice fue que en la variable t comencé a llenar con la información que teníamos al principio o sea el número de horas. Luego tome la cantidad que sale cada hora que son de 12000 litros y el tanque tenía menos agua ósea que se desocupo a las 10 horas.

Entrevista estudiante 7.

Podemos notar que el estudiante encuentra la expresión algebraica correspondiente, una de las formas según él fue tomar dos puntos de la tabulación y hallar la pendiente, después tomo la ecuación punto pendiente que fue la más trabajada por ellos y así encontró la expresión algebraica. Igualmente los estudiantes se enfrentan a situaciones cotidianas, por ello la aplicación de estrategias en la resolución de problemas y la interpretación son fundamentales en el desarrollo de la competencia matemática.

Continuando en el análisis a-didáctico vemos cómo los estudiantes se acercan al concepto de función lineal, cuando la tarea les exige ***escoger los modos de representación necesarios en la resolución de problemas.*** Veamos la siguiente tarea correspondiente al cuestionario 1.

Iremos de vacaciones a la playa y nos espera un viaje de 500 Km. Sabemos que el auto consume 2 galones de gasolina cada 100Km ¿Cuántos galones necesitamos para el viaje? Respuesta detallada. _____

Tarea 1 del cuestionario 1 a-didactico.

El reconocimiento de la proporcionalidad directa en diferentes contextos, las estrategias que utilizan los estudiantes para el razonamiento y el cálculo y la identificación del factor de proporción y el análisis de su significado; ya que la proporcionalidad tiene mucha relación con el concepto de función lineal. Esto es lo que hace el estudiante durante la resolución de la tarea en el cuestionario.

Respuesta detallada.	
se utilizan 10 galones de gasolina porque	
son = 5 veces 2	2 - 100 Km
	2 - 100 Km
	2 - 100 Km
	2 - 100 Km
	2 - 100 Km
	2 - 100 Km
Respuesta detallada.	
Para el viaje necesitamos 10 galones de gasolina porque para cada 100 Km se necesitan 2 galones y como son 500 Km se necesitarían 10 galones.	

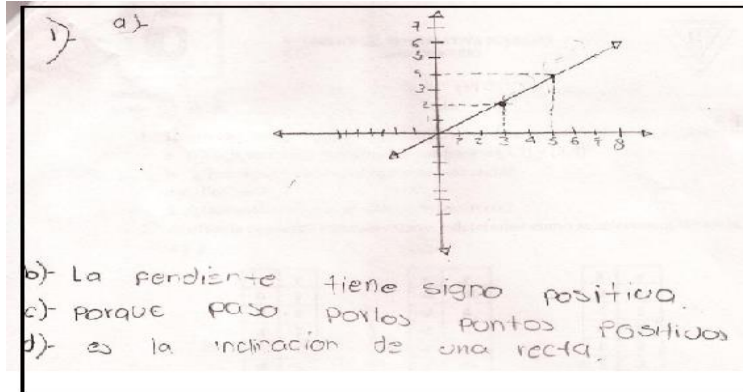
Entre los estudiantes se observa que trabajan de manera adecuada la proporcionalidad, ya que su respuesta es correcta y buscan estrategias para solucionar problemas cotidianos. Se puede diagnosticar que los estudiantes tienen conocimiento suficiente sobre el concepto de proporcionalidad, por lo que es muy importante para que ellos logren relacionar el concepto de función lineal. Podemos ver que cumplen con la evolución de algunos objetos matemáticos importantes entre las competencias trabajadas como la de resolver problemas a través de las magnitudes establecidas en el análisis.

En segundo lugar, en este apartado utilizando los mismos instrumentos, se hace un análisis didáctico de la comprensión del concepto en estudio, donde se puede evidenciar que algunos estudiantes suelen permitir describir, explicar y conocer la forma cómo los sujetos se acercan al concepto mediante las siguientes categoriales, en este caso los estudiantes suelen, *utilizar los elementos necesarios en la resolución de una tarea de acuerdo al contexto del problema*. Veamos la siguiente tarea correspondiente al análisis didáctico tarea 2 cuestionario 1.

1. Responder las siguientes preguntas de acuerdo con la información presentada:
 - a. Dibuja una recta que pasa por los puntos (3,2) y (5,4)
 - b. ¿Qué signo tiene la pendiente de esta recta?
 - c. ¿Por qué?
 - d. ¿Qué entiendes por pendiente de una recta?

Tarea 3 del cuestionario I didáctico.

En este contexto, la principal finalidad de esta pregunta es exponer de manera particular una situación sobre el proceso a desarrollar para la implementación de un sistema de enseñanza-aprendizaje basado en la representación. Esto es lo que pone de manifiesto el estudiante E4.



Solución tarea 3 del cuestionario I, realizado por el estudiante E4

En el análisis de la comprensión del concepto en esta fase didáctica, se evidencia que la mayoría de sujetos establecen una coordinación de los elementos que configuran la función lineal y su representación gráfica. El sujeto emplea la representación gráfica, ubicando las parejas ordenadas, puntos de intersección y analiza la relación entre medidas que permitan determinar el lugar geométrico. Se puede percibir la gran cantidad de aportes que puede generar un problema en una situación real, al igual que su acotación en los diferentes ámbitos donde se menciona, incluyéndose desde luego el sistema de representación, no obstante, como se puede observar, desde diferentes ópticas, además reconoce la pendiente de la recta, son muchas las ocasiones en las que se ha de emplear una determinada competencia matemática para clarificar, formular y resolver adecuadamente el problema y utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones en las tareas diseñadas. Asimismo, la competencia representar se desarrolla con la ejecución de la mayoría de la tarea. En la entrevista el estudiante nos manifiesta:

P: ¿Por qué utilizas estos argumentos en tus razonamientos?

R.E: Yo sé que una línea recta puede estar conformada por dos puntos y unirlos entonces como yo tengo más de dos puntos en cada una de las tablas forme una línea recta.

P: ¿Qué significa para usted la pendiente? Explique su respuesta.

R.E: Es la inclinación que tiene una recta.

P: ¿Cómo puede usted calcular la pendiente de una recta? ¿Por qué?

R.E: Con la diferencias de las y sobre las diferencias de las x. $m = (y_2 - y_1) / (x_2 - x_1)$.

P: Los puntos anteriores pertenecen a la recta.

R.E: Si porque los dos puntos que yo tomo son una pareja ordenada que está en el plano cartesiano.

P: ¿Gráficamente se puede mostrar que una pendiente puede tener varios sentidos? ¿Justifique?

R.E: Si porque una pendiente se puede tomar como positiva o negativa además como ascendente o

descendente.

P: ¿Qué significado tiene para usted una pendiente negativa? Justifique su respuesta.

R.E: La pendiente negativa es cuando la recta está descendiendo.

P: A partir del grafico como calcular la pendiente de una recta. Justifique su proceso.

R.E: Tomando dos puntos de la recta ya que está conformada por una pareja ordenada.

Entrevista Tarea 3 del cuestionario I, realizado por el estudiante E4.

En síntesis, el estudiante asume que la argumentación que maneja le ayuda a comprobar su respuesta y usa adecuadamente la identificación de la función lineal; sin embargo en el ejercicio no utilizó un proceso analítico para hallar la expresión algebraica que sintetiza la ecuación de la función lineal, pero lo manifestó en la entrevista al determinar la expresión algebraica por medio de ecuación punto pendiente.

Conclusiones.

En la dimensión a-didáctica, los estudiantes en un primer momento no reconocen los elementos que configuran la función lineal y no relacionan los modos de representación gráfico y algebraico, sin embargo en la fase didáctica, donde existe una mediación del profesor investigador, se nota un cambio en el aprendizaje, porque se aprecia que ellos reconocen, relacionan y transforman los datos de un modo de representación a otro. En el aspecto cognitivo, es relevante conocer los conceptos previos que traen los estudiantes, las formas de aprendizaje y las experiencias que ponen de manifiesto en el trabajo de forma individual y colectiva que realizan en el marco de las situaciones didácticas.

Referencias

- Artigue, M. (1998). Ingeniería didáctica. En Artigue,M, Douay, R, Moreno, L,Gomez, P. (Eds). Ingeniería didáctica en educación matemática. Colombia : Una empresa docente .
- Brousseau, G. (1997). Theory of Didactical Situations in Mathematics. Kluwer Academic Publishers.
- Chevallard, Y. (1991). La transposición didáctica: Del saber sabio al saber enseñado. AIQUE, Argentina.
- Duval, R. (1999). Semiosis y Pensamiento Humano, traducido por Myriam Vega Restrepo. Santiago de Cali Colombia: Artes Graficas Univalle.
- Merriam, S. B. (1998). Qualitative Research and Case Study. Applications in Education. San Francisco: Jossey-Bass Publishers.
- Nacional., M. d. (2005). Estándares Básicos para Matemáticas.División de perfeccionamiento y calidad de la Educación.