CONSIDERACIONES SOBRE EL TRATAMIENTO DIDACTICO DE LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS EN LA UNIVERSIDAD

Sastre Vázquez, P.; Rey, A.M.G.; Boubée, C.; Cañibano, A.
Facultad de Agronomía. Universidad Nacional Centro de la Provincia de Buenos Aires. Azul. Argentina
psastre@faa.unicen.edu.ar, grey@faa.unicen.edu.ar, cboubee@faa.unicen.edu.ar, mac@faa.unicen.edu.ar
Nivel Educativo: Terciario, Universitario
Palabras clave: funciones, trigonometría, didáctica, universitarios

RESUMEN

En general, los programas de estudio de las escuelas de nivel medio que introducen el estudio de las funciones trigonométricas, lo hacen centrando el interés en el aprendizaje de los elementos que se encuentran relacionados con el uso de estas funciones como una herramienta para la solución de problemas geométricos. Así, se comienzan estudiando las medidas de los ángulos, los triángulos y por último el círculo trigonométrico.
Si bien es cierto que estas funciones son muy útiles a la hora de resolver problemas en los cuales se encuentran involucrados ángulos, no menos cierto es que cuando se desea construir modelos, es prácticamente imprescindible concebir las funciones trigonométricas como funciones de un número real.
En este trabajo se analizan distintas posibilidades de tratamiento didáctico, en el nivel universitario, de las funciones trigonométricas considerando ventajas y limitaciones de estrategias tales como el pasaje de la medida de la amplitud de los ángulos del sistema sexagesimal al sistema radial, y la definición de estas funciones como relaciones entre números reales prescindiendo del uso de ángulos.

INTRODUCCIÓN

Durante nuestra práctica docente en el aula, hemos encontrado numerosas dificultades en los alumnos al trabajar con funciones trigonométricas, las cuales nos han motivado a tratar de investigar el origen de las mismas. Si bien en general en el tratamiento didáctico de la noción de función se tiene en cuenta la naturaleza epistemológica del concepto, en general no parece haberse tenido en cuenta, a la hora de diseñar las herramientas del proceso de enseñanza aprendizaje, una diferenciación entre los diferentes tipos de funciones: algebraicas, exponenciales, logarítmica y trigonométricas. En tal sentido compartimos las preguntas que se formula Montiel, G., (2005), respecto del problema didáctico que plantea el estudio de la Función: ¿pueden aprenderse por igual, desde cualquier perspectiva, las funciones algebraicas que las transcendentes?; al incorporar una componente epistemológica a la explicación del fenómeno didáctico ¿no debemos atender la particularidad epistemológica de cada tipo de función: algebraica, exponencial, logarítmica, trigonométrica?
Es objetivo de este trabajo realizar una revisión bibliográfica sobre las investigaciones que consideran aspectos didácticos sobre la noción de función trigonométrica, para posteriormente tomando como base este trabajo, detectar los posibles obstáculos epistemológicos relacionados con estas funciones y poder así diseñar las herramientas adecuadas para trabajar en el aula con estos conceptos

ANTECEDENTES

Desde hace algún tiempo se ha percibido la especificidad epistemológica de las funciones trascendentes, cuyo tratamiento escolar es fuente de diversas dislexias escolares (Trujillo, 1995; Ferrari, 2001). Tomar en consideración los elementos epistemológicos de la construcción de los conceptos nos hace pensar en cómo enfrentar la problemática del aprendizaje del concepto de función cuando tenemos distintos tipos de funciones (algebraicas, racionales, trascendentes, entre otras), cada una con origen en un contexto específico, con distintas propiedades analíticas, esto es, con epistemologías propias, (Maldonado, S., Montiel, G. y Cantoral, R., 2004). Entre los trabajos que tratan de elaborar explicaciones que dotan de particularidades a su explicación, especialmente en lo referente a las funciones trascendentes podemos citar a Ferrari, (2001), Ferrari y Farfán, (2004); Lezama, (1999); Lezama (2003); Confrey y Smith, (1994, 1995); Martínez-Sierra (2002, 2003).

Según la National Council of Teachers of Mathematics (1992), el currículum de Matemáticas Básicas debe incluir la Trigonometría para que todos los estudiantes sean capaces de aplicarla en la resolución de problemas donde aparecen triángulos y puedan explorar los fenómenos periódicos del mundo real usando las funciones seno y coseno en general; luego conocer la conexión que existe entre el comportamiento de las funciones trigonométricas y los fenómenos periódicos, aplicar técnicas generales de representación gráfica de funciones trigonométricas, las propiedades de las funciones trigonométricas en el estudio de las coordenadas polares, vectores, números complejos y series..

Ahora bien, existen varias formas de introducir las funciones trigonométricas. Se las pueden definir:

1) como las proporciones entre los lados de un triángulo recto,
2) en términos de las coordenadas x e y de un punto P del círculo unitario (interpretar las funciones trigonométricas como proyecciones),
3) como ciertas funciones de los reales a algún subconjunto de los números reales,
4) como cierta serie de potencias de una variable independiente.

Cada uno de estos enfoques tiene sus ventajas y desventajas, y es claro no todos ellos son igualmente conveniente en el aula. Interpretar las funciones trigonométricas como proyecciones, tal como se indica en el punto 2), refleja un cambio en el énfasis de lo abstracto a lo práctico. No debe olvidarse que la trigonometría es una disciplina eminentemente práctica, que nació y se desarrolló fundamentalmente ligada a sus aplicaciones.
De Kee, Mura y Dionne (1996) y Shama, (1998) realizaron estudios sobre la comprensión de conceptos trigonométricos, utilizando en su investigación dos contextos. El primero de estos contextos fue el del triángulo rectángulo, mientras que el segundo fue el contexto de la circunferencia trigonométrica. Las representaciones dominantes entre los alumnos fueron:

1) Como el procedimiento que consiste en dividir una entre otra las longitudes de dos lados de un triángulo (rectángulo) y que producen el seno o el coseno de un ángulo (agudo). Aunque a veces los alumnos aplicaban este procedimiento indebidamente a triángulos que no eran rectángulos o a ángulos que no eran agudos;
2) Como coordenadas cartesianas de un punto en un círculo trigonométrico, esas coordenadas eran, para los alumnos, el coseno y el seno del «punto»;
3) Como las funciones de una calculadora, funciones que proporcionaban, según los alumnos, el seno y el coseno de un número que expresaba la medida de un ángulo.
4) Como las curvas de aspecto ondulado. Incluso algunos alumnos admitían que esas curvas seguían representando las mismas funciones cuando sufrían una rotación o un cambio de escala.

5) Como una ecuación, aunque raramente recurrieron a ella y eran susceptibles de equivocarse cuando lo hacían.

De Kee, Mura y Dionne (1996) encontraron cuatro representaciones del seno y del coseno entre los estudiantes de secundaria, las cuales tiene que ver con: 1) las razones, 2) las coordenadas cartesianas, 3) los valores que se obtienen en una calculadora y 4) las curvas con aspecto ondulado. Los estudiantes mostraron no haber establecido relaciones entre las diferentes representaciones del seno y del coseno antes enumerado. Si desea mejorar la comprensión es necesario promover y fortalecer las relaciones entre esas representaciones,

Montiel (2005), señala que en general se encontraron concepciones alrededor de la función trigonométricas relacionadas a las concepciones ya estudiadas sobre el concepto de función general, consideran especialmente dos de ellas, por ser particulares de la función trigonométrica:

1) … no se hace diferencia entre el seno como una relación trigonométrica y el seno como función trigonométrica…
2) ... una «función» es el conjunto de diferentes objetos que comúnmente llamamos funciones («la función trigonométrica es el conjunto, el coseno, el seno, todas esas cosas») …

De Kee, Mura y Dionne (1996) señalan que para favorecer la comprensión hay que dar más importancia a los lazos entre las diversas representaciones de la noción. Analizan el papel que juega el círculo trigonométrico en el paso de las concepciones geométricas a las concepciones funcionales relacionadas con el seno y el coseno (y que constituye uno de los lazos más importantes entre la relación y la función trigonométrica):

> "Cuando comparamos el desempeño de los alumnos en el contexto del triángulo rectángulo y en el del círculo trigonométrico, constatamos que era mejor en el primer contexto, aun cuando el segundo estuviera más fresco en su mente, ya que acababan de terminar su estudio mientras que había pasado todo un año desde la presentación del primero. Observamos notoriamente pocas huellas de comprensión, del género que fuera, de la función circular y de su papel en la definición de las funciones trigonométricas. Si pensamos que la función circular no es más que un medio didáctico destinado a volver más visual, más «concreta», la construcción de las funciones trigonométricas, esta constatación deja perplejo. Hay que reconocer que esta aproximación concretiza la definición de las funciones trigonométricas al precio de complicarla considerablemente."

Maldonado (2005) teniendo en cuenta la distinción socio epistemológica entre las funciones trascendentes y algebraicas, diseña un cuestionario, con base en los contenidos institucionales, para explorar las concepciones de los estudiantes alrededor de la función trigonométrica. Su diseño dibuja tres etapas escolares: el planteamiento de la razón trigonométrica, la relación entre ángulos medidos en grados y radianes, y la comprensión de las propiedades.
Otro aspecto importante implícito en las funciones trigonométricas es la periodicidad. Esta parece en la naturaleza, por todos lados. Las funciones periódicas son usadas para modelar numerosos fenómenos en meteorología, biología, química, física y en la tecnología. Este concepto cobra aún más relevancia si lo vemos como necesario para comprender la conducta de sistemas caóticos y sistemas no lineales.
Shama, (1998), estudió la periodicidad. Este autor señala que una función con período de longitud r, también tiene período de longitud nr, para cualquier número natural n. Sin embargo tanto los alumnos, como los profesores prefirieron identificar un período fundamental como el

período. La mayoría de los estudiantes prefirieron identificar puntos de discontinuidad, puntos extremos o puntos cero como los puntos extremos de un período. Algunos estudiantes piensan que los extremos de un período tienen que ser iguales, para algunos incluso si un período termina y comienza en extremos diferentes no es un período.
Shama (1998) resalta en sus conclusiones que los estudiantes tienden a confundir el proceso con sus productos, entonces transfieren las propiedades del primero a los segundos. Entendida la periodicidad como proceso, se concibe entonces como fenómeno dependiente del tiempo. Por tanto, como un proceso que tiene un punto de inicio. Además, se tiende a asociar una dirección de ocurrencia al período como proceso es la frente de muchos de los errores que cometen los estudiantes.
Orhun, (2000), investigó sobre los errores y las concepciones erróneas de los alumnos respecto de la trigonometría. Entre sus conclusiones se destacan las siguientes:

1) los estudiantes no desarrollan conceptos claros de trigonometría,
2) algunos de ellos usan la notación algebraica de manera informal,
3) la mayoría no comprende el concepto de trigonometría numérica,
4) la trigonometría es comprendida como relaciones entre los ángulos y los lados de un triángulo rectángulo.

Orhun, (2000) adjudica todos estos errores y concepciones erróneas en los estudiantes, al método de enseñanza que predomina en las escuelas. Para superar estos problemas, recomienda enseñar primero las funciones trigonométricas como funciones reales y antes de entrar a tratar problemas con ángulos. También hace hincapié en la utilidad del uso de los gráficos de las funciones trigonométricas,
Blackett y Tall (1991) señalan que la enseñanza inicial de la trigonometría enfrenta varios problemas, entre los que se destacan:

1) el uso de bosquejos de triángulos comunicaría la idea que sólo se pueden obtener resultados precisos usando procedimientos numéricos y se usan dibujos estáticos en lugar de prestar atención a las relaciones cambiantes dinámicamente.
2) otras dificultades aparecen cuando el estudiante tiene que conceptualizar que pasa cuando un triángulo rectángulo cambia de dimensiones en dos maneras esencialmente diferentes: (1) en la medida que un ángulo agudo aumenta y la hipotenusa se mantiene fija, el lado opuesto aumenta y el lado adyacente decrece, (2) los ángulos permanecen constantes, el alargamiento de la hipotenusa por un factor dado cambia los otros dos lados por el mismo factor (Blackett y Tall, 1991).

Una manera de superar estas dificultades es mediante la introducción de un software que permita la manipulación dinámica de objetos matemáticos.
Montiel (2005) afirma que el tratamiento escolar tradicional que se da en el nivel Medio Superior del concepto de Función Trigonométrica es una extensión de la Trigonometría Clásica, que encuentra en el círculo trigonométrico una explicación necesaria y suficiente para dejar claro:

1) el dominio de la función en todos los reales,
2) el significado de un ángulo negativo,
3) la conversión de la unidad de medida: grados ↔ radianes,
4) la equivalencia entre radianes y reales,
5) la periodicidad y el acotamiento de la función.

Esta autora considera que la programación de los temas referentes a Trigonometría y Funciones Trigonométricas en el Nivel Medio Superior y en el discurso matemático escolar asociado, permite que al final de este periodo las funciones trigonométricas puedan operarse

(derivarse y, en algunos sistemas educativos, integrarse). En consecuencia, el discurso matemático escolar del Nivel Superior (NS) asume de entrada que la función trigonométrica ha sido aprendida por el estudiante, generando en el docente una indiferencia ante las explicaciones analíticas que problematizan la longitud de un arco, la conveniencia o necesidad del uso del radián, el significado analítico de la expresión en serie infinita de la función, etc.
Maldonado (2005) puntualiza que al tratar a las funciones trigonométricas como funciones reales, se tienen serias dificultades para tratarlas como tal, puesto que en el tratamiento escolar de las funciones como funciones reales, cuando se pasa de radianes a reales, no se lo hace explícito, por lo tanto los estudiantes no logran profundizar el concepto de función trigonométrica, puesto que no hacen diferencia, cuando se les presenta la función como función real.

CONCLUSIONES

Durante preparación del material didáctico necesario para la enseñanza de la trigonometría, en el nivel universitario, se deberían tomar en cuenta tanto las necesidades futuras de los estudiantes como los resultados de algunas investigaciones en educación matemática.
Al comenzar con el estudio de las funciones trigonométricas, en el primer curso de Análisis Matemático, se supone que los alumnos han estudiado trigonometría y que están familiarizados con las definiciones de las relaciones trigonométricas basadas en triángulos rectángulos. Pero es de hacer notar que durante esa etapa no se habla aún de funciones, sino más bien se trata con razones entre lados de un triángulo rectángulo y refiriéndose a un ángulo, generalmente medido en grados sexagesimales, en particular del triángulo. Algunas de las dificultades que los estudiantes tienen en apropiarse de los contenidos de la trigonometría están relacionadas con problemas en el aprendizaje de otros conceptos matemáticos. Dos de estos conceptos matemáticos son el de razón, de ángulo y de función. Sabemos que los estudiantes tienen problemas para aprender de razones, así como el de proporciones. El concepto de ángulo no es aprendido con facilidad por los estudiantes. Una dificultad adicional es que los alumnos estudian el concepto de ángulo por primera vez en geometría, luego en trigonometría se tiene que abandonar esas ideas de ángulo. Además, tenemos las dificultades que encuentran los estudiantes en el estudio de conceptos propios de la trigonometría, tal es el caso de la periodicidad.
Durante las primeras lecciones de trigonometría se trabaja con ángulos, en general referidos a un triángulo y medidos en grados sexagesimales, es decir que en todo caso, con referencia al sistema radial de medición, se trabaja con funciones cuyo dominio no son los reales, sino un subconjunto de estos restringido a los ángulos comprendidos entre 0 y π . Luego se incorporan los ángulos que exceden este valor, pero aún así quedan excluidos del dominio de las funciones los ángulos negativos, incorporación ésta que se hace de una forma didáctica no muy clara. Todas estas consideraciones respecto al dominio de las funciones, en general no se explicitan durante la actividad docente.
Teniendo en cuenta que Euler, (siglo XVIII), en su obra Introductio in analysin infinitorum en la cual hace un tratamiento estrictamente analítico (y no geométrico) de las funciones trigonométricas, presenta al seno de un ángulo ya no como un segmento, sino simplemente como un número, (el elemento más importante en la construcción de las nociones trigonométricas es la proporción expresada como razón en un sentido matemático abstracto, no la razón como la relación de dos catetos) la ordenada de un punto de la circunferencia unidad, es que nos plateamos si entonces tal vez no sería más apropiado definir las funciones trigonométricas tomando como base el círculo unitario, ya que de esta forma sus dominios son conjuntos de números reales en lugar de conjuntos de ángulos.
El paso de la medida de los ángulos en grados a la medida de los ángulos en radianes plantea un escenario de interés para los estudios didácticos. En general la enseñanza de la trigonometría se limita a la enseñanza de las razones entre los lados de un triángulo

rectángulo. Este hecho repercute negativamente en los estudiantes ya que los induce a poseer una idea reducida y hasta muchas veces erróneas sobre las funciones trigonometrías, ya que encuadran estas funciones en el estudio de los triángulos rectángulos lo cual tiene sus limitaciones, por ejemplo, el coseno de un ángulo recto. Es recomendable que la enseñanza de la trigonometría se inicie por el estudio de las funciones trigonométricas en contextos dinámicos, en especial con la ayuda de tecnologías como calculadoras y aplicaciones en computadora.
Existen importantes razones para desarrollar conceptos de trigonometría en el ámbito de los estudios universitarios, entre ellas destacamos las siguientes:

1) Durante el desarrollo de la Trigonometría se ilustran algunas propiedades matemáticas fundamentales de algunas funciones, como por ejemplo la esencia no-lineal de muchas de ellas.
2) El manejo de fórmulas permite desarrollar destrezas algebraicas y puede contribuir a una compresión más profunda estas funciones tan importantes.
3) Las funciones trigonométricas juegan un rol fundamental en casi todas las aplicaciones de la ciencia moderna. Estas funciones, especialmente el seno y el coseno, constituyen modelos matemáticos para muchos fenómenos periódicos del mundo real, tales como el movimiento circular uniforme, los cambios de temperatura, los biorritmos, las ondas de sonido y la variación de las mareas
4) El uso del sistema de coordenadas rectangulares es el más adecuado para el estudio de las funciones trigonométricas, como funciones reales, para su representación gráfica, cálculo de sus valores e identificación de sus propiedades.
5) Los estudiantes deben tener también la oportunidad de comprobar identidades trigonométricas básicas, ya que esta actividad fortalece la comprensión de las propiedades trigonométricas, y proporciona un nuevo contexto para demostraciones deductivas.

BIBLIOGRAFIA

Blackett, N. y Tall, D. (1991). *Gender and the versatile learning of trigonometry using computer software*. Published in The Proceedings of the International Group for the Psychology of Mathematics Education XV, Assisi, Italy, vol. 1, pp. 144–151

Confrey, J. y Smith, E. (1994). *Exponential functions, rates of change, and the multiplicative unit en Educational Studies in Mathematics*, Nº26, pp.135-164.

Confrey, J. y Smith, E. (1995). *Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions*. Journal of Research in Mathematics Education, Vol 26(1), pp. 66-86.

De Kee, S., Moura, R. y Dionne, J. (1996*). La comprensión des notions de sinus et cosinus chez des éleves du secondaire. For the Learning of Mathematics* 16 (2), pp 19-22.

Ferrari, M. (2001). *Una visión socioepistemológica. Estudio de la función logaritmo*. Tesis de Maestría, Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, México.

Ferrari, M. y Farfán, R. M. (2004). *La covariación de progresiones en la resignificación de funciones*. En L. Díaz (Ed.). Acta Latinoamericana de Matemática Educativa Vol. XVII, pp. 145 - 149.

Lezama, J. (1999). *Un estudio de reproducibilidad: El caso de la función exponencial*. Tesis de Maestría no publicada. Área de Educación Superior, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.

Lezama, J. (2003). *Un estudio de reproducibilidad de situaciones didácticas*. Tesis de doctorado, no publicada. DME-Cinvestav-IPN, México.

Maldonado E. S. (2005). *Un análisis didáctico de la función trigonométrica.* Tesis de Maestría de Matemática Educativa. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN México, D.F.

Maldonado, E. S.; Montiel, G. y Cantoral, R. (2004). *Construyendo la noción de función trigonométrica*. Acta latinoamericana de matemática educativa, Vol. 17, pp. 371-376.

Martínez-Sierra, G. (2002). *Explicación sistémica de fenómenos didácticos ligados a las convenciones de los exponentes*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 5(1), pp. 45-78.

Martínez-Sierra, G. (2003). *Caracterización de la convención matemática como mecanismo de construcción de conocimiento. El caso de su funcionamiento en los exponentes*. Tesis de doctorado no publicada. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada de IPN. CICATA-IPN. México.

Montiel, G. (2005). *Estudio Socio epistemológico de la Función Trigonométrica*. Tesis de doctorado no publicada. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada de IPN. CICATA-IPN. México.

Orhun, N. (2000*). Studen's mistakes and misconceptions on teaching of trigonometry*. Trabajo en línea. Disponible en: http://math.unipa.it/~grim/AOrhun.PDF

Shama, G. (1998). *Understanding periodicity as a process with a Gestalt structure*. Educational Studies in Mathematics, 35, pp. 255-281.

Trujillo, R. (1995). *Problemática de la enseñanza de los logaritmos en el nivel medio superior. Un enfoque sistémico*. Tesis de Maestría no publicada, Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, México.